δ-函數及廣義函數淺介

楊重駿・楊照崑

1.導 言

數學的進展常常由於要克服一些工程或物理上的數學疑難。δ - 函數（衝擊函數或脈衝函數）就是如此一個例子。δ - 函數在物理或工程問題的數學運算上的應用是很廣泛的。但如果問說什麼是 δ - 函數？恐怕能夠對它作一令人滿意的回答就不容易了。事實上 δ - 函數並不是我們一般瞭解的函數之一，它是一種廣義（generlized）函數。依據〔1〕內中的解說「δ - 函數是一種最簡單的奇異函數（singular function）。依物理學家之定義"除在 x_0 點之值爲∞外，其餘各點爲0並且滿足 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\,dx=1$ 之函數 $\delta(x-x_0)$"稱爲 δ - 函數，這種 δ - 函數之發生僅在某種媒介發生，它只是用於乘一足夠好的函數做爲被積函數（integrand）來表示該函數，故吾人只需瞭解一個好的（good）函數乘上一奇異函數後之積分意義，並不需答覆 δ - 函數之問題是什麼！舉個例來說，有個很好的函數（sufficiently well-behaved）$\varphi(x)$，則有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\varphi(x)\,dx=\varphi(x_0)$$

或

$$\delta^*\varphi(x_0)=\varphi(x_0)。$$

在本文，我們除了覺得就上面對 δ - 函數的解說有加以補充，以及用實際物理上問題的數學疑難來作說明的必要外，同時期望讀者對 δ - 函數的概念有個來龍去脈的掌握，並進而列舉其有關的特殊性質及其在解決數學問題上的一些應用。

2.δ -函數及廣義函數的發源

$\delta(x)$ 所謂的 δ - 函數或delta函數是由Dinac氏最早在針對實際工程問題但並不具很嚴謹的數學意義下定出來的。他當初只覺得在實際解決問題上，有必要定出一怪函數 $\delta(x)$，它具有下列的性質，對任一連續函數 $f(x)$，我們有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,f(x)\,dx=f(0) \qquad (1)$$

我們首先在此要指出的是爲何物理學家一般稱 δ- 函數爲衝擊函數，電子工程上稱爲脈

衝函數，因依據式(1)，它表示對 $\delta(x)$ 而言，主要是其在 $x=0$ 之值，而在其它點 $\delta(x)$ 的值可當作 0 看，所以 $\delta(0)$ 要一衝到∞大才可能使式(1)成立。但照積分定義及規約 $0\cdot\infty=0$ 式(1)設為 0 才對。所以 $\delta(x)$ 不可能是一般函數意義下的函數。這引得我們對函數定義作推廣。下面先舉一簡單的電學上的問題，看 $\delta(x)$ 如何引進來克服其中數學上的困難。

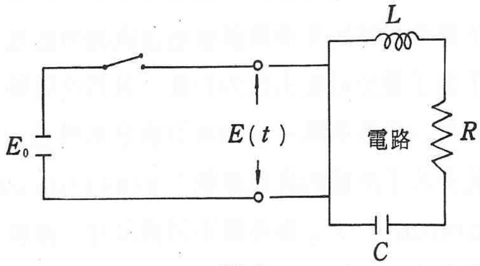

圖 1

上面圖 1 中代表的是一個電路、電源及一開關。假定電源的電壓 E_0 是保持一定的，而開關在 $t=0$ 的一瞬間關上，但在開始時（$t\leq 0$）為開著的。則在電路終端的電壓 $E(t)$ 可表為

$$E(t)=E_0\,H(t)$$

其中

$$H(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t\leq 0\end{cases}$$

函數 $H(t)$ 又稱為海維賽德（Heaviside）函數或 H－函數。

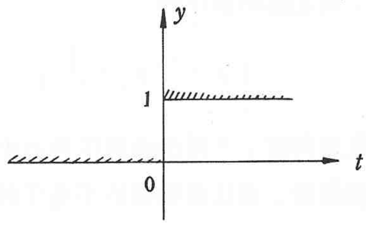

圖 2　$H(t)$ 的圖形

現假設電路由一電阻器、感應圈及電容器所串連成（如圖 1）則由電學原理知電流 $I(t)$ 滿足下列積分——微分方程式：

$$L\frac{dI(t)}{dt}+RI(t)+\frac{1}{C}\int_0^t I(t)\,dt=E(t) \tag{2}$$

其中 L，R，C 分別表電阻、電感係數及電容量，對式(2)對 t 作微分得

$$L\frac{d^2I(t)}{dt^2}+R\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{C}I(t)=\frac{dE(t)}{dt} \tag{3}$$

此方程式的右邊涉及

$$\frac{dE(t)}{dt}=E_0\frac{dH(t)}{dt}，但\frac{dH(t)}{dt}$$

在 $t=0$ 時是不定的，因

$$\frac{H(t)-H(0)}{h}=\begin{cases}1/h, & h>0\\ 0, & h<0\end{cases}$$

所以對此一很簡單物理上現象的描述，招致了一個數學上的問題。但回顧方程式(2)中，$E(t)=E_0\,H(t)$ 是一理想的情形下才有的。而事實上任何一個開關，由完全開到完全的接觸總要有一些中間過程，因此應視為連續的動作，但其所經的時間可能極短，也許是百分之一秒，因此圖 2 的描述情形很可能如圖 3 的樣子，即其中彎曲部份所佔的時間是很短暫的。

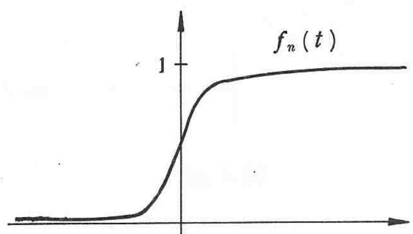

圖 3

換言之，理想化的開關過程有如圖 2，它是一不連續的函數，而實際的動作由圖 3 所示，它是一個連續函數，而且為了運算（如求微分時）方便起見，我們可以要求此連續函數很平滑（即具有多次或任何次的導函數的）。因圖 2 顯然是圖 3 的極限情形。但如何把這個極限的步驟表示出來却並不容易由實際的實驗求出來。我們只能希望用較合理的平滑函數來逼近（或趨近）函數 $H(t)$，使得實際的結果沒

什麼大偏差，一個在直覺上可以表示圖3的曲線的平滑函數簇是：

$$f_n(t)=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-nx^2}\,dx \tag{4}$$

由事實 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$ 可得知

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2}\,dx=1\ ,\ n=1,\ 2,\ \cdots,$$

且

$$0<f_n(x)<1\ ,\ \forall t\ ,\text{及}\ n\ 。$$

注意 e^{-nx^2} 除了在點 $x=0$ 的近旁外，在其它處的值就隨著 n 變大而趨向於0。如此一來 $f_n(t)$ 在 n 愈大時就愈像（或近似）H- 函數（圖4(a)），而其導函數

$$f'_n(t)=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\ e^{-nt^2}$$

有如圖4(b)所示。因此我們可看到當 n 愈大，也即當 $f_n(t)$ 愈近似 H- 函數時，則代表

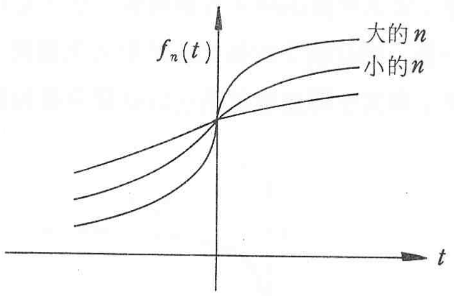

圖4(a)

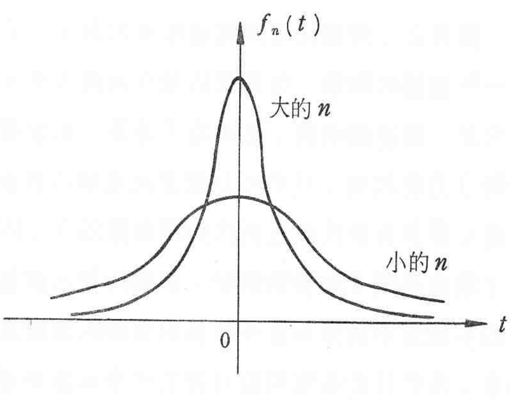

圖4(b)

$f'_n(t)$ 的曲線就顯得更窄（即大部份的函數值幾乎為0），而且在原點突出的峯就更高。于是極限函數 $\lim_{n\to\infty} f_n(t)$ 可視為 H- 函數，其導函數在原點不存在。此函數的導函數就不是一個普通意義下的一個函數了。但我們用 $\{f_n\}$ 來逼近得到 H- 函數此一極限步驟。

當然別的函數簇也可以用來逼近 H- 函數。但是不是不同的物理問題需要用不同的函數簇？即用不同的平滑函數簇能達成相同的效果嗎？為了避免可能引起的紛亂，我們把這種種過程用一個具有統一性抽家的概念來描述。這樣就介入了所謂的廣義函數（generalized fnnction）了。在各種不同處理此一推廣的函數定義的方法中，其中以田波代（Temple）的方法最初等，其只需具有微積分的基礎就可瞭解。他視 $\delta(t)$ 為逼近函數序列

$$\left\{\sqrt{\frac{n}{\pi}}\ e^{-nt^2}\right\}$$

的一極限現象。對任何連續函數 $\phi(t)$，其滿足 $|\phi(t)|\le ce^{a|t|}$，a，c 為兩常數（與 ϕ 有關），可以證明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2}\phi(t)\,dt=\phi(0) \tag{5}$$

在上式中我們稱 $\phi(t)$ 為一檢驗函數，$\delta(t)$ 為相應函數序列

$$\{e^{-nt^2}(n/\pi)^{\frac{1}{2}}\}$$

的一廣義函數。不同的函數序列可能產生不同的廣義函數。而且很明顯的不是任何一個函數 $\phi(t)$ 都可以滿足式(5)。而在實際問題中，我們並不需要考慮所有的函數 $\phi(t)$，只要考慮與我們物理現象有關的函數中某些 $\phi(t)$ 就可以了。

今假設 $\phi(t)$ 都來自一個函數簇 Φ，則我們稱兩函數簇 $\{f_n\}$ 及 $\{g_n\}$ 對 Φ 為等價（Equivalent）是指說

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\ \phi(t)\ dt$

及 $\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)\ \phi(t)\ dt$

對所有的 n，及任一 $\phi \in \Phi$ 皆存在。

(ii) $$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\ \phi(t)\ dt = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)\ \phi(t)\ dt \quad \forall \phi \in \Phi$$

我們也可說 $\{f_n\}$ 及 $\{g_n\}$ 就 Φ 而言是具相等作用的。又因對每一個 ϕ，相應的

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\ \phi(t)\ dt$$

爲一實數量，因此我們可以把 $\lim_{n\to\infty} f_n$ 看作定義在函數簇 Φ 的一泛函（functional）（即以 Φ 爲定義域，實數域爲值域的函數）。如以 $\langle f_n, \phi \rangle$ 表示

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\ \phi(t)\ dt$$

及如果對所有的 $\phi \in \Phi$，$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \phi \rangle$ 存在，則如果定 f（這就是廣義函數）在 Φ 上之作用爲

$$\langle f, \phi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, \phi \rangle$$

這樣 $\langle f, \phi \rangle$ 就具有一定的意義了，且爲一實數。不過雖然 $\langle f, \phi \rangle$ 的定義清楚了，然而我們由前面開頭的分析知 f 本身不一定在 t 的每點上皆有定義的，而稱這種泛函爲廣義函數。所以像 Schwarz 等人乾脆把廣義函數用泛函來表示，就不借用逼近函數序列來定了。我們並且稱任何這樣一簇函數 Φ 爲**檢驗函數簇**。

由上面的討論我們可得知廣義函數的形成與所用的檢驗函數簇 Φ 有關。就理論及實際計算而言，我們所需要用的 Φ 通常是由下面所謂的**好(good)函數**所組成。

定義1：一個函數 F 若其在 $(-\infty, \infty)$ 上有任何階的導函數且其任何 m 階導數在 $|x| \to \infty$ 時恆滿足 $|F^m(x)| \leq O(1)\ |x|^{-N}$，$N$ 爲任一給定的正整數，則稱 F 爲好函數。

例1：e^{-x^2} 爲好函數

我們以下討論的廣義函數就是以好函數簇爲基礎的。

定義2：我們稱一序列好函數 $\{f_n\}$ 爲正則的，是指對任何一好函數 $F(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\ F(x)\ dx$$

總存在。

例2：$\{f_n\}$，$f_n(x) = e^{-x^2/n^2}$ 爲一正則好函數序列（不難驗證此時的極限値爲 $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\ dx$）。

定義3：我們稱兩個正則的好函數序列 $\{f_n\}$，$\{g_n\}$ 爲等價的函數序列，是指對任何一個好函數 $F(x)$。

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\ F(x)\ dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\ F(x)\ dx$$

例3：$\{e^{-x^4/n^4}\}$ 與 $\{e^{-x^2/n^2}\}$ 爲兩等價的好函數序列。

3.廣義函數的定義

所謂一廣義函數其實就是一個正則的好函數序列。

也即任何一正則的好函數序列，就相應一廣義函數。我們稱兩個廣義函數爲相等的是指

說它們相應的好函數序列為等價的。所以事實上一個廣義函數相應有一簇互相等價的正則好函數序列。依此定義可知廣義函數包括一些通常的連續函數類；譬如 $x^2 \sin x$ 它可視為相應 $\{f_n\}$；$f_n = x^2 \sin x$，$\forall n = 1, 2, \cdots$，的情形。

3·1 廣義函數f與一好函數F的乘積

若 $\{f_n\}$ 為任一定出 f 的正則好函數序列，對任何好函數 F，我們定

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, F(x)\, dx = \langle f, F \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, F(x)\, dx$$

為一個廣義函數 f 的一個好函數 F 的乘積（一般我們不一定可以把兩個廣義函數相乘起來）。一個重要的事實是若有一廣義函數 $f(x)$ 與任一好函數 $F(x)$ 總有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, F(x)\, dx = 0$$

則 $f(x) \equiv 0$。這可由 $f(x)$，與恆為0的函數為等價的事實得到。由此我們可體認當兩個廣義函數相等和二個函數相等是一樣的。

3·2 δ-函數

定理：正則好函數序列 $\{ e^{-nx^2}(n/\pi)^{\frac{1}{2}} \}$ 定出的廣義函數特稱為 δ- 函數，以 $\delta(x)$ 表之，對任一好函數 $F(x)$ 下式成立：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, F(x)\, dx = F(0)$$

證：若 $F(x)$ 為任一好函數，則

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2}(n/\pi)^{\frac{1}{2}} F(x)\, dx - F(0) \right|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2}(n/\pi)^{\frac{1}{2}} \{F(x) - F(0)\} dx \right|$$

$$\leq \max |F'(x)| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2}(n/\pi)^{\frac{1}{2}} |x| dx$$

$$= (n\pi)^{-\frac{1}{2}} \max |F'(x)| \to 0$$

（當 $n \to \infty$ 時）

因而由廣義函數與好函數乘積及上面結果定義得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, F(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2}(n/\pi)^{\frac{1}{2}} F(x)\, dx = F(0)$$

註：讀者不難明白

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\, F(x)\, dx = F(y)$$

了，這在應用上常用到的一個形式。

我們由廣義函數與一普遍函數的乘積定義可得到下面兩個有用的事實：

(i) $F(x)\, \delta(x) = F(0)\, \delta(x)$
(ii) $F(x)\, \delta(x-a) = F(a)\, \delta(x-a)$

F 為任何一個好函數。

例4：$\{ e^{-x^2/n^2} \} \leftrightarrow I(x)$

則 $$\int_{-\infty}^{\infty} I(x)\, F(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx$$

有了廣義函數的定義，不難得出若 $\{f_n\} \leftrightarrow f$，$\{g_n\} \leftrightarrow g$；$f$，$g$ 為兩廣義函數，$\{f_n\}$ 及 $\{g_n\}$ 分別為其等相應的正則好函數序列。則 $f \pm g \leftrightarrow \{ f_n \pm g_n \}$

4.檢驗函數簇及其充裕性

總括前面的討論知廣義函數的定義並不拘泥於一固定的簇檢驗函數簇。對不同類的物理問題是可用不同類的檢驗函數簇來解決。一般說來，若要求所選的檢驗函數簇中的函數，具有較多的解析性，如微分性（平滑性），取極限值的秩序（這是指多變數的廣義函數時）等等，則由此簇就可產生較多的廣義函數（何故？讀者試思考一下）。但我們也不希望所取的檢驗函數簇太小；即我們除了要求檢驗函數具有充分的平滑性（可微分性）外，而且要求該簇的成員也很多，多得至少可以使我們用它們來鑑別兩個原來就不相等的連續函數；換句話說，如果有兩個不等的連續函數 f_1 及 f_2，則我們總可在該簇函數中找到一個成員 ϕ，使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,\phi(x)\,dx \neq \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\,\phi(x)\,dx$$

這相當於說，如果一個連續函數 f 與任一該簇中的函數 ϕ，滿足

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\phi(x)\,dx = 0$$

則 $$f(x)\equiv 0$$

在前面我們要求的檢驗函數簇是所謂的好函數簇。在實用上及理解上我們往往從該簇函數中具體地選出一個子集，是所謂的**具有有限支撐**(finite support)的好函數簇 K：

$\varphi \in K$　若且僅若 φ 滿足下列兩個條件：

(i)　φ 爲 $(-\infty,\infty)$ 上具有任何階導函數的實函數（簡記 $\varphi\in C^{\infty}(-\infty,\infty)$）。

(ii)　$\varphi(x)=0$　當 x 距原點充分遠時（即當 $|x|\geq \alpha_\varphi$ 時 $\varphi(x)=0$；α_φ 表與 φ 有關的一正數）。

乍看起來這樣一簇函數 K 似乎不會很多，但事實上我們將證明 K 的一個特殊的子集也就足夠多了。

首先，我們不難檢驗出

$$\varphi_{\alpha\beta}(x)=\begin{cases} e^{-1/(x-\alpha)^2}\,e^{-1/(x-\beta)^2} & \alpha<x<\beta \\ 0 & x\notin(\alpha,\beta) \end{cases}$$

如此的一個函數，爲具有有限支撐的好函數（主要證明 $\varphi_{\alpha\beta}$ 在點 α 及點 β 處可無限地微分!）。

定理：函數簇 $\{\varphi_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta$ 爲任意的實數$\}$ 可用來鑑別任何兩個本來並不等的連續函數。

證明：設 f_1 及 f_2 爲兩個不等的連續實函數，定 $f=f_1-f_2$，則 f 爲連續的

$$f=f_1-f_2$$

又至少有一點 $x_0\in(-\infty,\infty)$

$$f(x_0)=f_1(x_0)-f(x_2)\neq 0$$
$$(\because f_1 \text{ 與 } f_2 \text{ 不等})$$

由於 f 的連續性，故可推知存在一閉區間 $[\alpha,\beta]$ 其包含點 x_0，且在整個 $[\alpha,\beta]$ 上，$f(x)$ 不變號（即總爲正或負，與 $f(x_0)$ 同號！）。取 $\varphi_{\alpha\beta}$

於是

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi_{\alpha\beta}\,dx \neq 0$$

因而

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,\varphi_{\alpha\beta}(x)\,dx \neq \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\,\varphi_{\alpha\beta}(x)\,dx$$

有了這樣的檢驗函數後，我們對任何一個在整個實數軸 $(-\infty,\infty)$ 上到處可無限次微

分的函數，如 $\sin x$，x^3，$\log(1+x^2)$ 等，雖然它們都不是好函數，但一旦與一個適當的具有有限支撐的函數 $\varphi_{\alpha\beta}(x)$ 相乘後，如 $\sin x\ \varphi_{\alpha\beta}(x)$ 就變成一好函數，有關廣義函數的理論就可引用了。

5.廣義函數其導函數及求法

設 f 為由正則好函數序列 $\{f_n\}$ 所定，則定義 f 的導數 f' 為由 $\{f'_n\}$ 所定出。由以下的證明可知廣義函數的任何階導函數總存在的。這也提供了解題的方便，我們可不必顧慮導函數是否存在等問題。

設 f 的正則好函數序列是由 $\{f_n\}$ 所定，則對任何一好函數 F

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,F(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,F(x)\,dx$$

於是

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f'_n(x)\,F(x)\,dx &= f_n(x)\,F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,F'(x)\,dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,F'(x)\,dx\end{aligned}$$

因而有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,F(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,F'(x)\,dx \qquad (6)$$

式(6)可用來求一些廣義函數的導函數的作用。

例5：考慮 $\delta'(x)$。由式(6)我們有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\,F(x)\,dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,F'(x)\,dx \\ &= -F'(0)\end{aligned}$$

一般有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x)\,F(x)\,dx \\ &= (-1)^n F^{(n)}(0)\end{aligned}$$

或許有人會問廣義函數的導函數與一般函數的導函數有什麼關係？首先由式(6)我們可看到，若 f 本身為一連續函數且具有為分段連續（piecewise continuous）的導函數時，則 f 的導函數在通常的意義下和把 f 看作一廣義函數其導函數兩者是同樣的。但現若 f 的導函數在通常的意義下，不見得在 $(-\infty,\infty)$ 上每點有定義，情形就不一樣了。譬如我們取 $f(x)=H(x)$，H- 函數。則我們知 H' 除了在點 $x=0$ 外，到處有定義；即 $H(x)=0$，$\forall x\neq 0$，而 $H'(0)$ 不存在；我們現利用式(6)求 $H'(x)$。這時我們把 $H(x)$ 看作一廣義函數，我們由式(6)得

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} H'(x)\,F(x)\,dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\,F'(x)\,dx \\ &= -\int_{0}^{\infty} F'(x)\,dx \\ &= F(0) \quad (\because F(\infty)=0) \qquad (7)\end{aligned}$$

另一方面

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,F(x)$$

所以由此及式(7)我們可推得

$$H'(x) \equiv \delta(x)。$$

現推廣上面的結果，對於一個分段連續且

具有分段連續導函數的函數 f 的廣義導函數，設點 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots f$ 的不連續點，$a_1, a_2, \cdots a_k, \cdots\cdots$ 爲相應在那些點的跳躍。（即 $a_i = f(x_i^+) - f(x_i^-)$ ）。我們考慮

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j H(x - x_j) \quad (9)$$

則 g 爲一連續函數，但其導函數爲分段連續的。於是 g 的一般導函數與 g 的廣義導函數爲相同的。而 H - 函數的導函數值只要存在，就是 0 。所以 g 的一般導函數值與 f 的一般導函數值同時存在時就必相等。如果我們以 f_s' 及 g_s' 分別表 f 及 g 的廣義導函數，則我們由式(9)得

$$\begin{aligned} f_s'(x) &= g_s'(x) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \delta(x - x_j) \\ &= g'(x) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \delta(x - x_j) \\ &= f'(x) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \delta(x - x_j) \end{aligned} \quad (10)$$

6. 廣義函數與普通函數的合成函數及其導函數

我們有時需要知道像 $\delta(x^2 - 1)$ 又代表什麼樣的函數？一個廣義函數 g 與一個函數 h 的合成函數 $g(h)$ 定義如下：

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} g(h(x)) F(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left[\frac{d}{dy} \int_{h(\xi)<y} F(\xi)\, d\xi \right] dy \end{aligned} \quad (11)$$

例6： $\delta(\alpha x) = |\alpha|^{-1} \delta(x)$。

解： $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha x - \beta) F(x)\, dx$

$$= |\alpha|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) F[(\alpha^{-1}(y + \beta)] dy$$

$$= |\alpha|^{-1} F(\alpha^{-1} \beta)$$

當 $\beta = 0$ 時，我們可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha, x) F(x)\, dx = |\alpha|^{-1} F(0)$$

在上面定義中要

$$\frac{d}{dy} \int_{h(\xi)<y} F(\xi)\, d\xi$$

爲一好函數才行，特別當 $y = h(x)$ 的反函數爲 y 的一解析函數且在無窮遠點的成長率相當慢時，式(11)總有意義的。我們也可討論這樣合成函數的微分，其結果如下：

$$\frac{dg(h(x))}{dx} = g_s'(h(x)) h'(x) \quad (12)$$

形式上和一般合成函數的微分一樣只是 g_s' 表廣義函數的微分。

例7： 證 $\delta(x^2 - a^2)$

$$= \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)]$$

證： 利用式(11)

$$g(x) = H(x), \quad h(x) = x^2 - a^2$$

則由式(11)得

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - a^2) F(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \left[\frac{d}{dy} \int_{\xi^2 - a^2 < y} F(\xi) d\xi \right] dy \end{aligned} \quad (13)$$

但 $\displaystyle \int_{\xi^2 - a^2 < y} F(\xi)\, d\xi$

$$= \int_{-\sqrt{y + a^2}}^{+\sqrt{y + a^2}} F(\xi)\, d\xi$$

因而

$$\frac{d}{dy} \int_{\xi^2 - a^2 < y} F(\xi)\, d\xi$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{y+a^2}}\left[F(\sqrt{y+a^2})\right.$$

$$\left.+F(-\sqrt{y+a^2})\right]$$

於是式(13)的右邊變成

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\frac{1}{\sqrt{y+a^2}}\left[F(\sqrt{y+a^2})\right.$$
$$\left.+F(-\sqrt{y+a^2})\right]dy$$

$$=\frac{1}{2a}\left[F(a)+F(-a)\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\delta(x-a)+\delta(x+a)\right]F(x)dx \tag{14}$$

所以由式(13)及(14)我們可推論得

$$\delta(x^2-a^2)$$
$$=\frac{1}{2a}\left[\delta(x+a)+\delta(x+a)\right] \tag{15}$$

例8： $\frac{d}{dx}H(x^2-a^2)=\delta(x-a)$
$$-\delta(x+a)$$

證：置

$$g(x)=H(x)\ ,\ h(x)=x^2-a^2$$

由式(12)及式(15)得

$$\frac{d}{dx}H(x^2-a^2)$$
$$=\delta(x^2-a^2)2x$$
$$=\frac{x}{a}\left[\delta(x-a)+\delta(x+a)\right]$$
$$=\delta(x-a)-\delta(x+a)$$

$(\because F(x)\delta(x-a)=F(a)\delta(x-a))$

7.廣義函數(主要是δ-函數)的一些應用

先介紹在解微分方程式方面的應用，我們都知道一個函數的不定積分，除了差一個常數外，是唯一決定的。我們要證明一個廣義函數的不定積分也有此類似結果。這相當於證明：若有兩個廣義函數 $u(x)$ 及 $v(x)$ 皆爲一廣義函數 $f(x)$ 的積分，即

$$u'(x)-v'(x)=f(x)-f(x)=0$$

如果置 $w(x)=u(x)-v(x)$，則我們有

$$w'(x)\equiv 0 \tag{16}$$

現我們要證上式將導至 $w(x)$ 爲一常數的結論。

由廣義函數的導函數定義，我們有

$$0=-\int_{-\infty}^{\infty}w'(x)F(x)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}w(x)F'(x)dx \tag{17}$$

我們知對任何好函數 F，

$$\int_{-\infty}^{\infty}F'(x)dx=F(\infty)-F(-\infty)$$
$$=0$$

又

$$G(x)=\int^{x}F(x)dx$$

仍爲一好函數及

$$G'(x)=F(x)。$$

現取任一滿足

$$\int_{-\infty}^{\infty}F_1(x)dx=1$$

的好函數 F_1 及任一好函數 F_2，置

$$\psi(x)=F_2(x)-\alpha F_1(x)$$

其中

$$\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}F_2(x)dx\ 。$$

則 $\psi(x)$ 爲滿足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, dx = 0$$

的一好函數。因而

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, \psi(x)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, F_2(x)\, dx$$
$$- \alpha \int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, F_1(x)\, dx \text{。}$$

此表示對任一好函數 $F_2(x)$，我們有

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\, w(x) - c\,]\, F_2(x)\, dx = 0$$

其中

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, F_2(x)\, dx$$

這表示 $w(x)-c$ 與任一好函數相乘積的積分爲 0，因而 $w(x)-c\equiv 0$，即 $w(x)\equiv c$ 爲一常數。（或由

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, F(x)\, dx = c \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx$$

可得知 $w(x)\equiv c$）。推廣可得知方程 $w^{(n)}(x) = 0$ 之解必爲一次數小於 n 的多次式。

例9： 試證下列非齊次線性微分方程：

$$w^{(n)} = \delta(x-a) \tag{17}$$

（或許有些讀者對如此的微分方程覺得不自然，不妨把它視爲方程式 $w^{(n-1)} = H(x-a)$ 微分的結果）

之一解爲

$$w_0(x) = \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} H(x-a)$$

$$\left(H(x-a) = \begin{cases} 1 & \text{當 } x > a \\ 0 & \text{當 } x \le a \end{cases} \right) \text{。}$$

證： 當 $n>1$ 時，$w_0(x)$ 在 $x=a$ 爲連續的於是由式(9)得

$$w_0'(x) = \begin{cases} \dfrac{(v-a)^{n-2}}{(n-2)!} & x > a \\ 0 & x < a \end{cases}$$

仿此，一般對 $0 \le k < n$ 時

$$w_0^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} & x > a \\ 0 & x < a \end{cases}$$

而當 $k = n$ 時

$$w_0^{(n)}(x) = \delta(x-a) \text{。}$$

因而方程式(17)的通解爲 $w_0 + P_{n-1}(x)$；$P_{n-1}(x)$ 是一次數爲 $n-1$ 的多項式。

換言之，方程式(17)的通解爲一普通函數，在 $x<a$ 及 $x>a$ 時它爲滿足 $w^{(n)}(x)=0$ 的一解。而在 $x=a$ 處此函數及其前 $n-2$ 階導函數皆爲連續函數，但其 $n-1$ 階導函數在 $x=a$ 處爲不連續，其跳躍爲 1。若 $n=1$ 則該函數本身在 $x=a$ 爲不連續，有一跳躍爲 1。

同樣對一般的微分方程：

$$P(u, x) \equiv \frac{d^n u}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + p_n(x)\, u = \delta(x-a) \tag{18}$$

其中 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 在點 $x=a$ 爲連續的函數，我們可得知其廣義函數解 $u(x)$ 在 $x>a$ 及 $x<a$ 時爲 $P(u, x)=0$ 之解，而其在 $x=a$ 時，函數 $u(x)$ 及其前 $n-2$ 階導函數皆爲連續的，但其 $n-1$ 階導函數在 $x=a$ 爲不連續並有一跳躍爲 1。

我們現將上面的理論結果用到下面一個弦振動方程的解。

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = F(t, x) \tag{19}$$

其中F爲加諸在兩端爲固定的弦對在點$x=\xi$所施的一個週期性的外彈力，其可表爲

$F(x,t)=\delta(x-t)e^{-iwt}$，$c$爲聲速

將

$$u(x,t)=v(x)e^{-iwt}$$

代入式(19)中得

$$v''(x)+k^2v(x)=\delta(x-\xi) \qquad (20)$$

其中 $k=\dfrac{w^2}{c^2}$

因此弦的兩端爲固定的，所以必需有

$$v(0)=v(1)=0 \qquad (21)$$

現我們要解的是具有邊界條件式(21)的方程式(20)，對$x<\xi$時，式(20)的解相應齊次方程

$$v''(x)+k^2v(x)=0$$

及具邊界條件$v(0)=0$的解，它爲

$$v(x)=\sin kx$$

對$x>\xi$時，式(20)的解滿足邊界條件$v(1)=0$的解是$v(x)=\sin k(1-x)$，即我們有

$$v(x)=\begin{cases} A\sin kx & x<\xi \\ B\sin k(1-x) & x>\xi \end{cases}$$

其中A，B爲兩常數，其等可由在點$x=\xi$的條件所定。

由於我們要求$v(x)$在$x=\xi$爲連續，但其第一階導函數在$x=\xi$不連續且有跳躍爲1，這些要求導致下列方程式：

$$A\sin k\xi-B\sin k(1-\xi)=0$$
$$-kA\cos k\xi-kB\cos k(1-\xi)=1$$

由此解得

$$A=-\frac{\sin k(1-\xi)}{kD}$$

$$B=-\frac{\sin k\xi}{kD}$$

$$\begin{aligned} D&=\sin k\xi\cos k(1-\xi)\\ &\quad+\sin k(1-\xi)\cos k\xi\\ &=\sin k \end{aligned}$$

於是

$$v=\begin{cases} -\dfrac{\sin kx\sin k(1-\xi)}{k\sin\xi}, & x<\xi \\ -\dfrac{\sin k(1-x)\sin k\xi}{k\sin\xi}, & x>\xi \end{cases}$$

8.結 論

δ-函數及一般廣義函數是爲了需要處理實際上的物理問題中的一些微分方程的困難而產生的。

在實際的理解上把一個廣義函數看作一個作用在某一特定（可視實際需要）的函數空間上的算子（operator）或一泛函，而此作用及相應的值是藉一個相應它的函數列及其極限的運算得出來的。又由於所相應的函數列的充分平滑性及具有限支撑性，使得微分、積分秩序具有可調性。於是我們可以很自然推得知廣義函數的導函數的意義及作用。從此我們可以用它們無疑慮地對幾乎任何一個微分方程式作微分的運算及作適當的表示，使得演算得以順利的進行，譬如我們可以對開頭導言中的方程式(2)作微分運算，立即可得到

$$L\frac{d^2I(t)}{dt^2}+R\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{c}I(t)$$
$$=E_0\,\delta(t)\ 。$$

至於多變數的廣義函數及在有界集（譬如一個圓周）上定義的廣義函數等方面系統性的理論也可作類似的討論，但我們不便在此作介紹。

（本文作者分別任職於美國海軍實驗室及美國佛羅里達大學統計系）