一種log 2無窮級數的推廣研究(上)

林建宏

零、前言

一般數學文獻對於 psi 函數$\psi(x)$（另稱 digamma 函數）的處理，均從定義下手，也就是根據式子

$$\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\frac{d}{dx}\log\Gamma(x)\ ,\ x>0$$

作爲基礎，利用 gamma 函數 $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ 的種種性質，研究 psi 函數。

本文將不採取以上定義的方式，而從log2另一種特殊形式的無窮級數爲着眼點，定義一函數 $\varphi(x)$，加以推廣分析。應用 gamma 函數的一些主要性質，推導出 $\varphi(x)$ 與 gamma 函數的對數導數相關的式子，並利用 $\varphi(x)$ 間接地把 psi 函數的一些重要特性，介紹給讀者。

由於常用數學公式表列出 psi 函數的特殊值不多，遇有特別用途時，甚感不足。於是，經過筆者一番直接計算，得出許多 psi 函數的特殊值，特將計算結果列於文中，供讀者參考。同時，我們也探討兩個與 $\varphi(s)$ 有關的積分

$$\int_0^\infty\frac{xdx}{(e^x-1)^s}\ ,\ \int_0^\infty\frac{x[\log(e^x-1)]^n}{(e^x-1)^s}dx$$

並給出一些計算結果。

還有，普通微積分的教本，常遇到$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-+\cdots\cdots$或 $\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-+\cdots\cdots$等形式的無窮級數，但求解方法無規律可循。本文將針對這類型的無窮級數，利用與 $\psi(x)$ 有關的函數 $\beta(x)$，求解出許多不常見的無窮級數之特殊值。

一、初步分析與推廣函數

相信學過微積分的讀者，一定很熟悉下列式子

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots\cdots$$

欲得此式，我們將底下的等式

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots,\ |x|<1$$

由0到1直接積分即得。我們不擬深究這個式子，而專注於 log2 的另一種特殊形式。

今考慮 $z \in C$，且除 $z=1$ 外，z 均在單位圓盤 $|z| \leqslant 1$ 上，則

$$(1.1) \quad \log\frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots\cdots$$

（證明可在任何一本複變函數的書上找到。）假設 $0 < \theta < \pi$，根據式子 $\log z = \log|z| + i\arg z$，於(1.1)式中，令 $z = e^{2i\theta}$，故知

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2in\theta}}{n} &= -\log(1-e^{2i\theta})\\ &= -\log|1-e^{2i\theta}|\\ &\quad - i\arg(1-e^{2i\theta})\\ &= -\log(2\sin\theta)\\ &\quad + i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\end{aligned}$$

將上式等式兩號取實部，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\theta}{n} = -\log(2\sin\theta),\ 0<\theta<\pi$$

由恒等式 $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ 得知

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\theta}{n} &= -\log 2 - \log(\sin\theta)\\ &= -\log 2 - \frac{1}{2}\log(\sin^2\theta)\\ &= -\log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-\cos^2\theta}\end{aligned}$$

顯然，(1.1)式使得上式

$$= -\log 2 + \frac{1}{2}\left(\cos^2\theta + \frac{\cos^4\theta}{2} + \frac{\cos^6\theta}{3} + \cdots\right)$$

即

$$(1.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\theta}{n} = -\log 2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos^{2n}\theta,\quad 0<\theta<\pi$$

設 $u_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n\theta\, d\theta$。應用分部積分法，若 $n \geqslant 2$，則

$$\begin{aligned}u_n &= (n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta\, d\theta\\ &= (n-1)(u_{n-2}-u_n)\end{aligned}$$

故得 $nu_n = (n-1)u_{n-2}$。因 $u_0 = \frac{\pi}{2}$，所以

$$u_{2n} = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

現將(1.2)式由0到 $\pi/2$ 逐項積分，並利用上面結果可得

$$\frac{\pi}{2}\log 2 = \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)$$

此式兩端同乘 $4/\pi$ 即得

$$(1.3) \quad 2\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\left(\frac{1}{2}\right)$$

這個公式也可由其他方法獲得，請參閱〔3；p.83，5〕。

由(1.3)式，我們很清楚看出下式亦成立

$$(1.4) \quad 2\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{n-1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{1}\right)$$

這個無窮級數就是我們在前言裏，曾提到的 log 2 之另一種特殊形式。我們的興趣是考慮將上式各括弧中的分子½，推廣至任意實數 x，經過一番研究，會發現推廣後的無窮級數，竟與 gamma 函數的對數導數相關，底下是研究過程。

首先，我們以 x 取代 (1.4) 式各括弧中的 $\frac{1}{2}$。令 $x=-t$，$t\geqslant 0$，則

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\left(1+\frac{t}{n}\right)\left(1+\frac{t}{n-1}\right)\cdots\cdots\cdots$$

$$(1+t)\geqslant\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}$$

當 $m\to\infty$，由於 $\Sigma_{n=1}^{\infty}1/n$ 發散，因此 $\Sigma_{n=1}^{\infty}(1+t/n)\cdots(1+t)/n$ 亦發散。故祇剩 $x>0$ 的情況對我們有意義可言。討論之前，先列出 gamma 函數的一些性質，請參閱〔6；ch.12，7；ch.11，8〕。

gamma 函數的性質：

若 $x>0$，$y>0$，$0<\rho<1$，n 爲正整數，則

(1.5)　$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$，$\Gamma(1)=1$

(1.6)　$\Gamma(n+1)=n!$

(1.7)　$\Gamma(\rho)\Gamma(1-\rho)=\dfrac{\pi}{\sin\rho\pi}$

(1.8)　$\Gamma(x)=x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\sqrt{2\pi}\,[1+o(1)]$

(1.9)　$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$

$$=(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}n^{\frac{1}{2}-nx}\Gamma(nx)$$

(1.10)　$\log\Gamma(x)=-\log x-\gamma x$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right]$$

(1.11)　$\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

其中

$$\gamma=0.577215664901532\cdots\cdots$$

即Euler 常數。令

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n-1}\right)\cdots\cdots(1-x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x)\text{，}x>0$$

此處 $\lambda_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(1-x/k)/n$。由實數的有序性質知：若 $x\in(0,\infty)$，則存在一正整數 m，使得 $(m-1)<x\leqslant m$。討論 $x=m$ 與 $(m-1)<x<m$ 兩種情形。設

$$\xi_m=\xi_m(x)=\sum_{n=1}^{m-1}\lambda_n(x)\text{，}\xi_1=0\text{，}$$

$$\mu_m=\mu_m(x)=\sum_{n=m}^{\infty}\lambda_n(x)$$

(a)當 $x=m$，很容易看出

$$\lambda_{m'}(x)=\frac{1}{m'}\left(1-\frac{x}{m'}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{m}\right)\cdots(1-x)$$

$$=0\text{，}\forall m'\geqslant m$$

因而

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{m-1}\lambda_n(x)+\sum_{n=m}^{\infty}\lambda_n(x)=\xi_m$$

(b)對於 $(m-1)<x<m$ 的情況，我們有

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{m-1}\lambda_n(x)+\sum_{n=m}^{\infty}\lambda_n(x)$$

$$=\xi_m+\mu_m$$

綜合(a)，(b)得

$$\varphi(x)=\begin{cases}\xi_m & \text{若 } x=m\\ \xi_m+\mu_m & \text{若 } (m-1)<x<m\end{cases}$$

由於 ξ_m 祇含有限項，且每一項 $\lambda_n(x)$ 均爲有限值，因此 $|\xi_m|<\infty$，此立即顯示

$$|\varphi(x)|<\infty\qquad\text{若 } x=m$$

$$|\varphi(x)|<\infty \Leftrightarrow |\mu_m|<\infty$$
$$\text{若}\ (m-1)<x<m$$

故對 $x=m\in Z^+$ 部份，$\varphi(x)$ 有界已得證明。其次，由上面第二式可知，當 $(m-1)<x<m$，$|\varphi(x)|<\infty$，若且唯若 $|\mu_m|<\infty$。因此，我們接下來的步驟，就是要證 $|\mu_m|<\infty$。因

$$\begin{aligned}\mu_m &= \sum_{n=m}^{\infty}\lambda_n(x)\\ &= \prod_{j=1}^{m-1}\left(1-\frac{x}{j}\right)\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{m}\right)\\ &= C_m g_m\end{aligned}$$

其中

$$C_m=C_m(x)=\prod_{j=1}^{m-1}\left(1-\frac{x}{j}\right),C_1=1,$$

$$g_m=g_m(x)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{m}\right)$$

留意 C_m 爲有限值，所以 $|\mu_m|<\infty$，若且唯若 $|g_m|<\infty$。因而目前問題，決定在 g_m 是否收斂。即

(1.12) $\quad |\varphi(x)|<\infty \Leftrightarrow |g_m|<\infty,\quad (m-1)<x<m$

現將 g_m 改寫如下

$$\begin{aligned}g_m &= \sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{m}\right)\\ &= \sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)(n-x)\cdots\left(\frac{1}{m}\right)(m-x)\\ &= \sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(m-1)!}{n!}(n-x)(n-1-x)\cdots\cdots(m-x)\end{aligned}$$

今由 (1.5)，(1.6) 知 $\Gamma(n+1)=n!$，以及

$$\frac{\Gamma(n+1-x)}{\Gamma(m-x)}=(n-x)(n-1-x)\cdots\cdots(m-x)$$

所以

$$g_m=\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-x)}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\Gamma(n+1-x)}{\Gamma(n+1)}$$

因 $(m-1)<x<m$，故保證了 $k-x>0$，$k=m+1$，$m+2$，……，於是由 (1.8) 式可得

$$\begin{aligned}|g_m| &= \left|\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-x)}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\Gamma(n+1-x)}{\Gamma(n+1)}\right|\\ &= \left|\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-x)}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\sqrt{2\pi}\,(n+1-x)^{n+\frac{1}{2}-x}}{\sqrt{2\pi}\,(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}\right.\\ &\quad\left.\cdot\frac{e^{-n-1+x}[1+o(1)]}{e^{-n-1}[1+o(1)]}\right|\\ &\leqslant \left|\frac{e^x\Gamma(m)}{\Gamma(m-x)}\right|\cdot\left|\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}(n+1)^{-x}\right|\\ &\quad\cdot|[1+o(1)]|\end{aligned}$$

若取 $|1+o(1)|\leqslant K$，則上式又可化爲

$$\begin{aligned}|g_m| &\leqslant K\left|\frac{e^x\Gamma(m)}{\Gamma(m-x)}\right|\cdot\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+x}}\right|\\ &= |\eta_m(x)|\cdot|\zeta(1+x)|\end{aligned}$$

即

(1.13) $\quad |g_m|\leqslant|\eta_m(x)|\cdot|\zeta(1+x)|,\quad (m-1)<x<m$

此處

$$\begin{aligned}\eta_m(x) &= Ke^x\Gamma(m)/\Gamma(m-x)\\ &= O(1)\end{aligned}$$

而 $\zeta(s)$ 稱爲 zeta 函數，它有下列性質：

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}} \quad 在\ s\geqslant 1+\delta\ 處均勻收斂，\delta>0$$

從而由（1.13）可知 g_m 在 $x\geqslant\delta>0$ 處均勻收斂，亦即 g_m 於 $x>0$ 處收斂。由（1.12）式易知 $\varphi(x)$ 亦具有相同性質。以上我們證明了下列定理：

定理 1

無窮級數

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n-1}\right)\cdots(1-x)$$

於 $x\geqslant\delta>0$ 處均勻收斂，且於 $x>0$ 處收斂。

此定理對我們相當重要，因為由均勻收斂的性質可知：凡無窮級數在其定義域上均勻收斂，則可逐項積分或逐項微分。因此，往後各節中，若我們必須在運算過程，對 $\varphi(x)$ 逐項微分或積分，則定理 1 確保我們的運算是可行無誤的。

二、$\varphi(x)$ 與gamma函數的對數導數相關式的推導

考慮函數

$$f(x,w)=(1-e^{-w})^{x-1}-1,\quad x,w\in(0,\infty)$$

以下要證明的，就是下面定理

定理 2

若 $x\in(0,\infty)$，則

$$\int_0^{\infty}f(x,w)\,dw=\varphi(x) \tag{2.1}$$

證明：易見 $x=1$ 時

$$\int_0^{\infty}f(1,w)\,dw=0=\varphi(1)$$

現有兩種情形：存在一數 $\ell\in Z^{+}$，使(a) $x=\ell$，(b) $(\ell-1)<x<\ell$，此處 $1\neq x\in(0,\infty)$。

若情況為(a)，則由二項式定理得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}f(\ell,w)\,dw\\
&=\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{l-1}(-1)^{n}\binom{\ell-1}{n}e^{-nw}\,dw\\
&=\sum_{n=1}^{l-1}(-1)^{n}\binom{\ell-1}{n}\int_0^{\infty}e^{-nw}\,dw\\
&=\sum_{n=1}^{l-1}\frac{(-1)^{n}}{n}\binom{\ell-1}{n}\\
&=\sum_{n=1}^{l-1}\frac{1}{n}\left(1-\frac{\ell}{n}\right)\left(1-\frac{\ell}{n-1}\right)\cdots(1-\ell)\\
&=\varphi(\ell)
\end{aligned}$$

因此，(a)部份已得證。

若為(b)時，先證：當 $x\in X$ 時，$f(x,w)$ 於 W 上均勻收斂，其中 $X=\{x:0<x<\infty\}$，$W=\{w:\delta\leqslant w<\infty\}$，$\delta>0$。

因 $|e^{-w}|<1$，$\forall w>0$，故由二項式定理知

$$f(x,w)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n-1}\right)\cdots(1-x)e^{-nw}$$

設

$$u_{l}=u_{l}(x,w)$$

$$=\sum_{n=1}^{l-1}(1-\frac{x}{n})(1-\frac{x}{n-1})\cdots(1-x)e^{-nw}, u_1=0,$$

$$t_l=t_l(x,w)$$

$$=\sum_{n=l}^{\infty}(1-\frac{x}{n})(1-\frac{x}{n-1})\cdots(1-x)e^{-nw}$$

$$\alpha_l=\alpha_l(x)=\prod_{j=1}^{l-1}(1-\frac{x}{j}),\ \alpha_1=1,$$

$$h_l=h_l(x,w)$$

$$=\sum_{n=l}^{\infty}(1-\frac{x}{n})(1-\frac{x}{n-1})\cdots(1-\frac{x}{\ell})e^{-nw}$$

因而

$$f(x,w)=u_l+t_l$$
$$=u_l+\alpha_l h_l$$

當 $x\in X$ 時，u_l，α_l 均有界，$\forall w\geqslant\delta$。令 $K=max\{|u_l|,|\alpha_l|\}$，則

$$|f(x,w)|=|u_l+\alpha_l h_l|$$
$$\leqslant|u_l|+|\alpha_l|\cdot|h_l|$$
$$\leqslant K(1+|h_l|)$$

即

$$(2.2)\quad |f(x,w)|\leqslant K(1+|h_l|),\ x\in X,\ w\in W$$

顯然，接下來的工作是證明當 $x\in X$、h_l 在 W 上均勻收斂。由於 $(\ell-1)<x<\ell$，因而 $0<1-x/\ell'<1$，$\forall\ell'\geqslant\ell$。故

$$|h_l|=|\sum_{n=l}^{\infty}(1-\frac{x}{n})(1-\frac{x}{n-1})\cdots\cdots$$
$$(1-\frac{x}{\ell})e^{-nw}|$$
$$\leqslant|\sum_{n=l}^{\infty}e^{-nw}|$$
$$\leqslant|\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nw}|$$
$$=|\frac{1}{e^w-1}|$$

因 $|1/(e^w-1)|$ 在 W 上爲一有界函數，於是我們可取一正常數 L，使得

$$|h_l|\leqslant|\frac{1}{e^w-1}|\leqslant L,\ w\in W$$

故由Weierstrass-M 檢定，我們得出：當 $x\in X$，h_l 於 W 上均勻收斂。再由(2.2)式得知：若 $x\in X$，則 $f(x,w)$ 在 W 上均勻收斂。故 $f(x,w)$ 可逐項積分。因此，當 $x\in X$

$$|\int_0^m f(x,w)\,dw-\varphi(x)|$$
$$=|\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x}{n})(1-\frac{x}{n-1})\cdots\cdots(1-x)$$
$$\cdot(\int_0^m e^{-nw}dw-\frac{1}{n})|$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\prod_{j=1}^{n}(1-\frac{x}{j})|\cdot|\int_0^m e^{-nw}dw-\frac{1}{n}|$$

現由(b)知必有一數 j 足夠使 $0<1-x/j'<1$，$\forall j'\geqslant j$。顯而易見 $|\prod_{j=1}^{n}(1-x/j)|$ 有界，令其值爲一正常數 M 所限制，故得

$$|\int_0^m f(x,w)\,dw-\varphi(x)|$$
$$\leqslant M\sum_{n=1}^{\infty}|\int_0^m e^{-nw}dw-\frac{1}{n}|$$
$$=M\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{e^{-mn}}{n}|$$
$$=M\log(\frac{1}{1-e^{-m}})\to 0 \text{ 當 } m\to\infty$$

綜合以上所得，即證明了定理 2 。

現在，我們將 (2.1) 式作如下變換

2 A

$$t = 1 - e^{-w}$$

則給出

$$(2.3)\quad \int_0^\infty f(x,w)\,dw = \int_0^1 \frac{t^{x-1}-1}{1-t}\,dt = \varphi(x)\ ,\ \forall x > 0$$

對 (1.10) 式取導數得

$$\frac{d}{dx}\log\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} - \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m+x}-\frac{1}{m}\right)$$

當 $x > 0$，而 $m = 0$，1，2，……時，式子

$$\frac{1}{m+x} = \int_0^1 t^{m+x-1}\,dt$$

恒成立。因而

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \int_0^1 t^{x-1}dt - \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sum_{m=1}^{n}(t^{m+x-1}-t^{m-1})\,dt$$

$$= -\gamma - \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{t^{x-1}-1-t^{n+x}+t^n}{1-t}\,dt$$

$$= -\gamma - \int_0^1 \frac{t^{x-1}-1}{1-t}\,dt + \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{t^x-1}{1-t}\,t^n\,dt$$

由 (2.3) 式，我們可得

$$(2.4)\quad \left|\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \gamma + \varphi(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1 \frac{t^x-1}{1-t}\,t^n\,dt\right|$$

當 $x \in (0,\infty)$，若 $0 \le t < 1$，則 $|(t^x-1)/(1-t)|$ 顯然爲 t 的有界函數，而 $t \to 1$ 時，其値趨於 x。因此，我們可取一與 t 的積分路徑無關的常數 K，使得

$$\left|\frac{t^x-1}{1-t}\right| < K$$

所以

$$\left|\int_0^1 \frac{t^x-1}{1-t}\,t^n\,dt\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{t^x-1}{1-t}\right|\cdot|t^n|\,dt < K\int_0^1 |t^n|\,dt = \frac{K}{n+1} \to 0 \text{ 當 } n\to\infty$$

亦即 (2.4) 式等號右端趨於 0。因此，我們證明了底下定理

定理 3

若 $x \in (0,\infty)$，則

$$(2.5)\quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \gamma + \varphi(x) = 0$$

由 psi 函數的定義，易知下列定理亦成立

定理 4

若 $x \in (0,\infty)$，則

$$(2.6)\quad \psi(x) + \gamma + \varphi(x) = 0$$

根據定理 4，我們可列出下面式子

$$\psi(x) + \gamma + \int_0^1 \frac{t^{x-1}-1}{1-t}\,dt = 0\ ,\quad x \in (0,\infty)$$

此式最先由 Legendre 於 1817 年證明，參閱〔3；p.170〕。再由定理 4 知

$$\psi(x) + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)\cdots(1-x) = 0\ ,\ x \in (0,\infty)$$

這個式子，係由Riemann的老師Stern於1847年得到，參閱〔3；p.171〕。有關函數$\psi(x)$的其他公式證明，建議讀者參閱〔1，3〕，此處我們不再繼續討論這方面的知識。

三、$\varphi(x)$各種性質的介紹

本文以下的重點，專注於函數$\varphi(x)$各種性質的探討。主要目的是間接地向讀者介紹$\psi(x)$的一些重要性質，所有的結果均可在〔1，3，6，8〕等參考書目中找到。應用前面已知的結果，祇要能獲致$\varphi(x)$的一些特性，那麼由定理4得知$\psi(x)$亦具相同性質，因兩個函數祇差一個Euler常數。

定理5

若$0<x<\infty$，$0<\rho<1$，$0<q<p$，p，q，n均為正整數，則

(3.1) $$\varphi(x)=\int_0^1\frac{t^{x-1}-1}{1-t}dt$$

(3.2) $$\varphi(x)=\frac{1}{x}-x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(x+k)}$$

(3.3) $$\varphi^{(n)}(x)=(-1)^n n!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^{n+1}}$$

(3.4) $$\varphi(\rho+1)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\zeta(k+1)\rho^k$$

(3.5) $$\varphi(x+1)=\varphi(x)-\frac{1}{x}$$

(3.6) $$\varphi(x+n)=\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x+k}$$

(3.7) $$\varphi(nx)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(x+\frac{k}{n}\right)-\log n$$

(3.8) $$\varphi(\rho)=\varphi(1-\rho)+\pi\cot\rho\pi$$

(3.9) $$\varphi\left(\frac{q}{p}\right)=\frac{\pi}{2}\cot\frac{q\pi}{p}+\log 2p-2\sum_{m=1}^{l-1}a_m$$

此處$\ell=[(p+1)/2]$，$a_m=\cos(2qm\pi/p)\log\sin(m\pi/p)$，而$[x]$表Gauss函數。

證明：由假設$0<x<\infty$，知(3.1)式即為(2.3)式。今對(1.10)式取導數得

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-\gamma-\frac{1}{x}+x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(x+k)}$$

由定理3，得(3.2)式。接着，由定理1可知$\varphi(x)$於$x\geqslant\delta>0$處均勻收斂，因此(3.2)式可逐項微分。故(3.3)式的獲致，祇須將(3.2)式微分n次即得。現考慮將$\varphi(\rho+x)$展開成Taylor級數如下

$$\begin{aligned}\varphi(\rho+x)&=e^{\rho\frac{\partial}{\partial x}}\varphi(x)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\rho^k\frac{\partial^k}{\partial x^k}\varphi(x)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\rho^k\varphi^{(k)}(x)\end{aligned}$$

此處$0<\rho<1$。令$x=1$，由(3.2)式易知$\varphi^{(0)}(1)=\varphi(1)=0$，而(3.3)式使得$\varphi^{(k)}(1)=(-1)^k k!\zeta(k+1)$，$k=1,2,3\cdots\cdots$，故知

$$\begin{aligned}\varphi(\rho+1)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\rho^k(-1)^k k!\zeta(k+1)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\zeta(k+1)\rho^k,\end{aligned}$$

$$0<\rho<1$$

此即證明了(3.4)式。(3.5)式的證明相當簡單，由(3.2)式得

$$\varphi(x)-\frac{1}{x}=-x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(x+k)}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+k}-\frac{1}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{x+1}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+1+k}-\frac{1}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{x+1}-(x+1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(x+1+k)}$$

$$=\varphi(x+1)$$

因此 (3.5) 式成立。欲證 (3.6) 式，重複運用 (3.5) 式，即

$$\varphi(x+n)=\varphi(x+n-1)-\frac{1}{x+n-1}$$
$$=\varphi(x+n-2)-\left(\frac{1}{x+n-2}+\frac{1}{x+n-1}\right)$$
$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=\varphi(x)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{x+n-1}\right)$$

這便證明了 (3.6) 式。對 (1.9) 式取對數，則給出

$$\sum_{k=0}^{n-1}\log\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{2}(n-1)\log(2\pi)+\left(\frac{1}{2}-nx\right)\log n+\log\Gamma(nx)$$

微分上式得

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma'\left(x+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right)}=-n\log n+n\frac{\Gamma'(nx)}{\Gamma(nx)}$$

運用定理 3 化簡此式，經過整理，就可得到 (3.7) 式。對 (3.8) 式而言，我們先列出

$$(3.10)\quad \pi\cot\rho\pi=\frac{1}{\rho}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\rho}{\rho^2-k^2}\ ,\ 0<\rho<1$$

（請參閱〔7；p.412〕）由假設 $0<\rho<1$，於 (3.2) 式中，令 x 分別等於 ρ 及 $1-\rho$，則

$$\varphi(\rho)=\frac{1}{\rho}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho+k}-\frac{1}{k}\right)$$

$$\varphi(1-\rho)=\frac{1}{1-\rho}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\rho+k}-\frac{1}{k}\right)$$

將此二式相減並化簡，得

$$(3.11)\quad \varphi(\rho)-\varphi(1-\rho)=\frac{1}{\rho}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\rho}{\rho^2-k^2}\qquad 0<\rho<1$$

顯然，(3.10) 與 (3.11) 兩式蘊涵 (3.8) 式成立的事實。至於 (3.9) 式，Böhmer 書上有個很漂亮的證明，請參閱〔1；pp.77－79〕。至此定理 5 完全得證。

定理6

若 $0<x<\infty$，n 為正整數，則

(a) $\varphi(x+1)=\varphi(x)-\frac{1}{x}$

(b) $\varphi(n+1)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，$\varphi(1)=0$

(c) φ 是凸的。

證明：無疑地，(a)式即定理 5 的 (3.5) 式。由於 (3.2) 式提供 $\varphi(1)=0$，令 (3.6) 式中 $x=1$ 即得(b)。因假設 $0<x<\infty$，故由 (3.3) 式我們取二次導數，得

$$\varphi''(x)=(-1)^2 2!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^3}>0$$

此式和(c)是等價的。證畢。

這個定理看起來，似乎不怎麼起眼，因為(a)，(b)，(c)三個性質並沒有什麼複雜的公式或深奧的推理。不過，讀者將會看到函數 $\varphi(x)$ 實際上由這三個性質所唯一決定。在 gamma 函數的研究工作中，一項相當驚人的結果，由 Bohr 及 Mollerup 所發現，是以下三個條件將 $\Gamma(x)$ 完全刻劃出來了：

Bohr — Mollerup 定理：若 f 在 $(0,\infty)$ 是個正值函數，使得

(a) $f(x+1)=xf(x)$，

(b) $f(1)=1$，

(c) $\log f$ 是凸的，

則 $f(x)=\Gamma(x)$。（請參閱〔8〕）

類似於此定理，我們證明下列定理：

定理7

若函數 f 在 $(0,\infty)$ 上有下列條件

(a) $f(x+1)=f(x)-\dfrac{1}{x}$

(b) $f(1)=0$，

(c) f 是凸的，

則 $f(x)=\varphi(x)$。

證明：留意 f 具有性質(a)，因此，當 n 為正整數時

$$f(x+n)=f(x)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\cdots+\frac{1}{x+n-1}\right),\quad x\in(0,\infty) \tag{3.12}$$

成立。顯然，由此式可知，祇要對 $0<x\leq 1$ 來證就夠了。故若證明當 $0<x\leqslant 1$ 時，$f(x)=\varphi(x)$ 即足。

假設 $0<x\leqslant 1$，n 為正整數。考慮 f 在區間 $[n,n+1]$，$[n+1,n+1+x]$，$[n+1,n+2]$ 上的差商（difference quotients），由於 f 是凸的，故

$$\frac{f(n)-f(n+1)}{n-(n+1)}\leqslant\frac{f(x+n+1)-f(n+1)}{(x+n+1)-(n+1)}\leqslant\frac{f(n+2)-f(n+1)}{(n+2)-(n+1)}$$

由(b)及(3.12)式，我們可得到

$$f(n+1)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$f(x+n+1)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k},$$

將以上結果代入前面的不等式並化簡，可得下列式子

$$-\frac{x}{n}\leqslant f(x)-\frac{1}{x}+x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(x+k)}\leqslant-\frac{x}{n+1}$$

當 $n\to\infty$，式子兩端均趨於 0，即得

$$f(x)=\frac{1}{x}-\lim_{n\to\infty}x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(x+k)}$$

由(3.2)式易知 $f(x)=\varphi(x)$。明所欲證。

以上討論，我們已將 $\varphi(x)$ 各種性質說得很明白，相信讀者在完全了解之後，透過定理4，必能間接達到知悉函數 $\psi(x)$ 的各種性質之目的，則本節任務即已完成。不過，必須提醒讀者一點，$\psi(x)$ 仍有其他性質或與定理5等價的關係式未予列出，請有興趣的讀者參閱 Nielsen 的書〔3〕或 Böhmer 的書〔1〕。

另外，根據 Hölder，Moore，Barnes 等人的研究，函數 $\psi(x)$ 無法滿足有理係數的微分方程式。參考文獻可在〔6；p.236〕的註腳找到。更深入的研究，牽涉到所謂的超級超越函數（transcendentally transcendental functions），參閱 E.H. Moore, Concerning Transcendentally Transcendental Functions, Math. Ann., XLVIII, 1897, pp.49－74. （未完待續）

—本文作者台北工專電子科畢業—