(2.王子俠來函)

編輯先生：

昨天收到你寄來的數播第十卷第一期，謝謝。裡面有卓世傑先生「$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$的推廣與$\sum \frac{1}{\sqrt[m]{n}}$的臆測」一文，我覺得相當有興趣。相信很多讀者都知道，原來的雙重不等式是Well known 的，例如在Nicholes D. Kazarinoff 的 *Geometric Inequalities* 一書的第14頁，就可以找到。其實原題的本意是在

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

三邊取Σ，用伸縮法(telescopic method)即得

$$2(\sqrt{b+1}-\sqrt{a})<\sum_{n=a}^{b}\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{b}-\sqrt{a-1})$$

。換句話說，在卓文的兩個例子中，當$\frac{1}{\sqrt{n}}$及$\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$之上、下界找出後，所給之和的上、下界立刻可以得到，不必每次重新寫出。至於他的臆測，並不難證明，但用歸納法看來是吃力不討好的。我下面給一個簡單的證明，只需要用要初等不等式中的Bernoulli's inequelity $1+nx\leqslant(1+x)^n$ ($x>-1$，n為自然數)的一個推廣(可以參見D. S. Mitinović 的 *Anelytic Inequalities* 一書第 34 頁)，這個推廣不等式的內容如下：

若$x>-1$，$x\neq 0$，則

$(1+x)^a>1+ax$

$(a>1$或$a<0)$ ………(1)

$(1+x)^a<1+ax$

$(0<a<1)$ ………(2)

我們用卓先生自己的方法，只要能證明

$$(1+\frac{m-1}{m}\cdot\frac{1}{n})^m>(1+\frac{1}{n})^{m-1} \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

則兩邊取$\frac{1}{m}$次冪，再乘以$n^{(m-1)/m}$便得

$$n^{(m-1)/m}+\frac{m-1}{m}\cdot n^{-1/m}$$

$$>(n+1)^{(m-1)/m}$$

亦即

$$\frac{m}{m-1}[\sqrt[m]{(n+1)^{m-1}}-\sqrt[m]{n^{m-1}}]$$

$$<\frac{1}{\sqrt[m]{n}}。$$

同樣地，若能證明

$$(1-\frac{m-1}{m}\cdot\frac{1}{n})^m>(1-\frac{1}{n})^{m-1} \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

則兩邊取$\frac{1}{m}$次冪，再乘以$n^{(m-1)/m}$便得

$$n^{(m-1)/m}-\frac{m-1}{m}\cdot n^{-1/m}>(n-1)^{(m-1)/m},$$

亦即

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n}}<\frac{m}{m-1}[\sqrt[m]{n^{m-1}}-\sqrt[m]{(n-1)^{m-1}}]$$

欲證(3)，只需在(1)中令

$$x=\frac{m-1}{mn}, \qquad a=\frac{m}{m-1}$$

再兩邊取$m-1$次冪即可。同樣地，欲證(4)，只需在(2)中令

$$x=-\frac{1}{n}, \qquad a=\frac{m-1}{m}$$

再兩邊取m次冪即可。

其次，我對卓先生的文章有幾點小小的意見：

1.在第120頁的第一行，右邊之$\sqrt{n}-1$係$\sqrt{n-1}$之誤。

2.在同頁的第一例，卓文說“…可知所求之和爲1800, 然而誤差爲0.02。”這個結論是不正確的，因爲用原來的雙重不等式，我們只能求出欲求之和的一個上、下界，或範圍（range），即欲求之和介於1800與1800.02之間。當然也可以說“若用1800來“估計”（Approximate）欲求之和，則誤差小於0.02”。同樣地，在“…求$\frac{1}{\sqrt{n}}$之法來泡製一番，求得$\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$。這句話的結尾也必須加上”之上、下界”這幾個字才算妥當。事實上，整個文章的精神也只是在求所給之和的上、下界，而非其值。

3.同頁右邊第四行之“i.e.”應改爲“另一方面”較妥。（因爲“i.e.”表示“that is”。）

4.在第119頁左邊之下方，卓先生對原來不等式的證法有“毫無創意性”的評語。事實上，在Kazarinoff一書中的證法也是如此，我不認爲（也未聽說）這方法有何不妥。當然，要用同樣的方法導出卓先生的推廣可能會比較困難，但這是另一回事。作一個數學家，要儘量摒除“武斷”和“偏見”，態度要客觀，對別人的證明最好不要作主觀的批評。因爲一個證明的優劣，往往是見人見智的。

因爲不知道卓先生手邊有無上面所提的參考書，故將所引之資料連同此信影印了一份，隨信附上，請轉交卓先生。耑此

順 祝

編 安

王 子 俠 草於滑鐵盧