一個三角恆等式的推廣

陳獻平

在高中基礎數學課程裏，簡易三角恆等式中常出現這類恆等式：

$$4\cos\theta\ \cos(60^\circ+\theta)\cos(60^\circ-\theta)=\cos 3\theta$$

和

$$4\sin\theta\sin(60^\circ+\theta)\sin(60^\circ-\theta)=\sin 3\theta$$

以及求值

$$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$$

或 $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$

等等的計算。本文的目的是將這些常見的演習題加以有系統的歸納與分析整理出一個有規則的恆等式來。

首先看一些例子：

例1： $4\cos\theta\cos(60^\circ+\theta)\cos(60^\circ-\theta)=\cos 3\theta$

由積化和差公式，

$$\begin{aligned}\text{左式}&=4\cos\theta\,[\cos^2 60^\circ-\sin^2\theta]\\&=4\cos\theta\,[\cos^2\theta-\sin^2 60^\circ]\\&=\cos\theta\,[4\cos^2\theta-3]\\&=4\cos^3\theta-3\cos\theta\\&=\cos 3\theta\end{aligned}$$

又

$$4\sin\theta\sin(\theta+60^\circ)\sin(60^\circ-\theta)=\sin 3\theta$$

$$\begin{aligned}\text{由左式}&=4\sin\theta\,(\sin^2 60^\circ-\sin^2\theta)\\&=\sin\theta\,(3-4\sin^2\theta)\\&=3\sin\theta-4\sin^3\theta\\&=\sin 3\theta\end{aligned}$$

將上二式換個寫法即

$$4\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos 3\theta$$

$$4\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin 3\theta$$

例2： $8\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{4}\right)\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned}&=8\cos\theta\sin\theta\cdot\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\\&=4\sin 2\theta\cdot\left[\cos^2\theta-\sin^2\frac{\pi}{4}\right]\\&=2\sin 2\theta\,[2\cos^2\theta-1]\\&=2\sin 2\theta\cdot\cos 2\theta\\&=\sin 4\theta\end{aligned}$$

$$8\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{4}\right)\sin\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$=8\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(-\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2\sin 2\theta\,(1-2\sin^2\theta)$$
$$=2\sin 2\theta\cos 2\theta$$
$$=\sin 4\theta$$

例3： $16\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{5}\right)\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)$

$$=16\cos\theta\left[\cos^2\theta-\sin^2\frac{\pi}{5}\right]\cdot\left[\cos^2\theta-\sin^2\frac{2\pi}{5}\right]$$
$$=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta$$

又如

$$(6\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{3\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)$$
$$=16\sin\theta\left(\sin^2\theta-\sin^2\frac{\pi}{5}\right)\cdot\left(\sin^2\theta-\sin^2\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$=16\sin\theta\left[\sin^4\theta-\frac{10}{8}\sin^2\theta+\frac{5}{16}\right]$$
$$=16\sin^5\theta-10\sin^3\theta+5\sin\theta$$

再由棣美弗定理及二項式定理：

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^5$$
$$=\cos 5\theta+i\sin 5\theta$$
$$=\cos^5+5\cos^4\theta\sin\theta\, i$$
$$-10\cos^3\theta\sin^2\theta$$
$$-10\cos^2\theta\sin^3\theta\, i$$
$$+5\cos\theta\sin^4\theta+\sin^5\theta\, i$$

比較前式及實部、虛部的相等可得

$$16\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)\cdot\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{5}\right)\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)$$
$$=\cos 5\theta$$
$$16\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)\cdot\sin\left(\theta+\frac{3\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)$$
$$=\sin 6\theta$$

例4： $32\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{6}\right)\sin\left(\theta+\frac{3\pi}{6}\right)\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{6}\right)\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)$

$$=32\sin\theta\cdot\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\right]\cdot\left[\sin\left(\frac{2\pi}{6}+\theta\right)\sin\left(\frac{2\pi}{6}-\theta\right)\right]\cdot\cos\theta$$
$$=32\sin\theta\cdot\left(\sin^2\frac{\pi}{6}-\sin^2\theta\right)\cdot\left(\sin^2\frac{\pi}{3}-\sin^2\theta\right)\cdot\cos\theta$$
$$=16\sin^2\theta\left(\frac{1}{4}-\sin^2\theta\right)\left(\frac{3}{4}-\right.$$

$\sin^2\theta$)

$= 2\sin\theta\cdot\cos\theta(3-4\cos^2\theta)$

$\cdot(4\sin^2\theta-3)$

$= 2\sin 3\theta\cdot\cos 3\theta$

$= \sin 6\theta$

又

$$32\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{6}\right)\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{6}\right)\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{6}\right)\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$=-32\cos\theta\sin\theta\cdot\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right]\cdot\left[\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{6}\right)\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{6}\right)\right]$$

$$=-32\cos\theta\sin\theta\left[\cos^2\frac{\pi}{6}-\sin^2\theta\right]\cdot\left[\cos^2\frac{2\pi}{6}-\sin^2\theta\right]$$

$$=-2\left[3\sin\theta-4\sin^3\theta\right]\cdot\left[4\cos^3\theta-3\cos\theta\right]$$

$$=-2\sin 3\theta\cdot\cos 3\theta$$

$$=-\sin 6\theta。$$

以上這些演算的目的，是想歸納出下列兩個乘積的結果：

設

$$p_n=2^{n-1}\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{n}\right)\cdots\cdots\cos\left(\theta+\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

$$q_n=2^{n-1}\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\sin\left(\theta+\frac{3\pi}{n}\right)\cdots\cdots\sin\left(\theta+\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

經由前面少數特例的結果：

$p_1=\cos\theta$， $p_2=-\sin 2\theta$

$p_3=-\cos 3\theta$，$p_4=\sin 4\theta$

$p_5=\cos 5\theta$， $p_6=-\sin 6\theta$

$q_1=\sin\theta$， $q_2=\sin 2\theta$

$q_3=\sin 3\theta$， $q_4=\sin 4\theta$

$q_5=\sin 5\theta$， $q_6=\sin 6\theta$

是否有 $p_{4k+1}=\cos(4k+1)\theta$， $k\geqslant 0$

$p_{4k+2}=-\sin(4k+2)\theta$

$p_{4k+3}=-\cos(4k+3)\theta$

$p_{4k+4}=\sin(4k+4)\theta$

及 $q_n=\sin n\theta$ 的結果呢？

這個答案是肯定的，下面用到二項式定理及棣美弗定理，以及方程式中根與係數關係等性質就可證明這種推測是正確的。

定理 1： $n=2k$ 時，$q_n=\sin n\theta$，

$$p_n=(-1)^{\frac{n}{2}}\sin n\theta。$$

證明：由二項式及棣美弗定理知：

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

$=\cos n\theta+i\sin\theta$

$=[C_0^n\cos^n\theta-C_2^n\cos^{n-2}\sin^2\theta$

$+C_4^n\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots\cdots$

$+(-1)^{\frac{n}{2}}\cos^n n\sin^n\theta]$

$+i[C_1^n\cos^{n-1}\theta\sin\theta$

$-C_3^n\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta$

$+C_5^n\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots\cdots$

$+(-1)^{\frac{n}{2}-1}\cos\theta\sin^{n-1}\theta]$

(A)比較虛部得：

$\sin n\theta=\cos\theta[C_1^n\cos^{n-2}\theta\sin\theta$

$$- C_3^n \cos^{n-4} \sin^3\theta$$
$$+ C_5^n \cos^{n-6}\theta \sin^5\theta - \cdots\cdots$$
$$+ (-1)^{\frac{n}{2}-1} \sin^{n-1}\theta \,]$$
$$= \cos\theta [C_1^{2k} (1-\sin^2\theta)^{k-1} \sin\theta$$
$$- C_3^{2k} (1-\sin^2\theta)^{k-2} \sin^3\theta$$
$$+ C_5^{2k} (1-\sin^2\theta)^{k-3} \sin^5\theta$$
$$- \cdots + (-1)^{k-1} C_{2k-1}^{2k} \sin^{2k-1}\theta]$$

$$\Rightarrow \frac{\sin n\theta}{\cos\theta} = (-1)^{k-1} (C_1^{2k} + C_3^{2k}$$
$$+ C_5^{2k} + \cdots + C_{2k-1}^{2k}) \sin^{2k-1}\theta$$
$$+ \cdots + (-1) (C_1^{2k} C_1^{k-1}$$
$$+ C_3^{2k} C_0^{k-2}) \sin^3\theta$$
$$+ \sin\theta \cdot C_1^{2k}$$
$$= (-1)^{k-1} \cdot 2^{n-1} \sin^{n-1}\theta$$
$$+ \cdots + (- C_1^{2k} C_1^{k-1}$$
$$- C_3^{2k} C_0^{k-2}) \sin^3\theta$$
$$+ n \sin\theta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

上式左爲 $\sin\theta$ 之 $n-1$ 次多項式，令 $\sin\theta = x$，則①式爲

$$\frac{\sin n\theta}{\cos\theta} = (-1)^{\frac{n}{2}-1} 2^{n-1} x^{n-1} + \cdots + nx$$

而此多項方程式

$$(-1)^{\frac{n}{2}-1} 2^{n-1} x^{n-1} + \cdots + nx = 0$$

有 $x = \pm\sin\frac{\pi}{2k}, +\sin\frac{2\pi}{2k}, \cdots \pm\sin\frac{k-1}{2k}\pi$

及 $\sin\frac{2k}{2k}\pi$ 之 $n-1$ 個相異根。

$$\therefore \frac{\sin n\theta}{\cos\theta} = (-1)^{k-1} 2^{n-1} (\sin\theta$$
$$- \sin\frac{\pi}{2k}) (\sin\theta - \sin\frac{2\pi}{2k})$$
$$\cdot (\sin\theta - \sin\frac{3\pi}{2k}) \cdots$$
$$\cdots (\sin\theta - \frac{k-1}{2k}\pi)$$
$$\cdot (\sin\theta - 0)$$
$$\cdot (\sin\theta + \sin\frac{\pi}{2k})$$
$$\cdot (\sin\theta + \sin\frac{2\pi}{2k}) \cdots$$
$$\cdots (\sin\theta + \frac{k-1}{2k}\pi) \quad \cdots\cdots ②$$

又 $2^{n-1} \sin\theta \sin(\theta + \frac{\pi}{n}) \sin(\theta + \frac{2\pi}{n})$

$$\cdot \sin(\theta + \frac{3\pi}{n}) \cdots \sin(\theta + \frac{k-1}{n}\pi)$$
$$\cdot \sin(\theta + \frac{k\pi}{n}) \sin(\theta + \frac{k+1}{n}\pi)$$
$$\cdots \sin(\theta + \frac{n-1}{n}\pi)$$
$$= (-1)^{k-1} 2^{n-1} \sin\theta \cos\theta \sin(\theta$$
$$+ \frac{\pi}{n}) \sin(\theta + \frac{2\pi}{n}) \sin(\theta + \frac{3\pi}{n})$$
$$\cdots \sin(\theta + \frac{k-1}{n}\pi) \sin(\theta - \frac{k-1}{n}\pi)$$
$$\cdots \sin(\theta - \frac{k-2}{n}\pi) \cdots \sin(\theta - \frac{\pi}{n})$$
$$= (-1)^{k-1} 2^{n-1} \sin\theta \cos\theta (\sin\theta$$
$$- \sin\frac{\pi}{n}) (\sin\theta + \sin\frac{\pi}{n})$$
$$\cdot (\sin\theta - \sin\frac{2\pi}{n}) (\sin\theta + \sin\frac{2\pi}{n})$$
$$\cdots (\sin\theta - \sin\frac{k-1}{n}\pi)$$
$$\cdot (\sin\theta + \sin\frac{k-1}{n}\pi) \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

上式中，利用

$$\sin(A+B) \sin(A-B)$$
$$= \sin^2 A - \sin^2 B$$
$$= (\sin A + \sin B) (\sin A - \sin B)$$

比較②式及③式知

$$\sin n\theta = 2^{n-1} \sin\theta \sin(\theta + \frac{\pi}{n})$$

$$\cdot \sin\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\cdots$$

$$\cdots \sin\left(\theta+\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

$$= q_{2k}$$

$$= q_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

(B)比較實部得：

$$\begin{aligned}\cos 2k\theta &= \cos n\theta \\ &= C_0^{2k}\cos^{2k}\theta \\ &\quad - C_2^{2k}\cos^{2k-2}\theta\sin^2\theta \\ &\quad + C_4^{2k}\cos^{2k-4}\theta\sin^4\theta \\ &\quad +\cdots+(-1)^k C_{2k}^{2k}\sin^{2k}\theta \\ &= C_0^{2k}\cos^{2k}\theta \\ &\quad - C_2^{2k}\cos^{2k-2}\theta(1-\cos^2\theta) \\ &\quad + C_4^{2k}\cos^{2k-4}\theta(1-\cos^2\theta)^2 \\ &\quad -\cdots+(-1)^k C_{2k}^{2k}(1 \\ &\quad -\cos^2\theta)^k \\ &= (C_0^{2k}+C_2^{2k}+C_4^{2k}+\cdots \\ &\quad + C_{2k}^{2k})\cos^{2k}\theta+\cdots \\ &\quad +(-1)^k \\ &= 2^{2k-1}\cos^{2k}\theta+\cdots+(-1)^k \\ &= 2^{n-1}\cos^n\theta+\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}}\end{aligned}$$

上式為 $\cos\theta$ 的 n 次整係數多項式，而此多項式方程式：

$$2^{n-1}\cos^n\theta+\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}} = \cos 2k\theta = 0$$

有 n 個相異根（非同界角解），即

$$\theta=\frac{\pi}{2n},\ \frac{3\pi}{2n},\ \frac{5\pi}{2n},\ \cdots\frac{n-1}{2n}\pi,$$

$$\frac{n+1}{2n}\pi,\ \cdots,\ \frac{2n-1}{2n}\pi。$$

亦即

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \cos 2k\theta \\ &= 2^{n-1}\left(\cos\theta-\cos\frac{\pi}{2n}\right) \\ &\quad \cdot\left(\cos\theta-\cos\frac{3\pi}{2n}\right) \\ &\quad \cdot\left(\cos\theta-\cos\frac{5\pi}{2n}\right) \\ &\quad \cdots\left(\cos\theta-\cos\frac{n-1}{2n}\pi\right) \\ &\quad \cdot\left(\cos\theta-\cos\frac{n+1}{2n}\pi\right) \\ &\quad \cdot\left(\cos\theta-\cos\frac{n+3}{2n}\pi\right) \\ &\quad \cdots\left(\cos\theta-\cos\frac{2n-1}{2n}\pi\right) \\ &= 2^{n-1}\left(\cos\theta-\sin\frac{n-1}{2n}\pi\right) \\ &\quad \cdot\left(\cos\theta-\sin\frac{n-3}{2n}\pi\right) \\ &\quad \cdot\left(\cos\theta-\sin\frac{n-5}{2n}\pi\right) \\ &\quad \cdots\left(\cos\theta-\sin\frac{3\pi}{2n}\right) \\ &\quad \cdot\left(\cos\theta-\sin\frac{\pi}{2n}\right) \\ &\quad \cdot\left(\cos\theta-\sin\frac{\pi}{2n}\right) \\ &\quad \cdot\left(\cos\theta+\sin\frac{3\pi}{2n}\right) \\ &\quad \cdot\left(\cos\theta+\sin\frac{5\pi}{2n}\right)\cdots \\ &\quad \cdot\left(\cos\theta+\sin\frac{n-3}{2n}\pi\right. \\ &\quad \cdot\left(\cos\theta+\sin\frac{n-1}{2n}\pi\right. \\ &= 2^{n-1}\left(\cos^2\theta-\sin^2\frac{\pi}{n}\right. \\ &\quad \cdot\left(\cos^2\theta-\sin^2\frac{3\pi}{2n}\right) \\ &\quad \cdot\left(\cos^2\theta-\sin^2\frac{5\pi}{2n}\right)\end{aligned}$$

$$\cdots\left(\cos^2\theta-\sin^2\frac{n-3}{2n}\pi\right)$$

$$\cdot\left(\cos^2\theta-\sin^2\frac{n-1}{2n}\pi\right)$$

$$=2^{n-1}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2\pi}\right)\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{2n}\right)\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{2n}\right)\cdots$$

$$\cdots\cos\left(\theta+\frac{n-3}{2n}\pi\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{n-1}{2n}\pi\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta-\frac{3\pi}{2n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta-\frac{5\pi}{2n}\right)\cdots$$

$$\cdots\cos\left(\theta-\frac{n-3}{2n}\pi\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta-\frac{n-1}{2n}\pi\right)$$

$$=2^{n-1}(-1)^k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{2n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{2n}\right)$$

$$\cdots\cos\left(\theta+\frac{n-3}{2n}\pi\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{n-1}{2n}\pi\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{2n-1}{2n}\pi\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{2n-3}{2n}\pi\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{2n-5}{2n}\pi\right)\cdots$$

$$\cdots\cos\left(\theta+\frac{n+3}{2n}\pi\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{n+1}{2n}\pi\right)$$

$$=(-1)^k 2^{n-1}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{2n}\right)\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{2n}\right)$$

$$\cdots\cos\left(\theta+\frac{n-1}{2n}\pi\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{n+1}{2n}\pi\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{n+3}{2n}\pi\right)\cdots$$

$$\cdots\cos\left(\theta+\frac{2n-3}{2n}\pi\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{2n-1}{2n}\pi\right)$$

$\therefore n=2k$ 時

$$2^{n-1}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2n}\right)\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{2n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{2n}\right)\cdots\cos\left(\theta+\frac{n-1}{2n}\pi\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{n+1}{2n}\pi\right)\cdots\cos\left(\theta+\frac{2n-1}{2n}\pi\right)$$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}}\cos n\theta \quad\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

若以 $\theta+\frac{\pi}{2n}$ 代換⑤式中的 θ，則得

$$\cos n\left(\theta+\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$=\cos\left(n\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin n\theta$$

$$=-\sin 2k\theta$$

$$=(-1)^k 2^{n-1}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\cdot \cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{n}\right)$$

$$\cdots\cos\left(\theta+\frac{k-1}{n}\pi\right)\cos\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\cdot \cos\left(\theta+\frac{k+1}{n}\pi\right)$$

$$\cdot \cos\left(\theta+\frac{k+2}{n}\pi\right)$$

$$\cdots\cos\left(\theta+\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

$$\cdot \cos\left(\theta+\frac{n\pi}{n}\right)$$

即

$$2^{n-1}\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\cdot \cos\left(\theta+\frac{3\pi}{n}\right)\cdots\cos\left(\theta+\frac{k-1}{n}\pi\right)$$

$$\cdot \cos\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right)\cos\left(\theta+\frac{k+1}{n}\pi\right)$$

$$\cdots\cos\left(\theta+\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

$$=(-1)^k\sin n\theta$$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}}\sin n\theta$$

上面計算過程中用到

$$\cos^2A-\sin^2B$$
$$=\cos(A+B)\cos(A-B)$$
$$=(\cos^2A+\sin B)(\cos A-\sin B)。$$

定理2： $n=2k+1$ 時

$$p_n=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos n\theta\ ,\ q_n=\sin n\theta$$

證明： 由 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

$$=\cos n\theta+i\sin n\theta$$
$$=(C_0^{2k+1}\cos^{2k+1}\theta$$
$$-C_2^{2k+1}\cos^{2k-1}\theta\sin^2\theta$$
$$+C_4^{2k+1}\cos^{2k-3}\theta\sin^4\theta-\cdots$$
$$+(-1)^k C_{2k}^{2k+1}\cos\theta\sin^{2k}\theta)$$
$$+i\,[\,C_1^{2k+1}\cos^{2k}\theta\sin\theta$$
$$-C_3^{2k+1}\cos^{2k+1}\sin^3\theta$$
$$+C_5^{2k+1}\cos^{2k-4}\theta\sin^5\theta-\cdots$$
$$+(-1)^{k-1}\cos^2\theta\sin^{2k-1}\theta]$$

(A)比較虛部得：

$$\sin n\theta=\sin(2k+1)\theta$$
$$=C_1^{2k+1}\sin\theta(1-\sin^2\theta)^k$$
$$-C_3^{2k+1}\sin^3\theta(1-\sin^2\theta)^{k-1}$$
$$+\cdots+(-1)^kC_{2k+1}^{2k+1}\sin^{2k+1}\theta$$
$$=(-1)^k[\,C_1^{2k+1}+C_3^{3k+1}$$
$$+C_5^{2k+1}+\cdots+C_{2k+1}^{2k+1}\,]\sin^{2k+1}\theta$$
$$+\cdots+(-C_1^{2k+1}-C_3^{2k+1})\sin^3\theta$$
$$+C_1^{2k+1}\sin\theta$$
$$=(-1)^k\,2^{n-1}\sin^n\theta+\cdots$$
$$+(-C_1^n-C_3^n)\sin^3\theta$$
$$+n\sin\theta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots⑥$$

上式爲 $\sin\theta$ 之 n 次多項式，而方程式 $\sin n\theta=0$ 的 n 根爲

$$\theta=\pm\frac{\pi}{n},\pm\frac{2\pi}{n},\pm\frac{3\pi}{n},\cdots\pm\frac{k\pi}{n},0,$$

$$k=\frac{n-1}{2}$$ （此 n 根非同界角且相異）

即 $\pm\sin\frac{\pi}{n},\ \sin\frac{2\pi}{n},\cdots,\pm\sin\frac{k\pi}{n},$

$\sin\pi$ 爲方程式

$$(-1)^k2^{n-1}x^n+\cdots+(-C_1^n-C_3^n)x^3$$
$$+nx=0$$ 之 n 個相異根。

故 $\sin n\theta=(-1)^k2^{n-1}\sin^n\theta+\cdots$

$$+n\sin\theta$$
$$=(-1)^k2^{n-1}(\sin\theta-0)$$
$$\cdot\left(\sin\theta-\sin\frac{\pi}{n}\right)$$
$$\cdot\left(\sin\theta-\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$
$$\cdots\left(\sin\theta-\sin\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\cdot(\sin\theta+\sin\frac{\pi}{n})\cdots$$
$$\cdots(\sin\theta+\sin\frac{k\pi}{n})$$
$$=(-1)^k2^{n-1}\sin\theta\sin(\theta+\frac{\pi}{n})\sin(\theta-\frac{\pi}{n})$$
$$\cdot\sin(\theta+\frac{2\pi}{n})\sin(\theta-\frac{2\pi}{n})\cdots\sin(\theta+\frac{k\pi}{n})$$
$$\cdot\sin(\theta-\frac{k\pi}{n})$$
$$=(-1)^k2^{n-1}\sin\theta\sin(\theta+\frac{\pi}{n})\sin(\theta+\frac{2\pi}{n})\cdots$$
$$\cdots\sin(\theta+\frac{k\pi}{n})$$
$$\cdot\sin(\theta-\frac{\pi}{n})$$
$$\cdot\sin(\theta-\frac{2\pi}{n})$$
$$\cdots\sin(\theta-\frac{k\pi}{n})$$
$$=(-1)^k2^{n-1}\sin\theta\sin(\theta+\frac{\pi}{n})\sin(\theta+\frac{2\pi}{n})$$
$$\cdots\sin(\theta+\frac{k\pi}{n})$$
$$\cdot[-\sin(\theta+\pi-\frac{\pi}{n}]$$
$$\cdot[-\sin(\theta+\pi-\frac{2\pi}{n})]$$
$$\cdots[-\sin(\theta+\pi-\frac{k\pi}{n})]$$
$$=2^{n-1}\sin\theta\sin(\theta+\frac{\pi}{n})$$
$$\cdot\sin(\theta+\frac{2\pi}{n})$$
$$\cdot\sin(\theta+\frac{3\pi}{n})\cdots$$
$$\cdots\sin(\theta+\frac{k\pi}{n})$$
$$\cdot\sin(\theta+\frac{n-1}{n}\pi)$$
$$\cdot\sin(\theta+\frac{n-2}{n}\pi)\cdots$$
$$\cdots\sin(\theta+\frac{k+1}{n}\pi)$$
$$=2^{n-1}\sin\theta\sin(\theta+\frac{\pi}{n})$$
$$\cdot\sin(\theta+\frac{2\pi}{n})\cdots$$
$$\cdots\sin(\theta+\frac{k\pi}{n})$$
$$\cdot\sin(\theta+\frac{k+1}{n}\pi)\cdots$$
$$\cdots\sin(\theta+\frac{n-2}{n}\pi)$$
$$\cdot\sin(\theta+\frac{n-1}{n}\pi)\cdots\cdots⑦$$
$$=q_{2k+1}$$
$$=q_n$$

(B)比較實部得：

$$\cos n\theta=\cos(2k+1)\theta$$
$$=C_0^{2k+1}\cos^{2k+1}\theta$$
$$-C_2^{2k+1}\cos^{2k-1}\theta\sin^2\theta$$
$$+C_4^{2k+1}\cos^{2k-3}\theta\sin^4\theta-\cdots$$
$$+(-1)^kC_{2k}^{2k+1}\cos\theta\sin^{2k}\theta$$
$$=C_0^{2k+1}\cos^{2k+1}\theta$$
$$-C_2^{2k+1}\cos^{2k-1}\theta(1-\cos^3\theta)$$
$$+C_4^{2k+1}\cos^{2k-3}\theta(1-\cos^2\theta)^2$$
$$+\cdots+(-1)^kC_{2k}^{2k+1}\cos\theta(1-\cos^2\theta)^k$$
$$=(C_0^{2k+1}+C_2^{2k+1}+C_4^{2k+1}+\cdots+C_{2k}^{2k+1})\cos^{2k+1}\theta$$
$$+\cdots+(-1)^kC_{2k}^{2k+1}\cos\theta$$

$$= 2^{n-1}\cos^n\theta + \cdots$$

$$+ (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\cos\theta \quad \cdots\cdots⑧$$

$\therefore \cos n\theta$ 爲 $\cos\theta$ 的 n 次整係數多項式。

而 $\cos n\theta = 0$ 的 n 個相異非同界角根爲

$$\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n}, \cdots, \frac{2n-1}{2n}\pi \text{。}$$

如令 $\cos\theta = x$

則 $2^{n-1}x^n + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} nx = 0$

有 n 個相異根爲

$$\cos\frac{\pi}{2n}, \cos\frac{3\pi}{2n}, \cos\frac{5\pi}{2n}, \cdots, \cos\frac{2n-1}{2n}\pi \text{。}$$

$$\therefore \cos n\theta = 2^{n-1}\left(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$\cdot\left(\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{2n}\right)$$

$$\cdot\left(\cos\theta - \cos\frac{5\pi}{2n}\right)$$

$$\cdots\left(\cos\theta - \cos\frac{2n-1}{2n}\pi\right)$$

$$= 2^{n-1}\cos\theta\left(\cos\theta - \sin\frac{n-1}{2n}\pi\right)$$

$$\cdot\left(\cos\theta - \sin\frac{n-3}{2n}\pi\right)$$

$$\cdot\left(\cos\theta - \sin\frac{n-5}{2n}\pi\right)\cdots$$

$$\cdots\left[\cos\theta - \sin\frac{2\pi}{2n}\right]$$

$$\cdot\left[\cos\theta + \sin\frac{2\pi}{2n}\right]$$

$$\cdot\left[\cos\theta + \sin\frac{4\pi}{2n}\right]$$

$$\cdots\left[\cos\theta + \sin\frac{n-3}{2n}\pi\right]$$

$$\cdot\left[\cos\theta + \sin\frac{n-1}{2n}\pi\right]$$

$$= 2^{n-1}\cos\theta\left(\cos\theta - \sin\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\left(\cos\theta - \sin\frac{k-1}{n}\pi\right)$$

$$\cdot\left(\cos\theta - \sin\frac{k-2}{n}\pi\right)\cdots$$

$$\cdots\left(\cos\theta - \sin\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\left(\cos\theta + \sin\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\left(\cos\theta + \sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\left(\cos\theta + \sin\frac{3\pi}{n}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(\cos\theta + \sin\frac{k-1}{n}\pi\right)$$

$$\cdot\left(\cos\theta + \sin\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$= 2^{n-1}\cos\theta\cos\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta - \frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta + \frac{k-1}{n}\pi\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta - \frac{k-1}{n}\pi\right)\cdots$$

$$\cdots\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right)$$

$$= 2^{n-1}\cos\theta\cos\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{n}\right)\cdots$$

$$\cdots\cos\left(\theta+\frac{k-1}{n}\pi\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta-\frac{3\pi}{n}\right)\cdots$$

$$\cdots\cos\left(\theta-\frac{k-1}{n}\pi\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta-\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$=(-1)^k 2^{n-1}\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{n}\right)\cdots$$

$$\cdots\cos\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{n-2}{n}\pi\right)\cdots$$

$$\cdots\cos\left(\theta+\frac{(k+2)\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{k+1}{n}\pi\right)$$

$$=(-1)^k 2^{n-1}\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\cdots$$

$$\cdots\cos\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{k+1}{n}\pi\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{k+2}{n}\pi\right)$$

$$\cdots\cos\left(\theta+\frac{n-2}{n}\pi\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

$$\therefore 2^{n-1}\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{n}\right)\cdots\cos\left(\theta+\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

$$=(-1)^k\cos n\theta=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos n\theta$$

$$=p_n \qquad \text{⑨}$$

證畢。

推論：1. $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\cdots$

$$\cdots\sin\frac{n-1}{2n}\pi$$

$$=\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2}{2n}\pi\cos\frac{3\pi}{2n}\cdots$$

$$\cdots\cos\frac{n-1}{2n}\pi$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

2. $\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1}$

$$\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1}$$

$$=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

3. $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{3\pi}{2n+1}$

$$\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1}$$

$$=\frac{1}{2^n}$$

證明： 由①及④式得

$\sin 2n\theta$

$= \cos\theta[(-1)^{n-1}2^{2n-1}\sin^{2n-1}\theta+\cdots$

$+(-C_1^{2n}C_1^{n-1}-C_3^{2n}C_0^{n-2})\sin^3\theta$

$+C_1^{2n}\sin\theta]$

$= 2^{2n-1}\sin\theta\sin(\theta+\frac{\pi}{2n})$

$\cdot\sin(\theta+\frac{2\pi}{2n})\sin(\theta+\frac{3\pi}{2n})$

$\cdots\sin(\theta+\frac{2n-1}{2n}\pi)$

消去 $\sin\theta$ 再將 θ 以0代入得

$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin\frac{n-1}{2n}\pi\sin\frac{n\pi}{2n}$

$\cdot\sin\frac{n+1}{2n}\pi\cdots\sin\frac{2n-1}{2n}\pi$

$=\frac{2n}{2^{2n-1}}=\frac{n}{2^{2n-2}}$

由 $\sin A=\sin(\pi-A)$

及 $\sin A=\cos(\frac{\pi}{2}-A)$

$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin\frac{n-1}{2n}\pi$

$=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

$=\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\cdots\cos\frac{n-1}{2n}\pi$

又由⑥式及⑦式得

$\sin(2n+1)\theta$

$=(-1)^n 2^{2n}\sin^{2n+1}\theta+\cdots$

$+(-C_1^{2n+1}-C_3^{2n+1})\sin^3\theta$

$+C_1^{2n+1}\sin\theta$

$=2^{2n}\sin\theta\sin(\theta+\frac{\pi}{2n+1})$

$\cdot\sin(\theta+\frac{2\pi}{2n+1})\cdots$

$\cdots\sin(\theta+\frac{2n}{2n+1}\pi)$

消去 $\sin\theta$，再以 $\theta=0$ 代入得

$\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1}\cdots$

$\cdots\sin\frac{2n}{2n+1}\pi=\frac{2n+1}{2^{2n}}$

即 $\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1}$

$=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$

又由⑧及⑨式

$2^{2n}\cos\theta\cos(\theta+\frac{\pi}{2n+1})\cos(\theta$

$+\frac{2\pi}{2n+1})\cdots\cos(\theta+\frac{2n}{2n+1}\pi)$

$=(-1)^n\cos(2n+1)\theta$

以 $\theta=0$ 代入，可得

$\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{3\pi}{2n+1}\cdots$

$\cdots\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=(-1)^n\frac{1}{2^{2n}}$

即 $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{3\pi}{2n+1}\cdots$

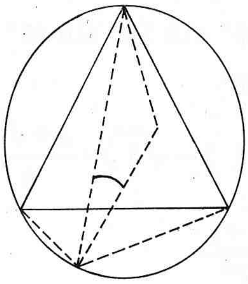
$\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}$

由定理1.2.及推論，可得一些簡易的應用：

例1： 若 ΔABC 內接於半徑為 r 的圓，P 為圓周上任一點，求 PA、PB、PC 之最大值。

解： 設圓心，$\angle APO=\theta$，則 $0\le\theta\le\frac{\pi}{6}$

$\angle BPO=\theta+\frac{\pi}{3}$



$\angle CPO=\frac{\pi}{3}-\theta$

由餘弦定律

$r^2=x^2+r^2-2xr\cos\theta$

$\therefore x=2r\cos\theta$

同理

$y=2r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$z=2r\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

$\Rightarrow\quad xyz$

$=8r^3\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

$=2r^3\cos 3\theta\leqq 2r^3$

最大值 $2r^3$ 當 $\theta=0$ 即 P 爲一弧 $\overset{\frown}{BC}$ 之中點時。

同法可求得一正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$（$n\geqq 3$）內接於半徑爲 r 的圓，若 P 爲圓圓上任一點，可求得 $PA_1\cdot PA_2\cdot PA_3\cdot\cdots PA_n$ 之最大值爲 $2r^n$。

註： 本例子的另一個想法亦可由 $x^n-r^n=0$ 的 n 個根爲 $r,\ rw,\cdots rw^{n-1}$,

$\left(w=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$

令 $A_i(rw^i)$ $i=0,1,\cdots n-1$，則

$x^n-r^n=(x-r)(x-wr)\cdots(x-rw^{n-1})$

令 $x=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 代入左式，再兩邊取絕對值，則得

$PA_1\cdot PA_2\cdot\cdots PA_n=|x^n-r^n|$

$=r^n|\cos n\theta+i\sin n\theta-1|$

$=|r-0||r(\cos\theta+i\sin\theta)-rw|\times\cdots\times|r\cos(\theta+i\sin\theta)-rw^{n-1}|$

$=r^n\sqrt{(\cos n\theta-1)^2+(\sin n\theta)^2}$

$=r^n\sqrt{2-2\cos n\theta}$

$=r^n\cdot 2\left|\sin\frac{n\theta}{2}\right|$

$\leqq 2r^n$　　最大值當 $\theta=\frac{\pi}{n}$ 時發生

例2： 求值 $\sin 6^\circ\sin 14^\circ\sin 26^\circ\sin 34^\circ\cdot\sin 46^\circ\sin 54^\circ\sin 66^\circ\sin 74^\circ\sin 86^\circ$

解1： 由恒等式

$\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{9}-\theta\right)\sin\left(\frac{2\pi}{9}-\theta\right)$

$\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{9}-\theta\right)\sin\left(\frac{4\pi}{9}-\theta\right)$

$\cdot\sin\left(\frac{\pi}{9}+\theta\right)\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\theta\right)$

$\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{9}+\theta\right)\sin\left(\frac{4\pi}{9}+\theta\right)$

$=\frac{1}{2^8}\sin 9\theta$

將 $\theta=6^\circ$ 代入，即得其值爲

$\frac{1}{2^8}\sin 54^\circ=\frac{1}{2^8}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{2^{10}}$

解2： 由直接計算

① $\sin 6^\circ\sin 66^\circ$

$=\frac{1}{2}[\cos 60^\circ-\cos 72^\circ]$

$=\frac{3-\sqrt{5}}{8}$

② $\sin 54^\circ=\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

③ $\sin 14^\circ \sin 26^\circ \sin 34^\circ \sin 46^\circ$

$\cdot \sin 74^\circ \sin 86^\circ$

$= (\sin 14^\circ \sin 46^\circ)$

$\cdot (\sin 26^\circ \sin 86^\circ)$

$\cdot \sin 74^\circ \sin 34^\circ$

$$= \frac{\cos 32^\circ - \cos 60^\circ}{2} \times \frac{\cos 60^\circ - \cos 112^\circ}{2} \cdot \sin 34^\circ \sin 74^\circ$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\cos 32^\circ - \frac{1}{2}\right)\sin 74^\circ\right] \cdot \left[\left(\frac{1}{2} + \cos 68^\circ\right)\sin 34^\circ\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\sin 106^\circ + \sin 42^\circ}{2} - \frac{\sin 74^\circ}{2}\right] \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos 68^\circ\right)\sin 34^\circ$$

$$= \frac{1}{8}(\sin 34^\circ \sin 42^\circ) \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos 68^\circ\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{\cos 8^\circ - \cos 76^\circ}{4} + \left(\frac{\cos 8^\circ - \cos 76^\circ}{2}\right)\cos 68^\circ\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{\cos 8^\circ - \cos 76^\circ}{4} + \frac{\cos 60^\circ + \cos 76^\circ - \cos 144^\circ - \cos 8^\circ}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{32} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

$\therefore \sin 6^\circ \sin 14^\circ \sin 26^\circ \sin 34^\circ$

$\cdot \sin 46^\circ \sin 54^\circ \sin 66^\circ \sin 74^\circ$

$\cdot \sin 86^\circ$

$$= \frac{1}{2^8}(3-\sqrt{5}) \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2^{10}}$$

同法可得 $\sin 5^\circ \sin 25^\circ \sin 35^\circ$

$\cdot \sin 55^\circ \sin 65^\circ \sin 85^\circ = \frac{1}{64}$

最後將定理1.2.合述如下：

(1) $2^{n-1} \cos\theta \cos\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) \cdots \cos\left(\theta + \frac{n-1}{n}\pi\right)$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos n\theta & n \text{ 奇數} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \sin n\theta & n \text{ 偶數} \end{cases}$$

(2) $2^{n-1} \sin\theta \sin\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) \cdots \sin\left(\theta + \frac{n-1}{n}\pi\right)$

$= \sin n\theta \qquad n \in N$

—本文作者現任教省立嘉義高中—