一種log 2無窮級數的推廣研究（下）

林建宏

四、$\varphi(\chi)$與兩個相關於$\varphi(\chi)$積分之特殊值計算

接下來的工作，我們想計算一些$\varphi(x)$的特殊值。易知當$x=n\in N$，由(3.2)式及(3.6)式得

$$(4.1)\qquad \varphi(1)=0\ ,\ \varphi(n+1)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

因

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\gamma+\log n+o(1)$$

於是，對充分大的n而言，我們有

$$\varphi(n+1)\sim-\gamma-\log n$$

這是對$\varphi(n+1)$作粗略的估計。事實上，更精確的估計需用到下式

$$\log\Gamma(x)\sim(x-\frac{1}{2})\log x-x+\frac{1}{2}\log 2\pi+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}$$

其中係數B_{2k}稱Bernoulli數：$B_2=1/6$，$B_4=-1/30$，$B_6=1/42$，……（請參閱[6；pp.251，252]）。此即$\log\Gamma(x)$的漸近級數(asymptotic series)。因漸近級數的導數仍爲漸近級數，故對上式取導數，再由定理3給出

$$(4.2)\qquad \varphi(x)\sim-\gamma-\log x+\frac{1}{2x}+(\frac{1}{12x^2}-\frac{1}{120x^4}+\frac{1}{252x^6}-\cdots\cdots)$$

這是$\varphi(x)$的一個很“好”的漸近級數。蓋因我們如果在計算$\varphi(n)$時，採用(4.1)式的調和級數(harmonic series)$\Sigma\ 1/k$，對相當大的n值，是很不經濟的。原因是調和級數雖發散，但增加緩慢。而(4.2)式易見括弧內各項收斂甚速。例如，求$\varphi(101)$時，利用(4.2)式，則

$$\varphi(101)\sim-\gamma-\log 101+\frac{1}{2\times 101}+\frac{1}{12\times 101^2}-\cdots$$

$$\begin{aligned}&\sim-0.5772156\\&\quad-4.6151205\\&\quad+0.0049505\\&\quad+0.0000081\\&\sim-5.187377\end{aligned}$$

也就是說，(4.2) 式祇須取括弧內第一項，即可精確到小數點以下第六位。對 (4.1) 式而言，欲達同樣的精確度，非取 100 項不可。所謂“好”的原因就是指此，這使得 (4.2) 式在求調和級數時，倒成爲一有力的工具。因此，在數值計算方面，漸近展開式 (asymptotic expansion) 是相當重要的課題之一。(以上內容，取材自 [4])

繼續 (4.1) 式的工作，我們進一步地求當 x 爲有理數時，$\varphi(x)$ 之值。因對所有形如

$$\frac{q}{p}+n \qquad (0<q<p\,,\ p\,,\ q\,,\ n \text{ 均爲正整數})$$

的有理數而言，由 (3.6) 式可知

$$\varphi\left(\frac{q}{p}+n\right)=\varphi\left(\frac{q}{p}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\frac{q}{p}+k} \tag{4.3}$$

很明顯地，我們祇須求 $\varphi(q/p)$ 即足。對於其他的有理數 $q/p+n$ 而言，$\varphi(q/p+n)$ 均可由 (4.3) 式推導得出。

利用 (3.9) 式，表 1 列出一些計算 $\varphi(q/p)$ 的結果。

表 1

q/p	$\varphi(q/p)$
$1/2$	$+2\log 2$
$1/3$	$+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\frac{3}{2}\log 3$
$2/3$	$-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\frac{3}{2}\log 3$
$1/4$	$+\frac{\pi}{2}+3\log 2$
$3/4$	$-\frac{\pi}{2}+3\log 2$
$1/5$	$+\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}}{2}\log 2+\frac{5}{4}\log 5+\frac{\sqrt{5}}{2}\log(\sqrt{5}+1)$
$2/5$	$+\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{2}\log 2+\frac{5}{4}\log 5-\frac{\sqrt{5}}{2}\log(\sqrt{5}+1)$
$3/5$	$-\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{2}\log 2+\frac{5}{4}\log 5-\frac{\sqrt{5}}{2}\log(\sqrt{5}+1)$
$4/5$	$-\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}}{2}\log 2+\frac{5}{4}\log 5+\frac{\sqrt{5}}{2}\log(\sqrt{5}+1)$
$1/6$	$+\frac{\pi}{2}\sqrt{3}+2\log 2+\frac{3}{2}\log 3$
$5/6$	$-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}+2\log 2+\frac{3}{2}\log 3$
$1/8$	$+\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}+1)+4\log 2+\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)$
$3/8$	$+\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)+4\log 2-\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)$
$5/8$	$-\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)+4\log 2-\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)$
$7/8$	$-\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}+1)+4\log 2+\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)$
$1/10$	$+\frac{\pi}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\left(2-\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)\log 2+\frac{5}{4}\log 5+\frac{3\sqrt{5}}{2}\log(\sqrt{5}+1)$
$3/10$	$+\frac{\pi}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\left(2+\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)\log 2+\frac{5}{4}\log 5-\frac{3\sqrt{5}}{2}\log(\sqrt{5}+1)$
$7/10$	$-\frac{\pi}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\left(2+\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)\log 2+\frac{5}{4}\log 5-\frac{3\sqrt{5}}{2}\log(\sqrt{5}+1)$

9/10	$-\frac{\pi}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}+(2-\frac{3\sqrt{5}}{2})\log 2$ $+\frac{5}{4}\log 5+\frac{3\sqrt{5}}{2}\log(\sqrt{5}+1)$
1/12	$+\frac{\pi}{2}(2+\sqrt{3})+3\log 2+\frac{3}{2}\log 3$ $+\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})$
5/12	$+\frac{\pi}{2}(2-\sqrt{3})+3\log 2+\frac{3}{2}\log 3$ $-\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})$
7/12	$-\frac{\pi}{2}(2-\sqrt{3})+3\log 2+\frac{3}{2}\log 3$ $-\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})$
11/12	$-\frac{\pi}{2}(2+\sqrt{3})+3\log 2+\frac{3}{2}\log 3$ $+\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})$

通常，我們都知道

$$\int_0^\infty \frac{x^s dx}{e^x-1}=\Gamma(s+1)\zeta(s+1),\forall s>0$$

而對於

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{(e^x-1)^s}$$

所知極少。現在，我們着手求此積分之値。假設 $0<s<1$，則由 (1.7) 及 (1.11) 兩式得

$$\varphi(s)=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}(1-\frac{s}{n})(1-\frac{s}{n-1})\cdots(1-s)$$

$$=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\frac{\Gamma(n+1-s)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1-s)}$$

$$=\frac{\sin\pi s}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\frac{\Gamma(n+1-s)\Gamma(s)}{\Gamma(n+1)}$$

$$=\frac{\sin\pi s}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\int_0^1 t^{n-s}(1-t)^{s-1}dt$$

$$=\frac{-\sin\pi s}{\pi}\int_0^1 t^{-s}(1-t)^{s-1}\log(1-t)\,dt$$

將前式作 $t=1-e^{-x}$ 變換，得出

$$\frac{\sin\pi s}{\pi}\int_0^\infty \frac{x dx}{(e^x-1)^s}$$

於是，我們獲知

$$(4.4)\quad \int_0^\infty \frac{x dx}{(e^x-1)^s}=\frac{\pi}{\sin\pi s}\varphi(s),\quad 0<s<1$$

令 $s\to 1$，可得到

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{e^x-1}=\lim_{s\to 1}\frac{\pi\varphi(s)}{\sin\pi s}$$

$$=\lim_{s\to 1}\frac{\pi\varphi'(s)}{\pi\cos\pi s}$$

$$=-\varphi'(1)$$

$$=\zeta(2)\quad [\text{由 (3.3) 式}]$$

若將 (4.4) 式的積分視爲 s 的函數，並以 $Q(s)$ 表示，則 (4.4) 式可寫成

$$(4.5)\quad Q(s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}\varphi(s),\quad 0<s<1$$

利用 (3.8) 式，將 $Q(s)$ 減去 $Q(1-s)$，可得

$$(4.6)\quad Q(s)-Q(1-s)=\frac{\pi^2\cos\pi s}{\sin^2\pi s},\quad 0<s<1$$

考慮當 $0<q<p$，p，q 均爲正整數時，由 (3.9) 及 (4.5) 兩式可得

$$(4.7)\quad Q(\frac{q}{p})=\frac{\pi}{\sin\frac{q}{p}\pi}\left(\log 2p+\frac{\pi}{2}\cot\frac{q\pi}{p}-2\sum_{m=1}^{\ell-1}a_m\right)$$

其中 ℓ 及 a_m 如定理 5 所定義。

於 (4.7) 式中，令 q 以 $p-q$ 代入，則有

(4.8) $$Q(1-\frac{q}{p})=\frac{\pi}{\sin\frac{q}{p}\pi}(\log 2p-\frac{\pi}{2}\cot\frac{q\pi}{p}-2\sum_{m=1}^{\ell-1}a_m)$$

易見 (4.7) 及 (4.8) 兩式蘊涵下式成立

(4.9) $$Q(\frac{q}{p})+Q(1-\frac{q}{p})=\frac{2\pi}{\sin\frac{q\pi}{p}}(\log 2p-2\sum_{m=1}^{\ell-1}a_m)$$

令 $s=1/2$，則由 (4.5) 式及表 1 得

(4.10) $$Q(\frac{1}{2})=2\pi\log 2$$

當 $s=1/3$，由 (4.5) 及 (4.6) 兩式，給出

(4.11) $$Q(\frac{1}{3})=\frac{\pi}{\sqrt{3}}(3\log 3+\frac{\pi}{\sqrt{3}})$$

(4.12) $$Q(\frac{2}{3})=\frac{\pi}{\sqrt{3}}(3\log 3-\frac{\pi}{\sqrt{3}})$$

同樣地，當 $s=1/4$ 時，得

(4.13) $$Q(\frac{1}{4})=\pi\sqrt{2}(3\log 2+\frac{\pi}{2})$$

(4.14) $$Q(\frac{3}{4})=\pi\sqrt{2}(3\log 2-\frac{\pi}{2})$$

進一步地，我們想求形如

$$\int_0^\infty\frac{x[\log(e^x-1)]^n}{\sqrt[p]{(e^x-1)^q}}dx\ ,\ 0<q<p$$

n，p，q 均為正整數

之積分值。欲達成此目的，首先，我們證明

引理 1

令 $H=\{s: a\le s\le A\}$，其中 $0<a<A<2$。

(a)對每個 $\varepsilon>0$，有一個 $\delta>0$ 使

$$\left|\int_\alpha^\beta x(e^x-1)^{-s}dx\right|<\varepsilon\ ,\ \forall s\in H$$

恆成立，當 $0<\alpha<\beta<\delta$。

(b)對每個 $\varepsilon>0$，有一數 ν 使

$$\left|\int_\alpha^\beta x(e^x-1)^{-s}dx\right|<\varepsilon\ ,\ \forall s\in H$$

恆成立，當 $\beta>\alpha>\nu$。

證明：(a)先設 $x\in(0,1]$，且 s 在 H 中。因

$$(e^x-1)^{-s}\le x^{-s}\le x^{-A}$$

故知

$$\left|x(e^x-1)^{-s}\right|\le x^{1-A}\ ,\ \forall x\in(0,1]$$

利用這個不等式，若 $0<\alpha<\beta<1$，則

$$\left|\int_\alpha^\beta x(e^x-1)^{-s}dx\right|\le\int_\alpha^\beta x^{1-A}dx$$

$$=\frac{1}{2-A}(\beta^{2-A}-\alpha^{2-A})\ ,\ \forall s\in H$$

若 $\varepsilon>0$，則我們可取 δ，$0<\delta<1$，使得

$$\left|\frac{1}{2-A}(\beta^{2-A}-\alpha^{2-A})\right|<\varepsilon$$

當 $0<\alpha<\beta<\delta$，這就證明了(a)部份。

(b)設 $x\in[1,\infty)$，且 s 在 H 中。由於 $(1-e^{-x})^{-s}$ 在 $[1,\infty)$ 上為 x 的有界函數，即存在常數 c_1，使得

(4.15) $$\left|(1-e^{-x})^{-s}\right|\le c_1\ ,\ \forall x\in[1,\infty)$$

此外，因 $xe^{-\frac{a}{2}x}$ 在 $[1,\infty)$ 上連續，且當 $x\to\infty$，其值收斂為零，故存在一正常數 c_2，使得

(4.16) $$\left|xe^{-\frac{a}{2}x}\right|\le c_2\ ,\ \forall x\in[1,\infty)$$

顯然，由 (4.15) 及 (4.16) 兩式可得

$$\left|x(e^x-1)^{-s}\right|=\left|xe^{-sx}(1-e^{-x})^{-s}\right|$$

$$\le\left|xe^{-ax}\right|\cdot\left|(1-e^{-x})^{-s}\right|$$

$$\le c_1c_2e^{-\frac{a}{2}x}$$

$$\forall x\in[1,\infty)$$

應用此不等式，當 $1<\alpha<\beta$

$$\left|\int_\alpha^\beta x(e^x-1)^{-s}dx\right|\leq c_1c_2\int_\alpha^\beta e^{-\frac{a}{2}x}dx$$

$$=\frac{2c_1c_2}{a}(e^{-\frac{a}{2}\alpha}-e^{-\frac{a}{2}\beta}),\ \forall s\in H$$

再者，對任意給定的 $\varepsilon>0$，有一數 $\nu>1$，使得

$$\left|\frac{2c_1c_2}{a}(e^{-\frac{a}{2}\alpha}-e^{-\frac{a}{2}\beta})\right|<\varepsilon$$

當 $\beta>\alpha>\nu$，於是(b)部份已得證明。因此引理完全得證。

實際上，此引理的結論，具體表達出一個積分爲均勻收斂的觀念。這可由下面性質看出

性質1：若 $G=\{s:0<s<2\}$ 且

$$f_n(s)=\int_{1/n}^n x(e^x-1)^{-s}dx,\ \forall s\in G$$

則序列 f_n 收斂。

證明：若 K 爲 G 的一個緊緻子集，則有正實數 a 與 A，$0<a<A<2$，使得 $K\subset\{s:a\leq s\leq A\}$。故由引理1，我們可取 ϵ_1 及 ϵ_2，分別使

$$(4.17)\quad \left|\int_{1/m}^{1/n} x(e^x-1)^{-s}dx\right|\leq\epsilon_1$$

$$(4.18)\quad \left|\int_n^m x(e^x-1)^{-s}dx\right|\leq\epsilon_2$$

其中 m，n 均爲大於零的正整數。利用(4.17)及(4.18)兩式，並設 $\epsilon/2=max\{\epsilon_1,\epsilon_2\}$，當 $m>n$ 時，我們有

$$\left|f_m(s)-f_n(s)\right|=\left|\int_{1/m}^{1/n}x(e^x-1)^{-s}dx+\int_n^m x(e^x-1)^{-s}dx\right|$$

$$\leq\left|\int_{1/m}^{1/n}x(e^x-1)^{-s}dx\right|+\left|\int_n^m x(e^x-1)^{-s}dx\right|$$

$$\leq\epsilon_1+\epsilon_2$$

$$\leq\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

很明顯地，$\{f_n\}$ 爲 Cauchy 序列，由 Cauchy 準則知 $\{f_n\}$ 收斂。證畢。

值得注意的是 $Q(s)$ 的 s，由性質1可知範圍從原來的 $(0,1)$ 擴展爲 $(0,2)$，亦即

$$(4.19)\quad Q(s)=\int_0^\infty\frac{xdx}{(e^x-1)^s},\ \forall s\in(0,2)$$

因爲 $Q(1)=\zeta(2)=\pi^2/6$，故 $Q(1)$ 存在。又因 $\sin\pi s$ 及 $\varphi(s)$ 在 $(0,2)$ 上均有定義，於是(4.5)式可改寫成

$$(4.20)\quad Q(s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}\varphi(s),\ \forall s\in(0,2)$$

當然，我們這樣做並沒有給予(4.20)任何證明，完整的證明留給讀者作爲習題。

今由性質1可知 $Q(s)$ 存在，$\forall s\in(0,2)$，且 $x(e^x-1)^{-s}$ 在矩形區間 $[\delta,\infty;a,A]$ 無窮可微，其中 $\delta>0$，$0<a<A<2$。因此 $Q(s)$ 的導數存在而且與 $Q(s)$ 相同的證明知其積分爲有限，於是我們可對(4.19)的積分式取微分，即

$$\frac{d^nQ(s)}{ds^n}=\frac{d^n}{ds^n}\int_0^\infty\frac{xdx}{(e^x-1)^s}$$

$$=\int_0^\infty\frac{\partial^n}{\partial s^n}\left[\frac{x}{(e^x-1)^s}\right]dx$$

$$=\int_0^\infty\frac{x[-\log(e^x-1)]^n}{(e^x-1)^s}dx$$

$$=(-1)^n\int_0^\infty\frac{x[\log(e^x-1)]^n}{(e^x-1)^s}dx$$

或寫成

$$(4.21)\quad \int_0^\infty \frac{x[\log(e^x-1)]^n}{(e^x-1)^s}\,dx = (-1)^n Q^{(n)}(s)$$

顯然，我們要求的積分值，即等於求$Q^{(n)}(s)$之值。現考慮將（ 4.20 ）式寫成

$$(4.22)\quad \pi\varphi(s) = Q(s)\sin\pi s$$

爲方便起見，我們令

$$\varphi_m = \varphi^{(m)}(s)$$
$$Q_m = Q^{(m)}(s)$$
$$\Omega_k^m = \binom{m}{k}\sin^{(k)}(\pi s)$$

其中$m=0,1,2,\cdots\cdots,n$，而$k=0,1,2,\cdots\cdots,m$。利用以上符號，對 (4.22) 式取m階導數，則由 Leibniz 公式得

$$(4.23)\quad \pi\varphi^{(m)}(s) = \pi\varphi_m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}Q^{(m-k)}(s)\cdot\sin^{(k)}\pi s$$
$$\sum_{k=0}^{m} Q_{m-k}\,\Omega_k^m$$

於 (4.23) 式中，令m分別等於$0,1,2,\cdots\cdots,n$，則可得下列$n+1$個式子

$$(4.24)\quad \begin{aligned} \pi\varphi_0 &= Q_0\Omega_0^0 \\ \pi\varphi_1 &= Q_0\Omega_1^1 + Q_1\Omega_0^1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pi\varphi_n &= Q_0\Omega_n^n + Q_1\Omega_{n-1}^n + \cdots + Q_n\Omega_0^n \end{aligned}$$

因聯立方程式 (4.24) 之係數行列式

$$\begin{vmatrix} \Omega_0^0 & & 0 \\ \Omega_1^1 & \Omega_0^1 & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \Omega_n^n & \Omega_{n-1}^n \cdots\cdots & \Omega_0^n \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{m=0}^{n}\Omega_0^m$$
$$= \prod_{m=0}^{n}\binom{m}{0}\sin(\pi s)$$
$$= \sin^{n+1}(\pi s) \neq 0,\ \forall s\in(0,2)\setminus\{1\}$$

故除$s=1$外，當$s\in(0,2)$，Q_0，Q_1，……，Q_n可由聯立方程式 (4.24) 唯一確定。因此，我們可利用 (4.24) 來計算Q_n，亦即計算$Q^{(n)}(s)$。我們舉幾個例子供作參考。

由 (4.24) 式知

$$Q_1 = \frac{1}{\Omega_0^1}(\pi\varphi_1 - Q_0\Omega_1^1)$$
$$= \frac{1}{\Omega_0^1}\left(\pi\varphi_1 - \frac{\Omega_1^1}{\Omega_0^0}\pi\varphi_0\right)$$
$$= \frac{1}{\Omega_0^0\Omega_0^1}(\Omega_0^0\pi\varphi_1 - \Omega_1^1\pi\varphi_0)$$
$$= \frac{1}{\sin^2(\pi s)}[\pi\sin(\pi s)\varphi'(s) - \pi^2\cos(\pi s)\varphi(s)]$$

亦即

$$(4.25)\quad Q'(s) = \frac{\pi}{\sin^2(\pi s)}[\sin(\pi s)\cdot\varphi'(s) - \pi\cos(\pi s)\varphi(s)]$$

同樣地，由 (4.24) 式，經過直接計算，我們獲致下列式子

$$(4.26)\quad Q''(s) = \frac{\pi}{\sin^3(\pi s)}\{\sin^2(\pi s)\cdot\varphi''(s) - \pi\sin(2\pi s)\varphi'(s) + \pi^2[1+\cos^2(\pi s)]\cdot\varphi(s)\}$$

$$(4.27)\quad Q'''(s) = \frac{\pi}{\sin^4(\pi s)}\{\sin^3(\pi s)\cdot\varphi'''(s) - 3\pi^2\cos(\pi s)\sin^2(\pi s)\varphi''(s) + 3\pi^3\sin(\pi s)[1+\cos^2(\pi s)]\varphi'(s) - \pi^4\cos(\pi s)[5+\cos^2(\pi s)]\varphi(s)\}$$

事實上，(4.24)的$n+1$個式子，用來計算(4.25)，(4.26)，(4.27)等類型的公式，有時反而使式子更為複雜，相當不方便。不過，它最大的好處是在於它可化成矩陣的形式，利用計算機求解$Q^{(n)}(s)$。

由於聯立方程式(4.24)可化成下面的矩陣形式

$$\begin{bmatrix} \Omega_0^0 & & & 0 \\ \Omega_1^1 & \Omega_0^1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Omega_n^n & \Omega_{n-1}^n & \cdots & \Omega_0^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi\varphi_0 \\ \pi\varphi_1 \\ \vdots \\ \pi\varphi_n \end{bmatrix}$$

或寫成

$$(4.28) \qquad \Omega Q = \Phi$$

其中

$$\Phi = (\pi\varphi_0, \pi\varphi_1, \cdots\cdots, \pi\varphi_n)^T$$

$$Q = (Q_0, Q_1, \cdots\cdots, Q_n)^T$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_0^0 & & & 0 \\ \Omega_1^1 & \Omega_0^1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Omega_n^n & \Omega_{n-1}^n & \cdots\cdots & \Omega_0^n \end{bmatrix}$$

因此，我們可利用數值分析裏的解線性聯立方程式的各種方法，配合計算機高速運算能力，求解(4.28)式。

必須補充兩點說明。第一，如果我們將(4.28)式化為下列形式來計算，即

$$Q = \Omega^{-1}\Phi$$

則矩陣Ω必須非奇異(nonsingular)，如此方可使Ω^{-1}存在。由於Ω為下三角矩陣，故Ω非奇異若且唯若Ω所有主對角線元素的連乘積的值不等於零，亦即

$$\Omega_0^0\,\Omega_0^1\cdots\cdots\Omega_0^n \neq 0$$

要滿足以上條件，由Ω_k^m的定義知，必須$s\in(0,2)\setminus\{1\}$。

第二，由於我們欲求解(4.28)的Q，故Ω及Φ必須為已知。因為

$$\Omega_k^m = \binom{m}{k}\sin^{(k)}(\pi s)$$

顯然Ω_k^m為已知，若m，k，s已知，於是Ω便決定了。對於$\varphi_n = \varphi^{(n)}(s)$的計算，我們不妨使用(3.3)及(3.4)兩式

$$\varphi(s+1) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\zeta(k+1)s^k$$

$$\varphi^{(n)}(s) = (-1)^n n!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+k)^{n+1}}$$

在我們要求的精確範圍內，取其前面若干項來計算。

接下來的工作，我們先計算$\varphi^{(n)}(1/2)$及$\varphi^{(n)}(1)$。令(3.3)式中的$x=1/2$，則我們得到

$$\varphi^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^n n!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+k\right)^{n+1}}$$

$$= (-1)^n n!\,2^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{n+1}}$$

$$= (-1)^n n!\,(2^{n+1}-1)\zeta(n+1)$$

亦即

$$(4.29) \qquad \varphi^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^n n!\,(2^{n+1}-1)\cdot\zeta(n+1)$$

同理可得

$$(4.30) \qquad \varphi^{(n)}(1) = (-1)^n n!\,\zeta(n+1)$$

如欲計算$Q^{(n)}(1)$，我們可直接利用(4.23)。令(4.23)式的m分別等於1，……，9，並且令$s=1$，則有

$$\varphi_1 = -Q_0$$

$$\varphi_2 = -2Q_1$$

$$\varphi_3 = +\pi^2 Q_0 - 3Q_2$$

$$\varphi_4 = +4\pi^2 Q_1 - 4Q_3$$

$$\varphi_5 = -\pi^4 Q_0 + 10\pi^2 Q_2 - 5Q_4$$

$$\varphi_6 = -6\pi^4 Q_1 + 20\pi^2 Q_3 - 6Q_5$$
$$\varphi_7 = +\pi^6 Q_0 - 21\pi^4 Q_2 + 35\pi^2 Q_4 - 7Q_6$$
$$\varphi_8 = +8\pi^6 Q_1 - 56\pi^4 Q_3 + 56\pi^2 Q_5 - 8Q_7$$
$$\varphi_9 = -\pi^8 Q_0 + 36\pi^6 Q_2 - 126\pi^4 Q_4 + 84\pi^2 Q_6 - 9Q_8$$

此處 $s=1$ 。

解上面式子，得

$$Q_0 = -\varphi_1$$
$$Q_1 = -\frac{1}{2}\varphi_2$$
$$Q_2 = -\frac{\pi^2}{3}\varphi_1 - \frac{1}{3}\varphi_3$$
$$Q_3 = -\frac{\pi^2}{2}\varphi_2 - \frac{1}{4}\varphi_4$$
$$Q_4 = -\frac{7\pi^4}{15}\varphi_1 - \frac{2\pi^2}{3}\varphi_3 - \frac{1}{5}\varphi_5$$
$$Q_5 = -\frac{7\pi^4}{6}\varphi_2 - \frac{5\pi^2}{6}\varphi_4 - \frac{1}{6}\varphi_6$$
$$Q_6 = -\frac{31\pi^6}{21}\varphi_1 - \frac{7\pi^4}{3}\varphi_3 - \pi^2\varphi_5 - \frac{1}{7}\varphi_7$$
$$Q_7 = -\frac{31\pi^6}{6}\varphi_2 - \frac{49\pi^4}{12}\varphi_4 - \frac{7\pi^2}{6}\varphi_6 - \frac{1}{8}\varphi_8$$
$$Q_8 = -\frac{127\pi^8}{15}\varphi_1 - \frac{124\pi^6}{9}\varphi_3 - \frac{98\pi^4}{15}\varphi_5 - \frac{4\pi^2}{3}\varphi_7 - \frac{1}{9}\varphi_9$$

由於已知 $s=1$，故由 (4.30)，上列式子可化簡成下列結果

$$(4.31)\quad Q(1) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$(4.32)\quad Q'(1) = -\zeta(3)$$

$$(4.33)\quad Q''(1) = \frac{7\pi^4}{90}$$

$$(4.34)\quad Q'''(1) = -\pi^2\zeta(3) - 6\zeta(5)$$

$$(4.35)\quad Q^{(4)}(1) = \frac{31\pi^6}{210}$$

$$(4.36)\quad Q^{(5)}(1) = -\frac{7\pi^4}{3}\zeta(3) - 20\pi^2\zeta(5) - 120\zeta(7)$$

$$(4.37)\quad Q^{(6)}(1) = \frac{127\pi^8}{210}$$

$$(4.38)\quad Q^{(7)}(1) = -\frac{31}{3}\pi^6\zeta(3) - 98\pi^4\zeta(5) - 840\pi^2\zeta(7) - 5040\zeta(9)$$

$$(4.39)\quad Q^{(8)}(1) = \frac{2555\pi^{10}}{594}$$

同理，經由直接計算，我們可得出如下式子

$$(4.40)\quad Q\left(\frac{1}{2}\right) = 2\pi\log 2$$

$$(4.41)\quad Q'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi^3}{2}$$

$$(4.42)\quad Q''\left(\frac{1}{2}\right) = 2\pi^3\log 2 + 14\pi\zeta(3)$$

$$(4.43)\quad Q'''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5\pi^5}{2}$$

$$(4.44)\quad Q^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) = 10\pi^5\log 2 + 84\pi^3\zeta(3) + 744\pi\zeta(5)$$

$$(4.45)\quad Q^{(5)}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{61\pi^7}{2}$$

$$(4.46)\quad Q^{(6)}\left(\frac{1}{2}\right) = 122\pi^7\log 2 + 1050\pi^5\cdot\zeta(3) + 11160\pi^3\zeta(5) + 91440\pi\zeta(7)$$

$$(4.47)\quad Q^{(7)}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1385\pi^9}{2}$$

$$(4.48)\quad Q^{(8)}\left(\frac{1}{2}\right) = 2770\pi^9\log 2 + 23912\cdot\pi^7\zeta(3) + 260400\pi^5\zeta(5)$$

$$+2560320\pi^3\zeta(7)$$
$$+20603520\pi\zeta(9)$$

$$(4.49)\quad Q^{(9)}(\frac{1}{2})=-\frac{50521\pi^{11}}{2}$$

有關 $Q^{(n)}(s)$ 特殊值的計算，到此結束。底下，我們研究 $Q(s)$ 的無窮級數展開式。由於 $|e^{-x}|<1$，$\forall x\in(0,\infty)$，因此，$(1-e^{-x})^{-s}$ 可利用二項式定理展開成無窮級數。故(4.19)式可化成

$$\begin{aligned}Q(s)&=\int_0^\infty xe^{-sx}(1-e^{-x})^{-s}dx\\&=\int_0^\infty xe^{-sx}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-s}{n}(-e^{-x})^n\right]dx\\&=\frac{1}{s^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{-s}{n}\int_0^\infty xe^{-(n+s)x}\,dx\\&=\frac{1}{s^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+s)^2}\binom{-s}{n}\\&=\frac{1}{s^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!(n+s)^2}\end{aligned}$$

亦即

$$(4.50)\quad Q(s)=\frac{1}{s^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s(s+1)\cdots\cdots(s+n-1)}{n!(n+s)^2},\quad 0<s<2$$

應用(4.50)式，我們很容易導出下列結果

$$(4.51)\quad \lim_{s\to0}\left[Q(s)-\frac{1}{s^2}\right]=0$$

$$(4.52)\quad \lim_{s\to1}Q(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)$$

$$(4.53)\quad Q(\frac{1}{2})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(2n+1)^2(n!)^2\,2^{2n-2}}=2\pi\log 2$$

$$(4.54)\quad Q'(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n'(s)}{n!(n+s)^3}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3h_n(s)}{n!(n+s)^4}$$

$$(4.55)\quad Q''(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n''(s)}{n!(n+s)^3}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6h_n'(s)}{n!(n+s)^4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{12h_n(s)}{n!(n+s)^5}$$

$$(4.56)\quad Q'''(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n'''(s)}{n!(n+s)^3}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{9h_n''(s)}{n!(n+s)^4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{36h_n'(s)}{n!(n+s)^5}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{60h_n(s)}{n!(n+s)^6}$$

$$(4.57)\quad Q'(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(n+1)^2}-2\zeta(3)=-\zeta(3)$$

其中 $h_n(s)=s(s+1)\cdots\cdots(s+n)$，$H_n=\Sigma_{k=1}^{n}1/k$。式子(4.53)另外一種求法參閱[3; pp.139, 140]，至於(4.57)亦請參閱[3; p.49]。

若令(4.19)式中的 x 作變換 $t=e^{-x}$，則我們可得到

$$(4.58)\quad Q(s)=-\int_0^1\frac{t^{s-1}\log t}{(1-t)^s}dt=\frac{\pi}{\sin\pi s}\varphi(s),\quad 0<s<2$$

這裡我們也使用了(4.20)式。此式的不同推導方法，同樣可參考[3; pp.230～232]。

事實上，欲對 $\varphi(s)$ 及 $Q(s)$ 作更深入的了解，考慮將 s 推廣至複數域是有必要的，亦惟有如此，才能全盤清楚這兩個函數的所有性質，甚至應用在與 $\zeta'(s)/\zeta(s)$ 相關的公式上。另外，一件頗值提及的事，最近有人利用 $\psi'(s)$ 來求解 Clausen 積分

$$Cl_2(\theta)=-\int_0^\theta\log(2\sin\frac{t}{2})\,dt$$

非常成功，請有興趣的讀者參閱：

P.J. de Doelder, On the Clausen integral $\mathrm{Cl}_2(\theta)$ and a related integral, pp.325～330.

C.C.Grosjean, Formulae concerning the computation of the Clausen integral $Cl_2(\theta)$, pp.331～342.

這兩篇論文均出自 *J. Comput. Appl. Math.*, vol.11, no.3, December 1984。

五、應用$\varphi(\chi)$求解無窮級數和

定義函數（參閱 T.J.I'A. Bromwich, *An Introduction to the Theory of Infinite Series*, Macmillan, 1955, p.523）

$$(5.1)\quad \beta(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]$$

由(3.1)式易知：若 $0<x<\infty$，則

$$(5.2)\quad \beta(x)=\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$$

如將(5.2)式的被積分式展開成無窮級數後，再積分之，則可得

$$(5.3)\quad \beta(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+x}$$

為求計算方便起見，令(3.7)式的 n 等於 2，而 x 以 $x/2$ 取代，則給出

$$(5.4)\quad \varphi(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]-\log 2$$

很明顯地，由(5.1)及(5.4)我們可獲致

$$(5.5)\quad \beta(x)=\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-\varphi(x)-\log 2$$

應用(5.5)式並配合表 1，我們計算出許多 $\beta(x)$ 的特殊值如下

$$(5.6)\quad \beta(1)=\log 2$$

$$(5.7)\quad \beta\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$(5.8)\quad \beta\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\log 2$$

$$(5.9)\quad \beta\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\log 2$$

$$(5.10)\quad \beta\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)$$

$$(5.11)\quad \beta\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)$$

$$(5.12)\quad \beta\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}-1)\log 2+\sqrt{5}\log(\sqrt{5}+1)$$

$$(5.13)\quad \beta\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}+1)\log 2+\sqrt{5}\log(\sqrt{5}+1)$$

$$(5.14)\quad \beta\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+1)\log 2-\sqrt{5}\log(\sqrt{5}+1)$$

$$(5.15)\quad \beta\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}-1)\log 2-\sqrt{5}\log(\sqrt{5}+1)$$

$$(5.16)\quad \beta\left(\frac{1}{6}\right)=\pi+\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})$$

$$(5.17)\quad \beta\left(\frac{5}{6}\right)=\pi-\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})$$

由(5.3)式及(5.6)～(5.17)等結果，很容易求出底下各種無窮級數的和

$$(5.18)\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\cdots\cdots=\log 2$$

$$(5.19)\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots\cdots=\frac{\pi}{4}$$

(5.20) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+-\cdots\cdots$

$\displaystyle=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\log 2\right)$

(5.21) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+-\cdots\cdots$

$\displaystyle=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\log 2\right)$

(5.22) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k+1}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+-\cdots\cdots$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)\right]$

(5.23) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k+3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+-\cdots$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)\right]$

(5.24) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{5k+1}=1-\frac{1}{6}+\frac{1}{11}-\frac{1}{16}+-\cdots$

$\displaystyle=\frac{1}{5}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}-1)\log 2+\sqrt{5}\log(\sqrt{5}+1)\right]$

(5.25) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{5k+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{7}+\frac{1}{12}-\frac{1}{17}+-\cdots$

$\displaystyle=\frac{1}{5}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}+1)\log 2+\sqrt{5}\log(\sqrt{5}+1)\right]$

(5.26) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{5k+3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{13}-\frac{1}{18}+-\cdots$

$\displaystyle=\frac{1}{5}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+1)\log 2-\sqrt{5}\log(\sqrt{5}+1)\right]$

(5.27) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{5k+4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{14}-\frac{1}{19}+-\cdots$

$\displaystyle=\frac{1}{5}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}-1)\log 2-\sqrt{5}\log(\sqrt{5}+1)\right]$

(5.28) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{6k+1}=1-\frac{1}{7}+\frac{1}{13}-\frac{1}{19}+-\cdots$

$\displaystyle=\frac{1}{6}\left[\pi+\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})\right]$

(5.29) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{6k+5}=\frac{1}{5}-\frac{1}{11}+\frac{1}{17}-\frac{1}{23}+-\cdots\cdots$

$\displaystyle=\frac{1}{6}\left[\pi-\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})\right]$

留意我們以上的計算，我們祇針對＋－的情況，對於正負號變化爲＋＋－－，＋－－＋，＋＋＋－－－，…………等的無窮級數，我們可利用前面結果。如

(5.30): (5.20) + (5.21)

$\displaystyle=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}++--\cdots\cdots$

$\displaystyle=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

(5.31): (5.22) + (5.23)

$\displaystyle=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}++--\cdots\cdots$

$\displaystyle=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

(5.32): (5.24) + (5.27)

$\displaystyle=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16}-\frac{1}{19}++--\cdots\cdots$

$\displaystyle=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

(5.33): (5.25) + (5.26)

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}$$

$$-\frac{1}{18}++--\cdots\cdots$$

$$=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

(5.34): (5.28) + (5.29)

$$=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}$$

$$-\frac{1}{23}++--\cdots\cdots$$

$$=\frac{\pi}{3}$$

(5.35): (5.20) − (5.21)

$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+$$

$$\frac{1}{11}+--+\cdots\cdots$$

$$=\frac{2}{3}\log 2$$

(5.36): (5.22) − (5.23)

$$=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+$$

$$\frac{1}{15}+--+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)$$

(5.37): (5.24) − (5.27)

$$=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}$$

$$+\frac{1}{19}+--+\cdots\cdots$$

$$=\frac{2}{5}[\sqrt{5}\log(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{5}-1$$

$$)\log 2]$$

(5.38): (5.25) − (5.26)

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}$$

$$+\frac{1}{18}+--+\cdots\cdots$$

$$=\frac{2}{5}[\sqrt{5}\log(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{5}+1$$

$$)\log 2]$$

(5.39): (5.28) − (5.29)

$$=1-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}-\frac{1}{19}$$

$$+\frac{1}{23}+--+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\log(2+\sqrt{3})$$

(5.40): (5.32) + (5.33)

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{11}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{2\pi}{5\sqrt{5}}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

(5.41): (5.32) − (5.33)

$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}$$

$$+\frac{1}{11}-\cdots\cdots$$

$$=\frac{2\pi}{5\sqrt{5}}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

(5.42): (5.37) + (5.38)

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$$

$$+\frac{1}{11}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{4}{\sqrt{5}}[\log(\sqrt{5}+1)-\log 2]$$

(5.43): (5.37) − (5.38)

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$$

$$+\frac{1}{11}-\cdots\cdots$$

$$=\frac{4}{5}\log 2$$

(5.44): (5.24) − (5.25)

$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}-\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+--+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\frac{2}{5}\log 2$$

(5.45): (5.24) − (5.26)

$$=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{16}+\frac{1}{18}+--+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

(5.46): (5.24) + (5.33)

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\cdots$$

$$=\frac{\pi}{10\sqrt{5}}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2\sqrt{10-2\sqrt{5}})-(\frac{\sqrt{5}-1}{5})\log 2+\frac{1}{\sqrt{5}}\log(\sqrt{5}+1)$$

由於

$$\beta(s)+\beta(1-s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+s}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1-s}$$

$$=\frac{1}{s}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2s(-1)^k}{s^2-k^2}$$

$$=\frac{\pi}{\sin\pi s}\text{，若 }0<s<1$$

因此，我們也可以利用式子

$$(5.47)\quad \beta(s)+\beta(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s},\ 0<s<1$$

來計算一些無窮級數和。譬如

$$(5.48)\quad \frac{1}{8}[\beta(\frac{1}{8})+\beta(\frac{7}{8})]$$

$$=1+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{23}-\frac{1}{25}-\frac{1}{31}++--\cdots\cdots$$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$(5.49)\quad \frac{1}{8}[\beta(\frac{3}{8})+\beta(\frac{5}{8})]$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\frac{1}{27}-\frac{1}{29}++--\cdots\cdots$$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$(5.50)\quad \frac{1}{10}[\beta(\frac{1}{10})+\beta(\frac{9}{10})]$$

$$=1+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{29}-\frac{1}{31}-\frac{1}{39}++--\cdots\cdots$$

$$=\frac{2\pi}{5(\sqrt{5}-1)}$$

$$(5.51)\quad \frac{1}{10}[\beta(\frac{3}{10})+\beta(\frac{7}{10})]$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{23}+\frac{1}{27}-\frac{1}{33}-\frac{1}{37}++--\cdots\cdots$$

$$=\frac{2\pi}{5(\sqrt{5}+1)}$$

$$(5.52)\quad \frac{1}{12}[\beta(\frac{1}{12})+\beta(\frac{11}{12})]$$

$$= 1+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{23}+\frac{1}{25}+\frac{1}{35}-\frac{1}{37}$$

$$-\frac{1}{47}++--\cdots\cdots$$

$$=\frac{\pi\sqrt{2}}{6(\sqrt{3}-1)}$$

$$(5.53)\quad \frac{1}{12}\left[\beta\left(\frac{5}{12}\right)+\beta\left(\frac{7}{12}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\frac{1}{29}+\frac{1}{31}-\frac{1}{41}$$

$$-\frac{1}{43}++--\cdots\cdots$$

$$=\frac{\pi\sqrt{2}}{6(\sqrt{3}+1)}$$

六、結　論

綜觀定理 1 到定理 3 的發展，我們可尋出一條脈絡，那就是

(a)先找一個均勻收斂的級數（如定理 1），

(b)次求其積分表示式（如定理 2），

(c)試將此積分式作變換（如 (2.3) 式），

(d)再覓得一已知函數與此式相結合（如定理 3），進而得出此已知函數的另一種級數表示法。

以流程圖表示如右上。

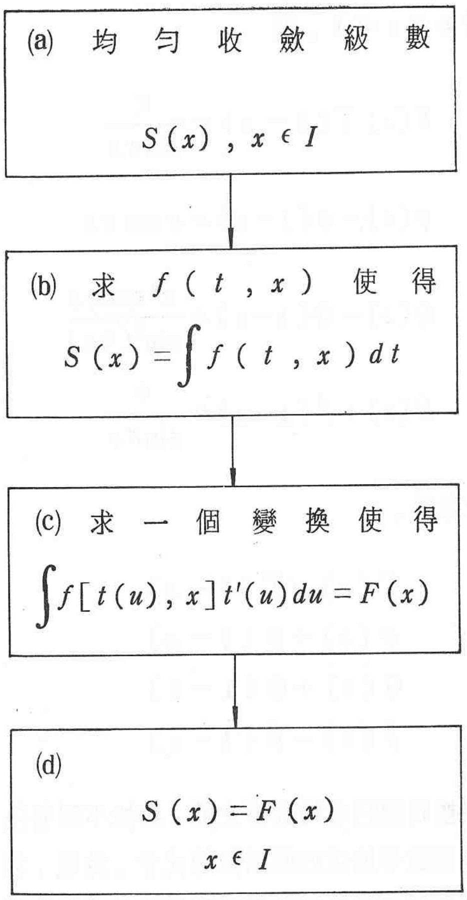

圖 1

由於一般分析學方面的教科書上，有很多判別級數收斂的方法，因此，(a)步驟並不難，(b)，(c)兩個步驟較技巧些，而且有時甚為複雜。所以，用此法求某一無窮級數的原函數之可行性，完全決定於(b)，(c)這兩個瓶頸上。

除了我們前面應用 $\beta(x)$ 求無窮級數和的方法外，還有另一種更美妙的處理手法，它是利用代數數論的 Dirichlet 類數公式（class number formula）求得。有興趣的讀者，請參閱 Edwards 的書[2]第 9 章。

在第 4 節中，我們已稍對 $Q(s)$ 有點了解，更進一步地，我們還想求下列形式的積分

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{(e^x-1)^s}\,dx\ ,\quad s=\sigma+it$$

尚待有興趣的讀者共同努力。

由 (1.7)，(3.8)，(4.6)，(5.47) 等式子我們已知：

若 $0<s<1$，則

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$$

$$\varphi(s)-\varphi(1-s)=\pi\cot\pi s$$

$$Q(s)-Q(1-s)=\frac{\pi^2\cos\pi s}{\sin^2(\pi s)}$$

$$\beta(s)+\beta(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$$

然另一方面，

$$\Gamma(s)/\Gamma(1-s)$$
$$\varphi(s)+\varphi(1-s)$$
$$Q(s)+Q(1-s)$$
$$\beta(s)-\beta(1-s)$$

等，根據目前已有的數學文獻，均找不到有任何初等函數等於這四個函數的式子。於是，我們很想知道這四個函數有初等函數的表示法嗎？若答案是肯定的，那麼請馬上告訴大家。如果沒有，到底是什麼樣的性質所促成？

由第4節的計算結果，我們已知 $Q^{(2n)}(1)$ 均爲超越數，因 π 爲超越數，π^{2n+2} 亦爲超越數（n 爲正整數）。對於 $Q^{(2n+1)}(1)$ 的情況，由計算結果顯示，它是下列常數的線性組合

$$\pi^{2n}\zeta(3),\ \pi^{2n-2}\zeta(5),\ \cdots\cdots\ \pi^2\zeta(2n+1),\ \zeta(2n+3)$$

因此，想要知道 $Q^{(2n+1)}(1)$ 是否爲超越數，還得討論以上這些常數是否爲超越數。這都是尙待解決的問題。

七、致 謝

五年多前，筆者徬徨於理論與實際之間，幸蒙中央研究院數學研究所于靖博士，指點數學問題，方得釋懷。謹以以上心得致深忱敬意。

參考文獻

(1) P.E.Böhmer, *Differenzengleichungen und Bestimmte Integrale*, Leipzig, 1939.

(2) H.M.Edwards, *Fermat's Last Theorem*, Springer-Verlag, 1977.

(3) N.Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Leipzig, 1906.

(4) Bertram Ross, The Psi Function, *Mathematics Magazine*, vol. 51, no.3, May 1978, pp.176～179.

(5) Bertram Ross, Serendipity in Mathematics or How One Is Led to Discover that $\sum_{n=1}^{\infty}[1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)]/n2^n n! = 1/2+3/16+15/144+\cdots\cdots=\ell n\,4$, *American Mathematical Monthly*, vol.90, no.8, October 1983, pp.562～565.

(6) E.T.Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge University Press, 1962.

(7) D.V.Widder, *Advanced Calculus*, 2nd ed., Prentice-Hall, 1961.

(8) 施克剛，分析學探原，(W. Rudin 原著)，聯經，民國68年，222頁～224頁。

——本文作者台北工專電子工程科畢業——