數播信箱

(1.葉東進來函)

編輯部：

今天看到數播第十卷第一期P.119卓世傑先生一文「$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$的推廣與$\sum \frac{1}{\sqrt[m]{n}}$的臆測」。文中最後的臆測是正確的，而這個臆測本人曾在某期的科學教育月刊上撰文證明過，後來收錄在拙著「高中數學的教與學」一書裏，今特寄上該文，以爲卓文的回響。

敬 祝

編 安

葉 東 進 於新竹

從 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ 到 $(1+\frac{k}{k+1}\alpha)^{k+1}>(1+\alpha)^k$

楔子

六十三年聯考出現了一道這樣的問題：

利用不等式 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

估計 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10000}}$ 的值。

有些人不免疑惑：這個不等式是怎麼來的？

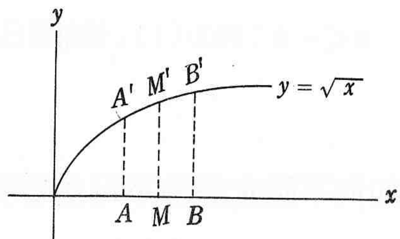
底下試著分析：

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}<\sqrt{n}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{2}<\sqrt{n}<\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}$$

考慮函數 $y=\sqrt{x}$ 的圖形：



圖一

在 x 軸上取點 A，M，B，其坐標分別是 $n-1$，n，$n+1$，並令其在函數 $y=\sqrt{x}$ 的像

點分別是 A'，M'，B'，則有

$$\overline{AA'}=\sqrt{n-1}\,,\ \overline{MM'}=\sqrt{n}\,,$$
$$\overline{BB'}=\sqrt{n+1}\,,$$

及梯形 $AMM'A'$，$MBB'M'$ 的中線分別是

$$\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{2}\ \text{與}\ \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}$$

由 $y=\sqrt{x}$ 遞增，知

$$\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{2}<\overline{MM'}$$
$$=(\sqrt{n})<\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}$$

上面的分析，顯示一件事情：

一形一數之間可能有某種關係

在一本有關國際數學競試集（註）上，看到這樣的問題：

$$\text{求}\quad \frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{1,000,000}}\quad \text{的和}$$

解答裏，它利用底下不等式：

$$\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right]<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$
$$<\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right]$$

仔細觀察，便可發現這個不等式與前述的不等式在型式上有某種相似處，因而聯想歸納：

$$\frac{k+1}{k}\left[\sqrt[k+1]{(n+1)^k}-\sqrt[k+1]{n^k}\right]$$
$$<\frac{1}{\sqrt[k+1]{n}}<\frac{k+1}{k}\left[\sqrt[k+1]{n^k}-\sqrt[k+1]{(n-1)^k}\right]$$

並臆測對一般的正整數 k，它均成立。

上面的敍述是要顯示另一件事情：觀察、聯想歸納、臆測是數學的一種方法。

本　題

把上面臆測的不等式作如下的分析：

$$\frac{k+1}{k}\left[\sqrt[k+1]{(n+1)^k}-\sqrt[k+1]{n^k}\right]$$
$$<\frac{1}{\sqrt[k+1]{n}}<\frac{k+1}{k}\left[\sqrt[k+1]{n^k}\right.$$
$$\left.-\sqrt[k+1]{(n-1)^k}\right]$$

$$\Longleftrightarrow\ \sqrt[k+1]{(n+1)^k}-\sqrt[k+1]{n^k}<$$
$$\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[k+1]{n}}<\sqrt[k+1]{n^k}-\sqrt[k+1]{(n-1)^k}$$

$$\Longleftrightarrow\ \sqrt[k+1]{n^k}+\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[k+1]{n}}>\sqrt[k+1]{(n+1)^k}$$

$$\text{且}\quad \sqrt[k+1]{n^k}-\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[k+1]{n}}>\sqrt[k+1]{(n-1)^k}$$

（兩邊除以 $\sqrt[k+1]{n^k}$）

$$\Longleftrightarrow\ 1+\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{k}{k+1}}\ \text{且}$$
$$1-\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{n}>\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{k}{k+1}}$$

$$\Longleftrightarrow\ \left(1+\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{n}\right)^{k+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\ \text{且}$$
$$\left(1-\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{n}\right)^{k+1}>\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$$

因此如果證明了

$$\left(1+\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{n}\right)^{k+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^k$$
$$\left(1-\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{n}\right)^{k+1}>\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$$

便就證明了原先的臆測是正確的。

這裡，我們要證明的是更一般的情形：

$$\left(1+\frac{k}{k+1}\cdot\alpha\right)^{k+1}>(1+\alpha)^k$$

其中　$\alpha\neq 0$，$1+\alpha>0$，$k\in N$

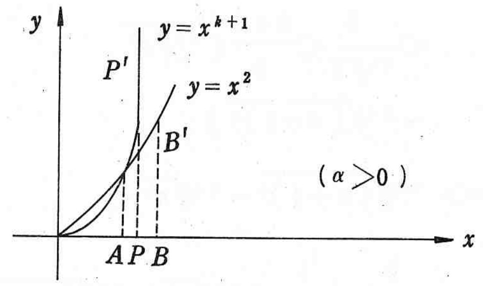
證明中，我們仍賴形數之間的關係來處理：

考慮函數 $f_n(x)=x^n$ ，$n\in N$

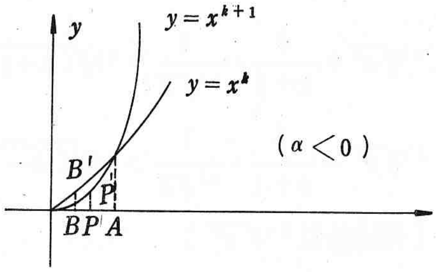
分別取 $n=k$ 及 $n=k+1$ ，得函數

$$f_k(x)=x^k \quad 及 \quad f_{k+1}(x)=x^{k+1}$$

在第一象限的圖形如下：



圖二



圖三

在 x 軸取兩點 A，B 其坐標分別為 1 及 $1+\alpha$（如果 $\alpha>0$，見圖二；如果 $\alpha<0$，見圖三），又考慮線段 AB 上的分點 P，$\overline{PA}:\overline{PB}=k:1$ 及 P 在函數 $y=x^{k+1}$ 的像點 P'，則 P 的坐標為

$$\frac{k(1+\alpha)+1}{k+1}=1+\frac{k}{k+1}\alpha$$

而得

$$\overline{PP'}=\left(1+\frac{k}{k+1}\alpha\right)^{k+1}$$

及 $\overline{BB'}=(1+\alpha)^k$

我們將先證明：對任意正整數 k，恒有 $\overline{PP'}\not\leq\overline{BB}$

證明：$\overline{PP'}\leq\overline{BB'}$

$$\Longleftrightarrow \left(1+\frac{k}{k+1}\alpha\right)^{k+1}\leq(1+\alpha)^k \qquad (1+\alpha>0)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{k\beta+1}{k+1}\right)^{k+1}\leq\beta^k \quad （取 1+\alpha=\beta）$$

$$\Longleftrightarrow \frac{k\beta+1}{k+1}\leq\beta^{\frac{k}{k+1}}$$

$$\Longleftrightarrow h\beta+1-h\leq\beta^h$$

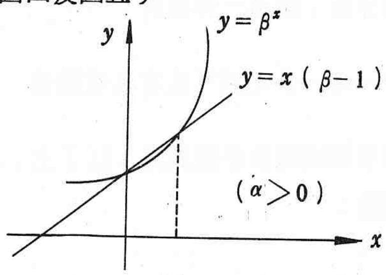
$$（取\frac{k}{k+1}=h，則 0<h<1）$$

由上面的分析，知 h 是不等式：

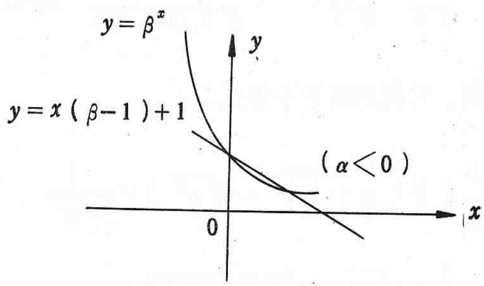
$$x(\beta-1)+1\leq\beta^x \quad 的一個正數解$$

但是相關曲線 $y=x(\beta-1)+1$ 與 $y=\beta^x$ 僅有兩個交點 $(0,1)$ 及 $(1,\beta)$。

因而 $x(\beta-1)+1\leq\beta^x$ 的正數解是 $x>1$（見圖四及圖五）



圖四



圖五

由於 $0<h<1$ 便因此產生了矛盾。

故有 $\overline{PP'}>\overline{BB'}$

即 $\left(1+\frac{k}{k+1}\alpha\right)^{x+1}>(1+\alpha)^k$

後 記

在面對 $\left(1+\frac{k}{k+1}\alpha\right)^{k+1}>(1+\alpha)^k$ 的證明這件事時，起初一直想用代數的方法來處理，先考慮到如果是 $\alpha>0$ 的話，那麼利用

二項式定理將不等式兩邊分別展開比較應該可以證得，事實是如此；但是當 $\alpha<0$ 時，證明上却遭遇了困難，無法突破。之後，才有前面利用形數關係的證明的產生。在此，不妨也把剛剛所提的代數的方法的證明一併寫出，比較之後，也足以顯示形數關係的運用的威力。

展開

$$\left(1+\frac{k}{k+1}\alpha\right)^{k+1}$$

$$=1+C_1^{k+1}\frac{k}{k+1}\alpha+C_2^{k+1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\alpha^2$$

$$+\cdots+C_{k+1}^{k+1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\alpha^{k+1}$$

$$(1+\alpha)^k=1+C_1^k\alpha+C_2^k\alpha^2+\cdots+C_k^k\alpha^k$$

其中 $\alpha>0$

由底下的分析：

$$C_r^{k+1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^r\geq C_r^k$$

$$<=> \frac{(k+1)!}{r!(k+1-r)!}\cdot\frac{k^r}{(k+1)^r}$$

$$\geq\frac{k!}{r!(k-r)!}$$

$$<=> k^r\geq(k+1)^r-r(k+1)^{r-1}$$

$$<=> (rC_1^{r-1}-C_2^r)k^{r-2}+(rC_2^{r-1}$$

$$-C_3^r)k^{r-3}+\cdots+(rC_{r-1}^{r-1}C_r^r)\geq 0$$

及

$$rC_m^{r-1}-C_{m+1}^r\geq 0$$

$$<=> r\cdot\frac{(r-1)!}{m!(r-1-m)!}$$

$$\geq\frac{r!}{(m+1)!(r-m-1)!}$$

$$<=> m!\leq(m+1)!$$

知 $\left(1+\frac{k}{k+1}\alpha\right)^{k+1}>(1+\alpha)^k$

其中 $\alpha>0$