純多項式的k次方展開

唐翰文

定理：若

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$$
$$=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_rx^r+\cdots+a_{nk}x^{nk}$$

則
$$a_r=S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)+C(k,2)S(k,r-2n-2)+\cdots+(-1)^kC(k,k)S(k,r-nk-n)+\cdots$$

證明：

1. $f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$。首先我們求當" $r\leq n$ "時之a_r值。現令

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$$
$$=g^k(x)=g(x)\cdot g(x)\cdots g(x)$$

在k項$g(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)$中，取每一個$g(x)$中的$x^b$項（$b$爲變數等於0或1或2……或$n$）所有$k$項$g(x)$之$x^b$之乘積，其指數和等於$r$而$a_r$可視爲在此條件下符合者的總個數和。

$\because x^r=x^{b1}\cdot x^{b2}\cdot\cdots x^{bk}$（在此定義$b_1$，$b_2$，……以便區分從不同$g(x)$中取出）

$\therefore r=b_1+b_2+\cdots+b_k$

b_1，b_2，$b_2\cdots b_k$ 都是0到n的整數。可以取重覆組合求得其總個數$S(k,r)$，故得知$a_r=S(k,r)$此乃在" $r\leq n$ "條件下才能成立，與若$r>n$時b可能也會大於n與原來定義b在0到n的範圍不符，故此時

$a_r\neq S(k,r)$。

2.通式的證明

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$$
$$=\frac{(1-x)^k}{(1-x)^k}(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$$
$$=\frac{(1-x^{n+1})^k}{(1-x)^k}$$
$$=(1-x^{n+1})^k\left[\frac{1-x^{m+1}+x^{m+1}}{1-x}\right]^k$$
$$=(1-x^{n+1})^k\left[(1+x+x^2+\cdots+x^m)+\frac{x^{m+1}}{1-x}\right]^k$$
$$=(1-x^{n+1})^k(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k+x^{m+1}\cdot p(x)$$

其中$p(x)$爲一x的多項式，若我們考慮對所有$m\in N$使得$m\geq nk$。我們不難發現對$f(x)$之展開式中的任一項x^r $(0\leq r\leq nk)$必存在於$(1-x^{n+1})^k$ $(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k$ 中而不存在於 $k^{m+1}\cdot p(x)$（因$m+1>nk$）

現將原式展開

$$(1-x^{n+1})^k(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k$$
$$=(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k$$
$$-C(k,1)(1+x+x^2+\cdots+x^m)^kx^{n+1}+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^kC(k,k)(1+x+x^2+\cdots+x^m)^kx^{(n+1)k}$$

由所展開的各項觀察知 $f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$ 展開式中某項係數。

$$a_r=S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)+C(k,2)S(k,r-2n-2)+\cdots\cdots+(-1)^kC(k,k)S(k,r-nk-k) \quad \cdots\cdots(1)$$

試用範圍:

1. r 的定義範圍:(原來範圍在零到 nk)

一個有限項的多項式亦可視其爲無窮多項,只要我們將不包含此項的係數視爲零而已。因此現可將 r 定義爲負無窮大與無窮大之間的一個整數,而並不只在0到 nk 間的整數。由此我們也可得到,當 r 不在0至 nk 範圍時 a_r 必爲0。

例: $f(x)=(1+x+x^2)^4$ 展開式最高次數項只到 x^8,因此

$$a_9=S(4,9)-C(4,1)S(4,6)+C(4,2)S(4,3)-C(4,3)S(4,0)$$
$$=220-4\times 84+6\times 20-4=0$$

同理,a_{10},a_{11} a_{12} ……皆爲零。

此外我們還要求證當 $r<0$ 時,$S(k,r)$ 爲何爲零,現考慮 $-f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)^k$,由前面知 $a_r=S(k,r)$ 因展開式中無 r 小於零之項,故當 $r<0$,$S(k,r)=0$,此乃爲了使此公式在整數的範圍內更具完備性而已。

2. k 的定義範圍(原來 k 的範圍是大於零的整數)

(a)推廣成大於零的實數:我們先觀察 $f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots)^k$ 的形式,原式也等於 $\dfrac{1}{(1-x)^k}$ 而對 x 取導函數得

$$\frac{f(x)}{1!}=\frac{-k\cdot(-1)}{(1-x)^{k+1}}=\frac{k}{(1-x)^{k+1}}$$

$$\frac{f''(x)}{2!}=\frac{k\cdot(-k-1)\cdot(-1)}{(1-x)^{k+2}2!}=\frac{k(k+1)}{(1-x)^{k+2}2!}$$

$$\frac{f^{(r)}(x)}{r!}=\frac{k(k+1)(k+2)\cdots(k+r-1)}{(1-x)^{k+r}r!}$$

由泰勒展開式得

$$a_r=\frac{f^{(r)}(0)}{r!}=\frac{k(k+1)\cdots(k+r-1)}{r!}$$

$$=S(k,r)=\frac{(k+r-1)(k+r-2)\cdots k}{r!}$$

$$=C(k+r-1,r)$$

因此我們可知,k 若是大於零的實數也成立。同理,我們求 $f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$ 的某項係數時,可將 $f(x)$ 變成 $\dfrac{(1-x^{n+1})^k}{(1-x)^k}$ 將其展開,得

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^k}(1-C(k,1)x^{n+1}+C(k,2)x^{2n+2}\cdots+(-1)^kC(k,k)x^{kn+k})$$
$$=(1+x+x^m+\cdots)(1-C(k,1)x^{n+1}+C(k,2)x^{2n+2}+\cdots\cdots)$$

因我們已知當 k 是大於零的實數,同樣適合於二項式 $(1-x^{n+1})^k$ 的展開,因此 $f(x)$ 展開式中,a_r 即等於

$$S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)+C(k,2)S(k,r-2n-2)$$

此時我們已將 k 的範圍擴展到實數(大於零)。

(b) k 也可爲小於零的實數:當 $k<0$ 時對於(a)部分的泰勒展開同樣適合,只是有一點我們需注意的無論 $k>0$ 或 $k\leq 0$,$f(x)$ 若以 $x=0$ 的泰勒展開絕無 $r<0$ 的項,因 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的一個支點,故由前面得,當 $r<0$ 時 $S(k,r)=0$(k 是實數)。

舉例:

1.求 $(1+x+x^2+x^3)^{3/2}$ 的泰勒展開式。

解：

$a_0=1$， $a_1=S(\frac{3}{2},1)=1.5$ ，

$$a_2=S(\frac{3}{2},2)=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{2}=\frac{15}{8}=1.1875,$$

$$a_3=S(\frac{3}{2},3)=\frac{35}{16}=2.1875,$$

$$a_4=S(\frac{3}{2},4)-C(\frac{3}{2},1)S(\frac{2}{3},0)$$
$$=0.961,$$

$$a_5=S(\frac{3}{2},5)-C(\frac{3}{2},1)S(\frac{3}{2},1)$$
$$=0.457,$$

$$\therefore (1+x+x^2+x^3)^{3/2}$$
$$=1+1.5x+1.875x^2+2.1875x^3+0.961x^4+0.457x^5$$

理論的推廣：

1. $f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$ ，使$n=0$ ，則 $f(x)-1^k=1$ 。因此常數項$a_0=1$，其餘 a_r 之值皆爲零。
$\because a_r=S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)+C(k,2)S(k,r-2n-2)\cdots\cdots$
$n=0$ 則$a_r=S(k,r)-C(k,1)S(k,r-1)+C(k,2)S(k,r-2)\cdots\cdots=0$，當然 r 是非零的整數，而 k 適合於所有的實數………(2)

學例：

(a)令 $k=3$，$r=3$，則

$$S(3,3)-C(3,1)S(3,2)+C(3,2)S(3,1)-C(3,3)S(3,0)=10-3\times6+3\times3-1=0$$

(b)令 $k=\sqrt{2}$，$r=3$ 則

$$S(\sqrt{2},3)-C(\sqrt{2},1)S(\sqrt{2},2)+C(\sqrt{2},2)S(\sqrt{2},1)-C(\sqrt{2},3)S(\sqrt{2},0)$$
$$=\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)}{6}-\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+1)}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1)}{2}\cdot\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{6}\cdot 1$$
$$=0$$

2. 使 $n=1$，則
$$f(x)=(1+x)^k$$
$$=C(k,0)+C(k,1)x+\cdots+C(k,r)x^r+\cdots+C(k,k)x^k$$
而當 $n=1$，$a_r=S(k,r)-C(k,1)S(k,r-2)+C(k,2)S(k,r-4)\cdots\cdots$此值即等於 $C(k,r)$，（k 爲實數）…………………(3)

3. 若 k 爲正整數，則 $f(x)=(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n)^k$ 可展開成
$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{nk}x^{nk}$
兩式同除 x^{nk} 得
$$\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}+\cdots\cdots+1\right)^k$$
$$=\frac{a_0}{x^{nk}}+\frac{a_1}{x^{nk-1}}+\cdots\cdots+a_{nk}$$
$$\Rightarrow\left(1+(\frac{1}{x})+(\frac{1}{x})^2+\cdots\cdots+(\frac{1}{x})^n\right)^k$$
$$=a_{nk}+\frac{a_{nk-1}}{x}+\cdots\cdots+\frac{a_0}{x^{nk}}$$
$$\Rightarrow a_0=a_{nk}\ ,\ a_1=a_{nk-1}\cdots\cdots a_r=a_{nk-r}$$
$$\Rightarrow S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)+\cdots\cdots$$
$$=S(k,nk-r)-C(k,1)S(k,nk-r-n-1)+\cdots\cdots \tag{4}$$
此番道理就如同 $C(k,r)=C(k,k-r)$ 一樣。

4. k 是正整數時，
$$f(1)=(n+1)^k=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{nk}$$
$$=\sum_{r=0}^{nk}[S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)+C(k,2)S(k,r-2n-2)-\cdots]$$

$$=\sum_{r=0}^{nk}S(k,r)-C(k,1)\sum_{r=0}^{nk}S(k,r-n-1)$$

$$+C(k,2)\sum_{r=0}^{nk}S(k,r-2n-2)-\cdots\cdots]$$

$$=S(k+1,nk)-C(k,1)S(k,nk-n-1)$$

$$+C(k,2)S(k,nk-2n-2)-\cdots\cdots$$

$$=C(k(n+1),nk)$$

$$-C((k-1)C((k-1)(n+1),nk-n-1)$$

$$+C(k,2)C((k-2)(n+1),nk-2n-2)\cdots$$

$$=C(k(n+1),k)-C(k,1)C(k-1)(n+1),k)$$

$$+C(k,2)C((k-2)(n+1),k)-\cdots\cdots$$

$$\Rightarrow n^k=C(nk,k)-C(k,1)C(nk-n,k)$$

$$+C(k,2)C(nk-2n,k)\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

已知 k 是個正整數，$f(x)$ 之展開是屬於有限項的展開，因此大於 nk 之項的係數必為零，即 $a_{nk+1}=0$ ，$a_{nk+2}=0$ ，……

由上我們也可將上述定理(5)推廣成

$$n^k=C(nk+m,k)-C(k,1)C(nk-n+m,k)$$

$$+C(k,2)C(nk-2n+m,k)-\cdots\cdots\cdots$$

（其中m為大於或等於零之整數）………(6)

如 $81=3^4=C(12,4)-C(4,1)C(9,4)$

$$+C(4,2)C(6,4)$$

$$=C(13,4)-C(4,1)C(10,4)$$

$$+C(4,2)C(7,4)-C(4,3)C(4,4)$$

$$=C(14,4)-C(4,1)C(11,4)$$

$$+C(4,2)C(8,4)-C(4,3)C(5,4)$$

5.現考慮 $f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^{-k}$

$$=\frac{1}{(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k}$$

$$=\frac{(1-x)^k}{(1-x^{n+1})^k}$$

$$=(1+x^{n+1}+x^{2n+2}+\cdots)^k(1-x)^k$$

$$=(1+x^{n+1}+x^{2n+2}+\cdots)^k(1-C(k,1)x$$

$$+C(k,2)x^2-\cdots\cdots)$$

展開各項觀察知，x^r 係數，a_r

$$a_r=S(k,\frac{r}{n+1})-C(k,1)S(k,\frac{r-1}{n+1})$$

$$+C(k,2)S(k,\frac{r-2}{n+1})$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}S(k,\frac{r-i}{n+1})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

此種表示法純粹是爲了方便起見，當然，當 $\frac{r-i}{n+1}$ 不是整數時，$S(k,\frac{r-i}{n+1})=0$，而且前面我們也知道當 $\frac{r-i}{n+1}<0$ 時，無論 k 爲何值 $S(k,\frac{r-i}{n+1})=0$。

到目前爲止，我們還沒有討論到 k 到底要是什麼數，是不是只能爲正整數？其實，上述的推導過程，完全符合 k 爲實數的定義，而且我們還可得到一恒等式，就是定理(1)和(8)所得的 a_r 值必相等。

$$\therefore a_r=S(k,\frac{r}{n+1})-C(k,1)S(k,\frac{r-1}{n+1})$$

$$+C(k,2)S(k,\frac{r-2}{n+1})-\cdots\cdots$$

$$=S(-k,r)-C(-k,1)S(-k,r-n-1)$$

$$+C(-k,2)S(-k,r-2n-2)-\cdots\cdots(9)$$

例：我們展開 $(1+x+x^2)^{-2}$，$k=2$，$n=2$

$$a_0=S(2,0/3)=S(-2,0)=1$$

$$a_1=S(2,1/3)-C(2,1)S(2,0/3)$$

$$=S(-2,1)=-2$$

$$a_2=S(2,2/3)-C(2,1)S(2,1/3)$$

$$+C(2,2)S(2,0)$$

$$=S(-2,2)=1$$

$$a_3=S(2,3/3)-C(2,1)S(2,2/3)$$

$$+C(2,2)S(2,1/3)=2$$

$$=S(-2,3)-C(-2,1)S(-2,0)$$

$$=0-(-2)=2$$

$\vdots\quad\quad\vdots\quad\quad\vdots$

$$\therefore(1+x+x^2)^{-2}=1-2x+x^2+2x^3+\cdots\cdots$$

若估計 $(1,11)^{-2}$ 可得

$$(1.11)^{-2}\doteqdot 1-0.2+0.01+0.002=0.812$$

總結：

以上我們所討論到的公式定理有

(1) $n\in N$，$k\in R$，$r\in z$，$f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$ 展開式中，x^r 的係數

$$a_r=S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)+C(k,2)S(k,r-2n-2)\cdots\cdots$$
$$=S(-k,\frac{r}{n+1})-C(-k,1)S(-k,\frac{r-1}{n+1})+C(k,2)S(-k,\frac{r-2}{n+1})\cdots\cdots$$

若 k 爲正整數，則當 $r<0$ 或 $r>nk$ 時 $a_r=0$。

(2) $k\in R$，$r\in z-\{0\}$，

$$S(k,r)-C(k,1)S(k,r-1)+C(k,2)S(k,r-2)-\cdots\cdots=0$$

(3) $k\in R$，$r\in z$，

$$S(k,r)-C(k,1)S(k,r-2)+C(k,2)S(k,r-4)-\cdots\cdots=C(k,r)$$

(4) $k\in N$，$r\in z$，$n\in N$，

$$S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)+\cdots\cdots=S(k,nk-r)-C(k,1)S(k,nk-r-n-1)$$

……即 $a_r=a_{nk-r}$

(5) $n\in N$，$k\in N$，$m\in N\cup\{0\}$

$$n^k=C(nk+m,k)-C(k,1)C(nk-n+m,k)+C(k,2)C(nk-2n+m,k)-\cdots\cdots$$

理論上一點應用：

重覆做一試驗 n 次（n 次獨立相同試驗），其各種不同之成功（或失敗）次數的機率爲二項機率分佈。今考慮另一問題：重覆做一試驗直至 k 次成功爲止。令 p 表試驗失敗之機率，$1-p$ 表成功之機率，而令 X 表第 k 次成功以前失敗之次數，則 $X=x$ 之機率爲

$(1-p)^k p^x S(k,x)$。

我們要證明此一公式不難，現已知試行的失敗次數的變數 x，且最後一次的試行必定成功，因此最後一次以前的試行次數全部有 $k+x-1$ 次，其中包括 $k-1$ 次的成功及 x 次的失敗，其排列數有 $C(k+x-1)$ 或 $C(k+x-1,k-1)$，而每一種的排列情形機率都爲 $p^x(1-p)^k$ 故試行 x 次失敗的機率爲 $C(k+x-1,x)p^x(1-p)^k$ 亦即爲 $S(k,x)p^x(1-p)^k$。

現暫以 a_x 表示 $(1-p)^k p^x S(k,x)$，我們不難發現此 a_x 即是 $f(y)=(1-p)^k(1+py+p^2y^2+\cdots+p^ny^n+\cdots)^k$ 展開式中 y 的 x 次方的係數，而且 x 由零到無窮大。我們可由此來驗證機率和等於 1。

$$\sum_{x=0}^{\infty}S(k,x)p^x(1-p)^k=(1-p)^k\sum_{x=0}^{\infty}p^xS(k,x)$$
$$=(1-p)^k(1+p+p^2+\cdots+p^n+\cdots)^k$$
$$=(1-p)^k\cdot(\frac{1}{1-p})^k=1$$

例 1：投擲一公正的銅板，投到出現 5 次反面爲此，求在此情形下投出 0，1，2，3……各次正面的機率。

解：$p=\frac{1}{2}$，$k=5$

$$a_0=(1-\frac{1}{2})^5(0.5)^0S(5,0)=0.03125,$$
$$a_1=(1-\frac{1}{2})^5(0.5)^1S(5,1)=0.078125,$$
$$a_2=(1-\frac{1}{2})^5(0.5)^2S(5,2)=0.1172。$$

X 的期望值

$$E(x)=\sum_{i=0}^{\infty}i(1-p)^kp^iS(k,i)$$
$$=(1-p)^k\sum_{i=0}^{\infty}p^i\frac{(k+i-1)!}{(i-1)!(k-1)!}$$
$$=(1-p)^k kp\sum_{i=0}^{\infty}p^{i-1}S(k+1,i-1)$$
$$=kp(1-p)^k(1+p+p^2+\cdots)^{k+1}=\frac{kp}{1-p}。$$

變異數

$$\mathrm{Var}(x)=E(x^2)-E^2(x)$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty} i^2(1-p)^k p^i S(k,i)-\frac{k^2p^2}{(1-p)^2}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)(1-p)^k p^i S(k,i)$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty} i(1-p)^k p^i S(k,i)-\frac{k^2p^2}{(1-p)^2}$$

$$=\frac{k(k+1)p^2}{(1-p)^2}+\frac{kp}{(1-p)}-\frac{k^2p^2}{(1-p)^2}$$

$$=\frac{kp}{(1-p)^2}\text{，}$$

$$\therefore \sigma^2=\frac{kp}{(1-p)^2} \Rightarrow \sigma=\frac{\sqrt{kp}}{(1-p)}$$

卜式分配（Poisoin distribution）

現考慮 $\lambda=kp$ 爲一定値，則 $p=\frac{\lambda}{k}$ 因此

$$a_x=(1-\frac{\lambda}{k})^2(\frac{\lambda}{k})^x\frac{(k+x-1)!}{x!(k-1)!}$$

當 $k\to\infty$ 則有

$$a_x=\lim_{k\to\infty}(1-\frac{\lambda}{k})^k(\frac{\lambda}{k})^x\frac{(k+x-1)!}{x!(k-1)!}$$

$$\Rightarrow a_x=\frac{\lambda^x}{x!}\lim_{k\to\infty}(1-\frac{\lambda}{k})^{(-k/\lambda)(-\lambda)}$$

$$\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{(k+x-1)!}{k^x(k-1)!}$$

$$\Rightarrow a_x=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$ 此即爲卜式分配。

例 2：某生丟一粒骰子，直到丟出兩次 1 點才肯罷休，問全部丟出 12 次的機率多大？平均丟多少次？標準誤差？

解：(1) $k=2$，$p=\frac{5}{6}$，

$$a_{12}=(1-\frac{5}{6})^2(\frac{5}{6})^{10}S(2,10)$$

$=0.049$，機率 0.049。

(2) $$\mu=\frac{kp}{1-p}=\frac{2\cdot\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}}=10$$

$n=10+2=12$，平均投 12 次。

(3) $\sigma^2=\mathrm{Var}(x+2)=\mathrm{Var}(x)$

$$\Rightarrow \sigma=\frac{\sqrt{kp}}{1-p}=\frac{\sqrt{\frac{10}{6}}}{1-\frac{5}{6}}=\sqrt{60}=2\sqrt{15}\text{。}$$

例 3：若要從一工廠中拿出 1000 個合乎樣品規格的產品，不合乎規格的即予淘汰，直至拿到 1000 個合乎規格的產品爲止，假設原不合格產品佔總成品之 0.5％且視爲不變，問拿到不合格產品低於 5 個的機率。

解：$\lambda=1000\cdot 0.5\%=5$

$$\sum_{\lambda=0}^{4}\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}=e^{-5}(1+5^1+\frac{5^2}{2}+\frac{5^3}{6}+\frac{5^4}{24})$$

$=0.44$

故機率爲 0.44

～本文作者就讀於交大管研所～