# 看試題、談心聲

羅添壽

## (一)部份試題研討：

今年大學聯考數學科，不論自然組、社會組的試題，皆在喝采聲中落幕了。試題本身不但注重觀念，且較富思考性，死代公式的試題幾乎不存在了，由於命題的普遍合理，相信平常有注意研習數學的考生，該考得很滿意才對。故今筆者僅就一些試題提出與諸位研討。

### (1)自然組填充題第(3)題：

**試題**：在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=45^\circ$，$\overline{AC}=3$，$\overline{AB}=\sqrt{6}$，則$\overline{BC}=$(戊)或(己)

**解一**：

(1)由正弦定律知

$$\frac{3}{\sin B}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow \sin B=\frac{3\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

因$\angle ACB$為銳角故角$B$有為$60^\circ$或$120^\circ$如下圖知$\overline{BC}$有兩解。

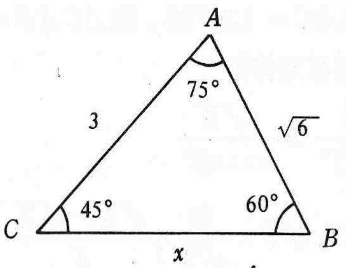
(2)由餘弦定律令$\overline{BC}=x$

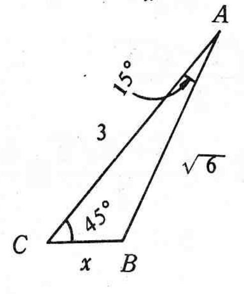
則$\cos 45^\circ=\dfrac{x^2+9-6}{2\cdot 3\cdot x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore x^2+3=3\sqrt{2}x \quad \therefore x^2-3\sqrt{2}x+3=0$

$\therefore x=\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$

故所求$\overline{BC}=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$或$\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$




**說明**：

據筆者所知，由此法求出$\overline{BC}$者，大部分的考生幾乎只由餘弦定律直接求$\overline{BC}$而得答案，如此就得 10 分與眞正了解先知有兩解而得 10 分，似欠公平，因此本題若改為計算題，應較能測出學生的能力差異。

**解二**：

由正弦定律知

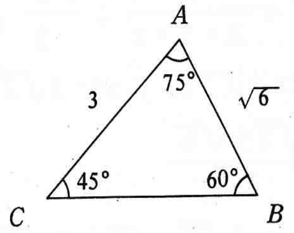
$$\frac{3}{\sin B}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ 且因 $\angle ACB$ 爲銳角，故角 $B$ 爲 $60^\circ$ 或 $120^\circ$，得知 $\overline{BC}$ 有兩解。

(1)當 $\angle ABC=60^\circ$ 時，$\angle CAB=75^\circ$ 如下圖由正弦定律得

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 75^\circ}=\frac{3}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore \overline{BC}=3\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \overline{BC}=\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$$



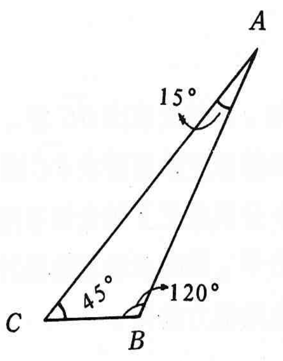

(2)當 $\angle ABC=120^\circ$ 時，則 $\angle CAB=15^\circ$ 如下圖由正弦定律得

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 15^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore \overline{BC}=\sqrt{6}\times\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

故所求爲 $\overline{BC}=\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$ 或 $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$




## (2)自然組非選擇題第三題：

**試題**：試證對所有正整數 $n$，均有

$$1\cdot\frac{2!}{2^2}+2\cdot\frac{3!}{2^3}+3\cdot\frac{4!}{2^4}+\cdots\cdots+n\cdot\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}=\frac{(n+2)!}{2^{n+1}}-1$$

**證一**：由數學歸納法求得（略）

**證二**：利用雜級數之分項對消法（僅供參考，因能利用此法證出的學生可能很少）

設 $a_k=k\cdot\dfrac{(k+1)!}{2^{k+1}}$

$$=\frac{(k+2-2)\cdot(k+1)!}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{(k+2)!-2\cdot(k+1)!}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{(k+2)!}{2^{k+1}}-\frac{(k+1)!}{2^k}$$

$$=-\frac{(k+1)!}{2^k}+\frac{(k+2)!}{2^{k+1}}$$

今將 $k=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ 分別代入上式得：

$$1\cdot\frac{2!}{2^2}=-\frac{2!}{2}+\frac{3!}{2^2}$$

$$2\cdot\frac{3!}{2^3}=-\frac{3!}{2^2}+\frac{4!}{2^3}$$

$$3\cdot\frac{4!}{2^4}=-\frac{4!}{2^3}+\frac{5!}{2^4}$$

$$\vdots$$

$$n\cdot\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}=-\frac{(n+1)!}{2^n}+\frac{(n+2)!}{2^{n+1}}$$

將以上諸式相加得

$$1\cdot\frac{2!}{2^2}+2\cdot\frac{3!}{2^3}+3\cdot\frac{4!}{2^4}+\cdots\cdots+n\cdot\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}=-1+\frac{(n+2)!}{2^{n+1}}$$ 故得證

## (二)意見與建議：

(1)聯考一向引導學校與補習教育的教學，換言之，祇要升學主義存在一天，聯考如何考，學校、補習班的教師教學方式與命題形式一定跟着聯考跑。

(例如(74)年聯考命題形式爲20分選擇題，40分填充題，40分計算與作圖證明題，而後(75)年各校高三模擬考或補習班的模擬考，配分與命題形式幾乎與(74)年聯考一樣。)

因此聯考如何命題，直接影響到數學教育的推展，故筆者建議聯考命題在注重觀念與推理的命題條件下，全部改爲計算與證明題，如此教師才能安份的「教」，學生才能虛心的「學」。

(2)社會組填充題第1題，今後最好不要安排在第1題，雖試題本身不錯，然對考生而言，解此種試題總是患得患失，造成沒有信心，影響作答。

**題目：**

甲，乙兩人分別從0至99的100個數中，各自選出3個不同的數，則兩人所選的數完全相同的機率爲（子）；至少有一數相同的機率爲（丑）。（請都以最簡分數表示之）

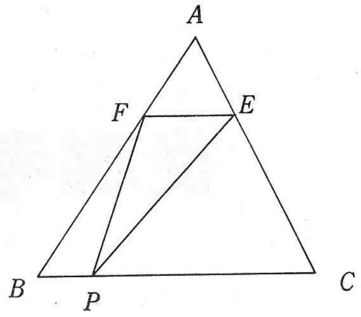
答：（子）$\dfrac{C^{100}_{3}\times 1}{C^{100}_{3}\times C^{100}_{3}}=\dfrac{1}{161700}$

（丑）$1-\dfrac{C^{100}_{3}\times C^{97}_{3}}{C^{100}_{3}\times C^{100}_{3}}=\dfrac{713}{8085}$

(3)自然組填充題第(5)題（壬），（癸）分開給分不合理，應該（壬），（癸）全對始給分。

**試題：**

在△$ABC$的三邊$BC$，$CA$，$AB$上分別取$D$，$E$，$F$三點，使$\overrightarrow{DC}=4\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{AF}$（如圖）




設$G$爲△$DEF$的重心，$\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則$\alpha=$壬，$\beta=$癸。

(4)建議報紙報導數學科試題命題之分配或其他事項時，要特別愼重，以免與事實有出入。例7月2日（星期三）所有報紙皆報導「自然組數學的一百分，平均分配在二，三，四，五，六册二十分，第一册沒有命題」，此句話與事實有離譜，因自然組非選擇題第三題是第一册的單元。

**試題：**試證對所有的正整數$n$，均有

$$1\cdot\frac{2!}{2^2}+2\cdot\frac{3!}{2^3}+3\cdot\frac{4!}{2^4}+\cdots\cdots+n\cdot\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}+\frac{(n+2)!}{2^{n+1}}=1$$

**註：**命題來自第一册第3章§3-3·2 數學歸納法與遞廻定義（東華本爲主）。

## (三)結論：

由於今年聯考數學科試題命題技術較往年進步多了，故相信往後的數學教育不論「教與學」皆該較實際了，讓我們共同期待其成果吧！

——本文作者任教於新化高中——