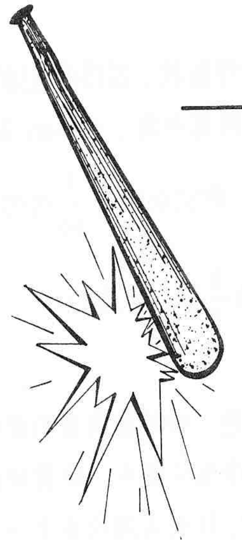

強棒出擊喊帶跑

機率模型應用實例

韓復華

一、引言

機率學是我們作數量分析時所必備的工具之一。高中的數學課程就開始有機率的介紹，在大學裏通常是把它安排在低年級（大一、大二），以便提供高年級（大三、大四）相關課目的基礎。初學者或許認爲機率只告訴你一些“公式”或“數學符號”的概念，實際上卻是不然。機率學討論的觀念可以用來分析許多日常發生在我們周遭的事物。本文就目前正在台視播出並廣受歡迎的一個綜合性節目「強棒出擊」爲背景，信手拈來兩個有關機率應用的實例以供參考。期望藉此可以提高同學們對機率以及其他數量方法的學習興趣。

在「強棒出擊」節目中共有兩個趣味性的遊戲：一個是「強棒出擊」，另一個是「喊帶跑」。這兩種遊戲的規則在每次節目中均有解說；本文爲節省篇幅不再複述，並假設讀者已十分熟悉這些規則（若不熟悉者，請先觀看這個電視節目，再讀本文。）下面我們就分別來討論這兩個遊戲的得勝率、獲獎率以及其他有關機率的問題。

二、強棒出擊安打率

「強棒出擊」中通常令人最緊張的一刻就是競賽者（任何一方）要猜號碼以決定是否出局的時刻。爲討論方便起見，我們稱猜號者爲「打擊者」，另一方爲「防守者」，若猜出的號碼是安全號碼，我們稱爲「安打」，否則打擊者出局，遊戲則到此爲止。

我們首先討論一次打擊（只需要猜一個號碼）的平均安打率及出局率。假設打擊時尚存 n 個號碼可猜，打擊者的安打率，P_n，可以由其條件機率的加總（ total probability ）求得：〔下式中 $P_r(\cdot)$ 表示對 · 事件的機率〕

$$
\begin{aligned}
P_n &= Pr(\text{剩 } n \text{ 號碼時的安打率}) \\
&= Pr(\text{安打} \mid \text{打擊者與防守者設定相同的危險號碼}) \times Pr(\text{危險號碼重疊}) + Pr(\text{安打} \mid \text{打擊者與防守者設定不同的危險號碼}) \times Pr(\text{危險號碼不重疊}) \\
&= \begin{cases} 0\times 1 + 0 \times 0, & \text{若 } n=1, \\ 1\times\dfrac{1}{n} + \dfrac{n-2}{n-1}\times\dfrac{n-1}{n}, & \text{若 } n=2, 3, 4\cdots, 9 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{n-1}{n}\text{ , } n=1\text{ , }2\text{ , }3\text{ , }\cdots\text{ , }9 \quad \cdots ①$$

上面推導中可能需要說明的是：

(1)危險號碼重疊時，除非只剩下一個號碼打者沒有選擇，否則打者絕不會出局。即
P_r（安打｜危險號碼重疊）＝1，
$n=2,3,\cdots,9$，

(2)危險號碼不重疊時，打擊者在他能選的（$n-1$）個號碼中避開對方的危險號碼的機會是（$n-2$）/（$n-1$）。

由①式，打擊時剩餘 n 號碼時的出局率，Q_n，爲：

$$Q_n = 1-P_n=\frac{1}{n}\text{ , } n=1\text{ , }2\text{ , }\cdots\text{ , }9 \cdots ②$$

很明顯地，出局機會隨著節目的進行（即 n 的減少），而呈成長性的增加（increases with an increasing rate）。當 $n=1$，只剩最後一格數字時，也就是打者「必死」的時候了。

有時候，一個問題參加競賽的雙方都答不出。接下去的打擊者就必須一次猜兩個號碼。由於前後兩次的打擊是不相關的獨立事件，打者連猜兩次的安打率是前後兩次個別安打率的乘積，即 $\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}=\frac{n-2}{n}$，$n\geq 2$。連猜兩次會出局的機率就是 $1-\frac{n-2}{n}=\frac{2}{n}$。這個出局的機率亦可由條件機率加總的方法求出：

Pr（連猜兩次時出局）
$=Pr$（出局｜第一次出局）Pr（第一次出局）$+Pr$（出局｜第一次安打）Pr（第一次安打）

$$=1\times\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\times\frac{n-1}{n}$$

$$=\frac{2}{n}\quad\text{ , } n=2\text{ , }3\text{ , }\cdots\text{ , }9\text{。}$$

由上面的討論，我們也可以導出整個遊戲能進行到只剩 m 個號碼的概率，S_m：

$S_m=Pr$（從 $n=m+1$ 到 $n=9$ 的各個打擊都是安打）

$$=\frac{m}{m+1}\times\frac{m+1}{m+2}\times\cdots\cdots\times\frac{7}{8}\times\frac{8}{9}$$

$$=\frac{m}{9}\quad\text{ , } m=1\text{ , }2\text{ , }3\text{ , }\cdots\text{ , }9 \quad \cdots ③$$

要注意的是③式算出的機率是一個事前機率，即在遊戲尚未開始前的估算值。如果遊戲已開始進行，則繼續到剩下 m 個號碼的機會要比 $m/9$ 爲高，這個結果暫且留給有興趣的同學們做個小練習去推算。

第③式的結果也告訴我們：平均而言，觀衆們有一半以上的機會可以看「強棒出擊」進行到剩下 5 格或更少的格數，也有九分之一的機會可以看到遊戲進行到最後一格。常看「強棒」的人，可以把日常觀察的結果與這些推算出的機率作一個比較。理論上而言，觀察的樣本夠大的話，樣本的平均安打率應與理論安打率相去不遠而無顯著差異。就本遊戲而言，作者個人認爲對每個 n 收集 30 個以上的觀察值大概就可以做一個合理的比較。

三、喊帶跑的獲獎機率

「強棒出擊」的優勝者連同其他三位隊友參加「喊帶跑」的遊戲單元，若能在一分鐘內跑出正確的四位數獎金號碼，便可獲得這筆獎金。獎金號碼的設定是在現場抽出，所以任何一個可能的號碼（1234 到 9876）被定爲獎金號碼的機率均相等（equally likely）。

分析喊帶跑的獲獎率雖不是一個很難的問題，但確是一個頗繁的問題。這個問題遠較前述的「強棒」複雜，其主要原因有二：

(1)**相關性**：在「強棒出擊」裏每次打擊的安打率與前後打擊無關，故可視爲獨立事件來分析。但是在「喊帶跑」時每跑一次的結果都提供若干訊息（information）給以後跑號碼的參考，因此前後跑號有相關性，而不能視爲獨立事件處理。

(2)策略的影響：強棒出擊時猜號碼的行動純粹是一個隨機事件，但在喊帶跑時其獲獎機率的高低與跑者選號碼的策略有關。高明的策略獲獎的平均機會會大於欠考慮的策略。獲獎率的估算也必須依據跑號的策略而定。

由於上述兩個因素，喊帶跑的獲獎率似乎無法像強棒安打率一樣可以直接用手算推導出來。根據特定的選號策略，我們可以用模擬(simulation)法推算出獲獎率的數值解(numerical solution)。

跑選號碼的策略當然有很多，但合理的策略應基於理性的(rational)原則上。一個最基本的選號原則就是每個跑者都不重複選取自己試過的非正確號碼。基於這個原則，我們可以列出下面幾個策略作爲參考：

A.不重複選號原則下，隨意選取。

B.不重複選號原則下，儘量選取隊友未試過的號碼。

C.不重複選號原則下，儘量選取隊友已試過的號碼。

關於選號的策略比較，我們稍後再作討論。下面先讓我們來剖析這個問題的結構與性質。

無論基於何種跑號的策略，「喊帶跑」在理論上都是一個隨機過程(stochastic process)。這個過程中的每一個可能的狀態(state)可以用兩個整數來定義：(i,j) 表示跑 j 次後揭曉 i 個號碼的狀態。喊帶跑開始時的狀態(starting state)當然是(0，0)。跑了第一次後若猜中四個號碼中的任何一個，這個系統的狀態就變成(1，1)；同理，若第二次又多猜中兩個號碼就變成狀態(3，2)。若令 s(i，j)表示系統會落在狀態(i，j)的機率，s(4，j)就是跑 j 次內會獲獎的機率。一般而言，在遊戲規定的一分鐘內大約可以跑 6 至 7 次，所以我們最關切的是 s(4，6)及 s(4，7)的大小。

要推算獲獎率或任何一個狀態機率，s(i，j)，我們必須要清楚由一個狀態變成另一個狀態的轉換機率(state transition probability)。這個狀態轉換機率依選號策略不同而異。但無論對那一種理性的選號策略，由於前後事件的相關性甚爲複雜，系統狀態的轉換機率亦有賴模擬法來決定。由於本文之目的在於觀念性的探討，關於應用電腦來作模擬的技術性細節在此不作深入說明。有興趣的同學日後在修模擬學的時候可以把這個問題當作一個小型的學習計劃(term project)。

四、獲獎率的下限

雖然喊帶跑的獲獎率的正確數值估算有賴電腦的模擬，其最佳獲獎率的下限(lower bound)可以經由一個假設的(hypothetical)喊帶跑模型計算出來。

我們現在假設喊帶跑的遊戲規則稍有更改。變更後的遊戲把四個位數分別以紅、藍、黃、白四種顏色區別，每種顏色各設一套(1至9)號碼牌供一個跑者選取，每個跑者不重複選取他選過的號碼。因此，在這個假想的喊帶跑模型裏，每次選號各個跑者分別在其對應的顏色牌裏選取，與其他跑者的選號互不相關。換言之，在假設模型裏我們可能會有同一數字出現在不同位數，如 3212、7676 等。這些情形在實際的遊戲裏是不會發生的，所以實際喊帶跑的獲獎率一定要比這個假設模型的獲獎率高。因此我們可以用這個假設模型的結果當作實際上獲獎機率的下限參考。

前述的假設模型把實際事件的相關程度作了很大的簡化。簡化後模型的獲獎率可以用二項式分配很容易的算出，結果如表一所示。利用二項式分配來求算這些機率的方法是這樣的：簡化模型裏的四個號碼互相獨立，每個號碼在跑 k 次內被猜中的機率是 $P_k = k/9$，$1 \leq k \leq 9$。四個號碼合起來而言，在跑 k 次內會被猜中 i 個號碼的機率就是

表一　喊帶跑獲獎機率下限推算表

跑次	揭曉0字	揭曉1字	揭曉2字	揭曉3字	全中獲獎
1	.6243	.3122	.0585	.0049	.0002
2	.3660	.4182	.1792	.0341	.0024
3	.1975	.3951	.2963	.0988	.0123
4	.0953	.3048	.3658	.1951	.0390
5	.0390	.1951	.3658	.3048	.0953
6	.0123	.0988	.2963	.3951	.1975
7	.0024	.0341	.1792	.4182	.3660
8	.0002	.0049	.0585	.3122	.6243
9	0	0	0	0	1

$\binom{4}{i}(P_k)^i(1-P_k)^{4-i}$，$i \leq k$。舉例而言，跑6次內會猜中一個號碼的機率就是

$4 \cdot (\frac{6}{9})(\frac{3}{9})^3 = 0.0988$。

通常在遊戲的一分鐘內，參賽的隊伍大約跑六次左右。從表一，我們可知跑六次的獲獎率下限是百分之十九點八；多跑一次的話，跑七次的獲獎率下限則幾乎是兩倍。如此，我們可以看出在節目時間內，不重複選自己試過的號碼的原則下，儘快地多跑一次得獎的機會可能就會提高一倍。這樣看來，儘量多跑幾次可能是比研究最佳選號策略更爲直接而且有效的方法。

實際的喊帶跑遊戲中，一共只有九個號碼牌供四名隊友選取。若依不重複選自己試過號碼的原則，九個號碼牌幾乎不可能不被重複地選到第九次。所以在八次內幾乎一定可以猜中獎金號碼。由此可知，實際的獲獎率可能要高過表一所列的下限值五成以上。據筆者的判斷，若採用選號策略A，跑六次的實際獲獎率可能在四成五左右，跑到七次的獲獎率可能略高於六成了。當然，這些「有理的猜測（educated guess）」，仍有待進一步的驗證。

五、討論與結語

許多在我們日常生活中接觸的現象，看似簡單卻蘊含有其趣味的道理。我們若能保持敏銳的觸角，當不難發現許多問題可用機率模型或其他數量方法來分析。

本文中討論兩個機率分析的實例。強棒出擊是一個較簡單的問題，喊帶跑的複雜程度則必須賴模擬法才能正確地估算各種選號策略下的獲獎率。值得一提的是，喊帶跑可以「遊戲」的方式來進行模擬，不一定要依賴電腦。進行的方式可以兩人一組，一人設定獎金號碼給另一人猜。猜號的一方，可依不同的策略來選號猜號。如此重複進行一百次左右，可以得到一個小樣本的模擬結果。

選號策略的高下，我們也可以用模擬法評鑑出來。但若就實際可行性而言，除前述的策略A較爲可行外，其他兩個策略在現場實施起來都有困難。主要原因是跑者在現場兵慌馬亂之際，很難同時記住自己選過的號碼以及隊友試過的號碼。即使有超人冷靜的功夫與記憶的頭腦，很可能爲了去選某個特定的號碼阻礙了自己或隊友的速度。前面提過，若少跑一次，則平均獲獎率可能降低一半。因此單純爲了選

號的策略，而犧牲了跑次是得不償失的。

本文在有關喊帶跑的部分均是針對獲獎的機會來討論。就行為或心理學的角度來看，或許有些人並不單單只要猜中獎金，而是抱著「小獎不在乎，大獎儘力爭」的原則。對這些人而言，當可考慮以數字大小來決定選號位數與前後次序的關係。詳細的分析超出本文範圍，不再討論。

最後希望藉著本文，能使同學們體會數量方法或模型的應用並不是單純的數學計算，而是要利用數量分析的結果幫助我們去瞭解一個問題系統，進而提出更佳的解決方法或更進一步的研究方向。

——本文作者為加州大學柏克萊分校工學博士，目前運輸工程與管理系——