多項式問題研究進展

楊重駿

一年前在數播決定刊登拙文"一些有關多項式的問題"〔1〕時，承審核先生表示希望今後能再報導些此類問題的研究進展。現似乎是有了些相類似的問題及再作報導的時候了。但撰寫本文另一個更重要的心意是希望再次引起國內數學愛好者對這類人人都可插手來做的問題的興趣及共鳴，作進一步的研究。

首先要報出的是在文〔1〕中介紹了下面一研究問題：

臆測 1 設 p，q 爲兩同次的非常數多項式，若 $p(p-1)=0 <=> q(q-1)=0$（不計重複度，即使 $p(p-1)=0$ 的集與使 $q(q-1)=0$ 的集相同）則或

$$p\equiv q \quad 或 \quad p+q\equiv 1$$

（不計重複度：例如 $x^2(x-1)(x+2)^3=0$ 與 $x(x-1)^2(x+2)^5=0$ 有相同的根）。

迄今爲止，仍無人提供一個證明或反證。相信這個問題的困難度不可能與費馬最後定理（$x^n+y^n=z^n$），$n\geqslant 3$ 無正整數解）或最近被證明的有近 70 年歷史的Bieberbach臆測可相提並論的。相信數播的讀者中一定會有人接受這個問題的挑戰，而下決心把它解決。這也將是撰寫文〔1〕及本文的最大報償。

本文所要討論的是筆者在 1977 年刊登在羅馬尼亞的一篇文章〔2〕中的一個結果。

命題 1： 設 $p(x)$ 及 $q(x)$ 爲兩個複變數 x 的多項式。若

$$p=0 <=> q=0 \quad （不計重複度）$$

及

$$p'=0 <=> q'=0 \quad （不計重複度）$$

則必存在有兩個正整數 m，n 使得

$$p^m(x)\equiv q^n(x)\text{；}x\text{ 表複變數。}$$

但這個結果在 1981 年承一位以色列的數學家 M. Roitman 在他的一份研究報告〔3〕中指出文〔2〕中對上命題的證明不完全正確，事實上是不一定成立的。他並對此問題作了一個仔細的研究。本文主要就是把文〔3〕中的結果作一報導，以饗讀者。

爲了解說方便起見，我們先介紹一些記號及已知的事實。我們以 C 表所有複數的集合，$C[x]$ 表所有具複數係數的複變數 x 的多項式的集合。我們稱一個首項係數爲 1 的多項式爲"首一多項式"（monic polynomiol），這也是我們將所要討論的多項式。

事實 1： 設 p 及 q 爲兩首一多項式，則存在有兩整數 m，n 使得 $p^m=q^n$ 的充要條件（<=>）是 p，q 同爲 $C[x]$ 中某首一多項式的冪次

（即 $p=s^{\alpha}$，$q=s^{\beta}$，s 爲首一多項式，α，β 爲正整數），這時 p 與 q 必有相同的根（不計重複度）。

記號：$p\sim q$ 是表示 $p^m=q^n$ 成立，m，n 爲兩正整數。

現以下我們都假設 p，q 爲 $C[x]$ 中非常數的首一多項式並且具有相同的根：x_1，x_2，$\cdots$，x_k，其中只要 $i\neq j$，就 $x_i\neq x_k$。我們可設

$$p(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)^{m_i},$$

$$m_i,\ i=1,2,\cdots k \text{ 皆爲正整數} \tag{1}$$

$$q(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)^{n_i},$$

$$n_i,\ i=1,2,\cdots k \text{ 皆爲正整數} \tag{2}$$

則不難見

$$p\text{ 的次數}=\deg p=\sum_{i=1}^{k}m_i$$

$$q\text{ 的次數}=\deg q=\sum_{i=1}^{k}n_i$$

事實2：$p(x)$ 的導函數 $p'(x)$ 可表爲

$$p'(x)=\deg p\left(\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)^{m_i-1}\right)u(x) \tag{3}$$

其中 $u(x)$ 爲首一多項式次數爲 $k-1$ 且與 $p(x)$ 互質（無共同因子或根）。這個事實是由於 $p(x)$ 的一個具重複度爲 m_i 的根 x_i，在 $p'(x)$ 中見有重複度 m_i-1。因此 $p'(x)$ 必具有因有 $\prod_{i=0}^{k}(x-x_i)^{m_i-1}$ 其它因子無一可與 $p(x)$ 的相同。現

$$\sum_{i=1}^{k}(m_i-1)=\deg p-k$$

而 $p'(x)$ 的次數爲 $\deg p-1$。由式(1)有

$$\deg p-1=(\deg p-k)+\deg u$$

因而 $\qquad \deg u=k-1$

同樣我們有

事實3：$q(x)$ 的導函數 $q'(x)$ 可表爲

$$q'(x)=\deg q\left(\prod_{i}^{k}(x-x_i)^{n_i-1}\right)v(x) \tag{4}$$

其中 $v(x)$ 爲首一多項式，次數爲 $k-1$ 且與 $q(x)$ 互質。

綜合事實2與3得到下面一個常會被用到結果。

事實4：若多項式 p，q 有相同的 k 個根（不計重複度），則相應的 $u(x)$ 與 $v(x)$ 爲等次的且次數爲 $k-1$。

現令

$$F(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)$$

則由此及式(1)及(3)得

$$\frac{p'(x)}{p(x)}=\deg p\cdot\frac{u(x)}{F(x)}=\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{x-x_i} \tag{3}$$

於是對任何 j，上式兩邊乘以 $(x-x_j)$：$1\leq j\leq k$，下式成立

$$\deg p\,\frac{u(x)}{\prod_{i\neq j}(x-x_i)}=m_j+\sum_{\substack{1\leq i\leq k\\ i\neq j}}m_i\frac{x-x_j}{x-x_i}$$

上式中以 $x=x_j$ 代入得

$$m_j=\deg p\,\frac{u(x_j)}{\prod_{i\neq j}(x_j-x_i)}=\deg p\,\frac{u(x_j)}{F'(x_j)}$$

同法施之于 v 及 q，因而我們立即有

事實5： $\frac{v(x_j)}{u(x_j)}=\frac{\deg p}{\deg q}\cdot\frac{n_j}{m_j}$ 爲一正有理數。

記號： 我們以 $p\rightarrow q$ 表示 p' 所有非 p 的根皆爲 q' 的根，這也就是說所有 u 的根皆爲 v 的根。

我們以 $p\leftrightarrow q$ 表示 u 與 v 有相同的根。

定理1（參看〔3〕）**：** 下列幾個條件爲等價的（即互爲充要條件）

(i) $p\sim q$

(ii) 式(1)及式(2)中所涉及的序列 $\{m_1, m_2, \cdots, m_k\}$，$\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$ 滿足下比例關係：

$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2}=\cdots\cdots=\frac{m_k}{n_k}$$

(iii) 有一常數 α（其事實上必得爲 $\frac{\deg p}{\deg q}$）存在，使得

$$\frac{p'}{p}=\alpha\frac{q'}{q}$$

(iv) $u=v$

證明：

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) 是很明顯的。

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)

（是因爲 $\frac{p'}{p}=\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{x-x_i}$ 及 $\frac{q'}{q}=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{x-x_i}$）

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) 是因 $\frac{p'}{p}=\deg p\frac{u}{F}$

及 $\frac{q'}{q}=\deg q\frac{v}{F}$

由定理1立即可得下面系理

系理1： 若所有 p 的根皆爲實根且 $p\rightarrow q$，則 $p\sim q$。

證： 由Rolle氏定理：一連續具導函數的實函數 f，在 f 的兩個實根間必有其導函數 f' 的一個根。（參看圖1）

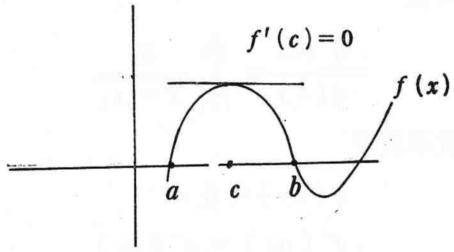

圖1

因此在 p 的 k 個實根 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k$ 中存在 p' 的 $k-1$ 個實根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}$，其滿足

$$x_1<\alpha_1<x_2<\alpha_2<\cdots<\alpha_{k-1}<x_k。$$

現由事實4知 u，v 爲 $k-1$ 次，故 $\alpha_1\cdots\alpha_{k-1}$ 爲 u 所有的根，加上 $p\rightarrow q$ 故 $u\equiv v$，因而由定理1得 $p\sim q$。

由上面系理的證明可見只要 $p\rightarrow q$ 及所有 u 的根皆爲單重根時 $p\sim q$，此一結果並不是什麼創新之見，本文要介紹的是此結果的加強結論，爲此先介紹下面一輔理。

輔理1： 設 R 及 v_1 爲兩同次的首一多項式，且 $v_1\mid R$（即 v_1 爲 R 的因子），則

$$\sum_{i=1}^{k}n_i\frac{R(x_i)}{v_1(x_i)}=\sum_{i=1}^{k}n_i=\deg q$$

證： 設 $v_1(x)=\prod_{j=1}^{s}(x-\alpha_j)^{r_j}$，$\alpha_j\in C$，

且若 $i\neq j$，$\alpha_j\neq\alpha_i$，

則有複數 β_{jt}（$1\leq j\leq s$，$1\leq t\leq s_j$），使得

$$\frac{R(x)}{v_1(x)}=1+\sum\frac{\beta_{jt}}{(x-\alpha_j)^t}$$

於是

$$\sum n_i\frac{R(x_i)}{v_1(x_i)}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}n_i+\sum_{1\leq j\leq s,\,1\leq t\leq r_j}\beta_{jt}/\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{(x_i-\alpha_j)^t}\right]$$

今由

$$\frac{q'(x)}{q(x)}=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{x-x_i} \tag{6}$$

及事實若

$$\begin{aligned} q(\alpha_j) &\neq 0, \\ q'(\alpha_j) &= q''(\alpha_j) \\ &= \cdots\cdots \\ &= q^{(r)}(\alpha_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

則 $$\frac{d^{r-1}}{dx^{i-1}}\left(\frac{q'(x)}{q(x)}\right)\Bigg|_{x=\alpha}=0$$

從而由式(6)對任何 j 及 t：$1\leq j\leq s$，$1\leq t\leq r_j$，可有

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{(x_i-\alpha_j)^t}=0 \tag{7}$$

(7)代入(5)得

$$\sum_{i=1}^{k}n_i\frac{R(x_i)}{v_1(x_i)}=\sum_{i=1}^{k}n_i$$

輔理 1 得證。

定理2：u，v 如上面所定，如 $u\mid v^2$，則 $p\sim q$，特別當所有 u 的根的重複度 ≤ 2 及 $p\to q$，則 $p\sim q$。

證：由假設 $u\mid v^2$，設 $u=u_0T$ 及 $v=v_0T$，其中 u_0，v_0 及 T 皆爲首 1 多項式，$T=(u,v)$（即 u，v 的最大公因式）不難得 $u_0\mid v_0^2T$，$u_0\mid T$，$u_0\mid v$ 及 $\frac{v}{u}=\frac{v_0}{u_0}$，令

$$q_i=\frac{v(x_i)}{u(x_i)}, \quad i=1,2,\cdots,k$$

由輔理 1 得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}n_iq_i &= \sum_{i=1}^{k}n_i\frac{v_0(x_i)}{u_0(x_i)} \\ &= \sum_{i=1}^{k}n_i \end{aligned} \tag{8}$$

而另一方面

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{q_i}=\sum_{i=1}^{k}n_i\frac{u(x_i)}{v(x_i)}=\sum_{i=1}^{k}n_i \tag{9}$$

由式(8)及(9)得

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{q_i}=\sum_{i=1}^{k}n_iq_i=\sum_{i=1}^{k}n_i$$

但 q_i 皆爲正有理數，故上式唯有在所有的

$$q_i=1 \quad (i=1,2,\cdots,k)$$

才能成立。

而 $$q_i=\frac{\deg p\ n_i}{\deg q\ m_i} \quad i=1,2,\cdots,k$$

因而

$$\{m_1,m_2,\cdots,m_k\} \text{ 與 } \{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$$

成比例，故由定理 1，$p\sim q$。定理得證。

註：我們不難證明，若 $q\to p$，則總可找到一正整數 g 使得 $v\mid u^g$，我們上面證明的是，若 $g\leq 2$，則 $p\sim q$。但在 $g\geq 3$ 時，可證明 $p\sim q$ 不一定成立。

定理 2 的一個推廣如下：

定理3：設 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 爲互異的數

$$u(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{s_i}$$

$$v(x)=\sum_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{t_i}$$

$$(s_i\geq 0,\ t_i\geq 0)$$

假使整數 s_i-t_i（$1\leq i\leq r$）有一共同的公因子 $d\geq 2$ 則 $p\sim q$。

證：由假設我們有

$$\frac{u(x)}{v(x)}=\left[\frac{u_0(x)}{v_0(x)}\right]^d$$

其中 u_0，v_0 爲同次的首一多項式。由輔理 1，置 $q_i=\frac{v_0(x_i)}{u_0(x_i)}$ 我們得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}n_i(q_i^d+1) \\ &=\sum_{i=1}^{k}n_i(q_i^{d-1}+q_i)\end{aligned} \tag{10}$$

我們需要下面事實：

輔理2： 對任何複數 c 及正整數 d，若 c^d 爲正實數，則

$$c^d+1 \geqslant |c|^{d-1}+|c| \tag{11}$$

$$\geqslant Re\,(c^{d-1}+c) \tag{12}$$

$Re\,w$ 表複數 w 的實數部份。

註： 不等式(12)等號成立的充要條件是 $c=1$

證： 對任何正實數 a，$(a^d-1)(a-1)\geqslant 0$。故不等式(11)成立。不等式(12)及註的成立不難證明。

現回到等式(10)。由輔理2，由兩邊取實數部份可推得式(10)成立的必要條件爲對所有的 i，

$$\begin{aligned} Re\,n_i(q_i^d+1) &= n_i(q_i^d+1)\\ &= Re\,n_i(q_i^{d-1}+q_i)\\ &= n_i(q_i^{d-1}+q_i) \end{aligned} \tag{13}$$

成立。注意此處的 q_i 可爲複數，但 q_i^d 爲正實數！

于是由式(13)得

$$q_i^d+1=q_i^{d-1}+q_i$$

或

$$(q_i^{d-1}-1)(q_i-1)=0$$

因而

$$q_i=1 \quad \text{或} \quad q_i^{d-1}=1$$

即使 $q_i^{d-1}=1$，由 q_i^d 爲正實數仍可得 $q_i=1$，故不論如何

$$q_i=1,\ i=1,2,\cdots,k$$

因而由定理1。得 $p\sim q$。

定理4： 設 $u=u_1 s$，$v=v_1 s$

其中 s 爲 u，v 中具有同重複度的根的乘積，（即 s 爲具形式 $(x-\alpha)^t$ 的因子乘積，α 爲 u，v 的根，且具有共同重複度 t 者）。若 $p\leftrightarrow q$ 及 u_1 至多有兩個不同的根，則 $p\sim q$。

證： 若 $u_1\equiv 1$（爲一常數）或 u_1 僅有一個根，則 $u=v$，故 $p\sim q$。現若 u_1 有兩個根，α_1 及 α_2；

$$u_1(x)=(x-\alpha_1)^{t_1}(x-\alpha_2)^{t_2}$$

$$v_1(x)=(x-\alpha_1)^{s_1}(x-\alpha_2)^{s_2}$$

則 $\qquad s_1+s_2=t_1+t_2$

或 $\qquad s_1-t_1=t_2-s_2$

故若 $|s_1-t_1|>1$，則由定理2得 $p\sim q$。若 $|s_1-t_1|\leq 1$，則 $u\,|\,v^2$。

由定理1仍得 $p\sim q$。

定理5： p，q 及 u，v，u_1，v_1 等如定理3中所述。若 $p\leftrightarrow q$ 成立及 $\deg u_1\leq 5$，則 $p\sim q$。

證： 我們用反證法，即假設在 $\deg u_1\leq 5$ 之下，但 $p\sim q$ 不成立。設 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i$ 爲 u_1 所有的不同的根，

$$u_1(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{s_i}$$

$$v_1(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{t_i}$$

則由定理3，存在有一正整數 i_0，$1\leq i_0\leq r$，使得 $t_{i_0}>2s_{i_0}$，因而 $t_{i_0}>3$。依據定理4，$r\geqslant 3$，所以當 $\deg v_1\leq 5$ 時，$v_1(x)$ 正好有3個根，其重複度分別爲3，1，1。同理 $u_1(x)$ 也有同樣結果。故對任何 u 的根 α

$$s\equiv t \pmod 2$$

其中 s 及 t 分別爲 α 爲 u 及 v 的根的重複度。現由定理2，我們仍得 $p\sim q$。故定理得證。

由上面的定理我們看到若 $p(x)$ 的不同的根的數目 $k\leq 6$ 及 $p\leftrightarrow q$ 成立，則 $p\sim q$。

在上面討論了許多 $p=0 \Longleftrightarrow q=0$，及 $p'=0 \Longleftrightarrow q'=0$，在某些附加的條件下可得 $p\sim q$ 之結論。現最後大略說明一般並不一定可得 $p\sim q$ 的結論。

定理6： 我們可建造兩個首一多項式，p，q，其皆具整數係數，且 p 與 q 有相同的根，p' 與 q' 有相同的根，但 $p\sim q$ 不成立。

證： 我們如能找到兩個有理數爲係數的多項式 p，q 滿足所要求的條件就可以了。特別我們若能找到一個具有理數爲係數的首1多項

式 $p(x)$，其滿足

$$x^4(x-1)(x+5) \mid p'(x)$$

及使得對所有 $p(x)$ 的根 x_i，$i=1,2,\cdots k$，

$$\frac{(x_i-1)^2(x_i+5)}{x_i} = q_i \tag{14}$$

q_i 爲正有理數且至少有兩個值不相等。

因如果我們可建造如此的一多項式 $p(x)$：

$$p(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-x_i)^{m_i}$$

及

$$q(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-x_i)^{n_i}$$

其中

$$n_i = d\frac{m_i q_i}{\deg p}，d \text{ 爲一正整數} \tag{15}$$

使得 n_i $(1 \le i \le k)$ 皆爲整數。

現依據輔理1，我們有

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = \frac{d}{\deg p}\sum_{i=1}^{k} m_i \frac{(x_i-1)^2(x_i+5)}{x_i^3}$$

$$= \frac{d}{\deg p}\cdot \deg p$$

$$= d$$

故 $d = \deg q$

及對所有的 i

$$\frac{v(x_i)}{u(x_i)} = q_i = \frac{(x_i-1)^2(x_i+5)}{x_i^3}.$$

現因

$$v_0(x) = \frac{u(x)(x-1)^2(x+5)}{x^3}.$$

爲一次數 $(k-1)$ 的多項式，且滿足對任何 i，$1 \le i \le k$

$$v_0(x_i) = v(x_i) = q_i u(x_i)$$

因此

$$v_0(x) = v(x) \quad \text{及} \quad p \leftrightarrow q$$

現我們取 p^2 代 p，q^2 代 q，則不難見 p^2 及 q^2 有相同的根，$(p^2)'$ 及 $(q^2)'$ 亦有相同的根。而 p^2 及 q^2 間無 $p^2 \sim q^2$ 之關係，是由於條件(14) k 個 q_i 取的值至少有兩個爲不同的，及式(15)可得

$$\{m_1, \cdots m_k\} \text{ 與 } \{n_1, n_2, \cdots n_k\}$$

不可能逐項成比例。證明到此告結束。

在證明上定理，條件(14)的成立是主要關鍵，却並沒給予證明，原因是由於所用的步驟涉及一些較冗長的向量及矩陣的計算。有興趣的讀者可向M. Roitman教授 (Haifa university Isreal) 索取〔3〕有關的論文。

最後筆者在此提出一個似乎比命題1較難的二個問題：

(1) 設 p，q 爲兩多項式，n 爲一個大於1但小於 $\min(\deg p, \deg q)$ 的正整數，

若 $p=0 \iff q=0$

及 $p^{(n)}=0 \iff q^{(n)}=0$

則 p，q 有何關係？

(2) 有無兩多項式 p，q，其至少皆有二個不同的根，而滿足

$p=0 \iff q=0$

及 $p^{(n)}=0 \iff p^{(m)}=0$

m，n 爲某兩個不等的正整數？

參考文獻

1. 楊重駿"一些有關多項式的問題"，數播第八卷第二期，1984 pp. 43-47.
2. Chung-Chun Yang, "A Problem on Polynomials", *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, XXII (1977), pp. 595-598.
3. M. Roitman, On Roots of Polynomials and their derivatives, Dept of Math. *Haifa mirersity. Report* # 36, Sept 1981.

——本文作者任職於美國海軍研究實驗所——