有向直線(下)

許振榮
呂素齡

§7 拋物線之點方程式和線方程式

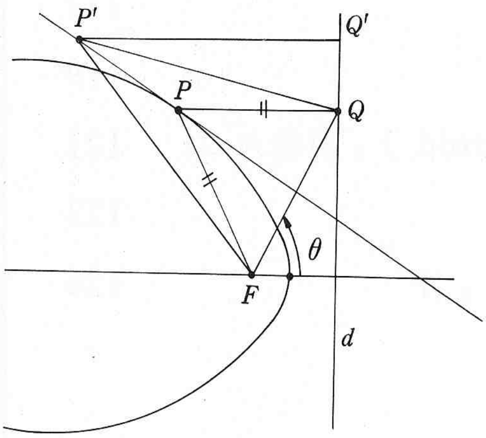
我們知道：如果F爲一定點，d爲不經過F之一定直線，滿足

線段$\overline{FP}$之長度$=P$至d之距離（設爲正）

之點P的軌跡爲一拋物線。設P爲拋物線上任一點，從點P至直線d所作的垂線之垂足爲Q，則$\overline{PF}=\overline{PQ}$成立。故$P$在線段$FQ$之垂直平分線上。

設P'爲此垂直平分線上P以外的任一點，則$FP'=P'Q$。故如果Q'爲從P'至直線d所作的垂線之垂足，則$P'Q'<P'Q=FP'$，故點P'不在所考慮的拋物線上。故FQ之垂直平分線和拋物線僅有一公有點P，故其爲拋物線之一切線。

現在來求此切線之方程式。



第12圖

設以F爲原點，以經過F與所給直線d平行的直線爲y軸，以經過F與直線d垂直的直線爲x軸。又設F至準線（即所與直線d）之距離爲$2p$，則此拋物線之方程式爲

$$y^2=4p(p-x)$$

準線之方程式爲$x=2p$，又拋物線之頂點的座標爲$(p, 0)$，假設直線FQ與x軸所成之角爲θ，線段FQ之長度（正）爲ρ，則表示點Q之複數爲

$$(7.1)\quad a=2\rho e^{i\theta}=2\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$$

設點P之座標爲$z=x+iy$，則

$$(7.2)\quad a=2p+iy \quad 故 \quad \bar{a}=2p-iy$$

而

$$(7.3)\quad \frac{\bar{a}}{a}=\frac{2p-iy}{2p+iy}\equiv t^2\ (-t^2)$$

把此值置爲t^2（或$-t^2$），則得

$$(7.4)\quad \frac{4p}{2p+iy}=1+t^2\ (或 1-t^2)$$

故

$$(7.5)\quad a=2p+iy=\frac{4p}{1+t^2}\ (或 \frac{4p}{1-t^2})$$

線段FQ之垂直平分線，即在點P處的切線之方程式爲

$$(7.6)\quad t^2z+\bar{z}=at^2 \quad 或 -t^2z+\bar{z}=-at^2$$

因爲 $a=\dfrac{4p}{1+t^2}$ （或$\dfrac{4p}{1-t^2}$）

故切線之方程式爲

$$t^2z+\bar{z}=\frac{4pt^2}{1+t^2}$$

或
$$t^2z-\bar{z}=\frac{4pt^2}{1-t^2}$$

即

$$(7.7)\quad tz+\frac{1}{t}\bar{z}=\frac{4pt}{1+t^2}$$

即
$$tz-\frac{1}{t}\bar{z}=\frac{4pt}{1-t^2}$$

故此為拋物線之所有切線之方程式，即為拋物線之線方程式。現在想求線方程式

$$tz+\frac{1}{t}\bar{z}=\frac{4pt}{1+t^2}$$

所表的拋物線之點方程式。依 §6 之討論，可先求此式對 t 之微分，得

$$z-\frac{1}{t^2}\bar{z}=\frac{4p(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

乘 t 之此式得

$$(7.8)\qquad tz-\frac{1}{t}\bar{z}=\frac{4pt(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

所與式為

$$(7.7)\qquad tz+\frac{1}{t}\bar{z}=\frac{4pt}{1+t^2}$$

把此二式邊邊相加得

$$2tz=\frac{4pt}{1+t^2}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)$$

$$=\frac{8pt}{(1+t^2)^2}$$

故得

$$(7.9)\qquad z=\frac{4p}{(1+t^2)^2}$$

此式亦可求之如下：

由拋物線之方程式 $y^2=4p(p-x)$ 可得

$$(7.10)\qquad x=\frac{4p^2-y^2}{4p}$$

故 $$z=x+iy=\frac{4p^2-y^2+4piy}{4p}$$

$$=\frac{(2p+iy)^2}{4p}$$

$$=\frac{1}{4p}\left(\frac{4p}{1+t^2}\right)^2$$

$$=\frac{4p}{(1+t^2)^2}$$

§8 例 題

拋物線可由四個條件〔一拋物線可由其焦點和準線來決定。焦點之位置需要二條件（即其座標），準線之位置需要二條件（焦點至準線之距離和焦點至準線之垂線之方向），故一拋物線需要四條件來決定。〕來決定，故可由其四條切線來唯一地決定。所以要討論有向4-直線時，我們可視其四有向直線切於一拋物線，而把此四有向直線以拋物線之切線的方程式來表之。

例：用拋物線切線之表示法，求有關 3-直線之內心之座標，並證明給了有向 4-直線時，從這有向 4-直線所得的四個有向 3-直線之四個內心在同一圓周上。

解：設所給有向 4-直線 $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$ 所決定之拋物線之線方程式為（設 $4p=1$）

$$(8.1)\qquad t^2z+\bar{z}=\frac{t^2}{1+t^2}$$

又有向 3-直線 $\{t_1,t_2,t_3\}$ 所決定的圓的線方程式為

$$t^2(z-a)+(\bar{z}-\bar{a})=2\rho t$$

即

$$(8.2)\qquad t^2z+\bar{z}-t^2a-\bar{a}-2\rho t=0$$

由上二式消去 z，$\bar{z}$ 即把(8.1)式代入(8.2)式可得

$$-\frac{t^2}{1+t^2}+t^2a+\bar{a}+2\rho t=0$$

即

$$(8.3)\qquad at^4+2\rho t^3+(a+\bar{a}-1)t^2+2\rho t+\bar{a}=0$$

此方程式之四根為上述拋物線和圓之共同的切

線。已知拋物線和圓共同的切線為 t_1, t_2, t_3。今設其第4條共同切線為 t_4'，並設

$$\sigma_1' = t_1 + t_2 + t_3 + t_4'$$
$$\sigma_2' = t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 + t_1t_4' + t_2t_4' + t_3t_4'$$
$$\sigma_3' = t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4' + t_1t_3t_4' + t_2t_3t_4'$$
$$\sigma_4' = t_1t_2t_3t_4'$$

為 t_1, t_2, t_3, t_4' 之初等對稱函數，則有

(8.4) $$\sigma_1' = -\frac{2\rho}{a}, \quad \sigma_2' = \frac{a+a-1}{a}$$
$$\sigma_3' = \frac{-2\bar{\rho}}{a}, \quad \sigma_4' = \frac{\bar{a}}{a}$$

之關係。從第一，第三式可得 $\sigma_1' = \sigma_3'$，即

(8.5) $$s_1 + t_4' = s_3 + t_4 s_1$$

此處
$$s_1 = t_1 + t_2 + t_3$$
$$s_2 = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1$$
$$s_3 = t_1t_2t_2$$

為 t_1, t_2, t_3 之初等對稱函數。由此式可得

(8.6) $$t_4' = \frac{s_3 - s_1}{1 - s_2}$$

又從(8.4)之第二式，第四式可得

(8.7) $$\sigma_2' = 1 + \frac{\bar{a}}{a} - \frac{1}{a} = 1 + \sigma_4' - \frac{1}{a}$$

故 $\frac{1}{a} = 1 + \sigma_4' - \sigma_2'$ 即

(8.8) $$a = \frac{1}{1 - \sigma_2' + \sigma_4'}$$

因為 $\sigma_2' = s_2 + t_4' s_1$，$\sigma_4' = s_3 t_4'$，可得

(8.9) $$a = \frac{1}{1 - s_2 + t_4'(s_3 - s_1)}$$

把上求的 t_4' 之值代入於此式中，可得

(8.10) $$a = \frac{1}{1 - s_2^1 + \dfrac{(s_3 - s_1)^2}{1 - s_2}}$$
$$= \frac{1 - s_2}{(1 - s_2)^2 + (s_3 - s_1)^2}。$$

上式分母為

$$(1 - s_2)^2 + (s_3 - s_1)^2$$
$$= 1 + (s_1^2 - 2s_2) + (s_2^2 - 2s_1s_3) + s_3^2$$
$$= 1 + (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) + (t_1^2t_2^2 + t_2^2t_3^2 + t_3^2t_1^2) + t_1^2t_2^2t_3^2$$
$$= (1 + t_1^2)(1 + t_2^2)(1 + t_3^2)$$

故

(8.11) $$a = \frac{1 - s_2}{(1 + t_1^2)(1 + t_2^2)(1 + t_3^2)}$$
$$= \frac{(1 - s_2)(1 + t_4^2)}{(1 + t_1^2)(1 + t_2^2)(1 + t_3^2)(1 + t_4^2)}$$

如果 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ 為 t_1, t_2, t_3, t_4 之初等對稱函數，則

$$\sigma_2 = t_1t_2 + t_1t_3 + t_1t_4 + t_2t_3 + t_2t_4 + t_3t_4$$
$$= s_2 + t_4 s_1$$
$$= s_2 + t_4(\sigma_1 - t_4)$$

故 $s_2 = \sigma_2 - t_4(\sigma_1 - t_4)$。

(8.11)式右邊之分子可寫成下列形狀：

$$(1 - s_2)(1 + t_4^2)$$
$$= (1 - \sigma_2 + t_4\sigma_1 - t_4^2)(1 + t_4^2)$$
$$= 1 - \sigma_2 + t_4\sigma_1 - \sigma_2 t_4^2 + \sigma_1 t_4^3 - t_4^4$$

因為

(8.12) $$t_4^4 - \sigma_1 t_4^3 + \sigma_2 t_4^2 - \sigma_3 t_4 + \sigma_4 = 0$$

成立，上式可寫成

$$(1 - s_2)(1 + t_4^2)$$
$$= 1 - \sigma_2 + t_4\sigma_1 - \sigma_3 t_4 + \sigma_4$$
$$= 1 - \sigma_2 + \sigma_4 + t_4(\sigma_1 - \sigma_3)$$

故

$$(8.13)\qquad a=\frac{(1-\sigma_2+\sigma_4)+(\sigma_1-\sigma_3)t}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)(1+t_4^2)}\text{。}$$

即，當 $t=t_4$ 時，$z=a$。故 a 在圓(8.13)上。

同理，其他的有向 3-直線之內心均在此圓上（因爲此圓之方程式是對 t_1, t_2, t_3, t_4 成對稱的）。在§10，我們會利用平行星形線的切線來求內心，那時候解的形式會更簡單些。

§9 星形線(Astroid)

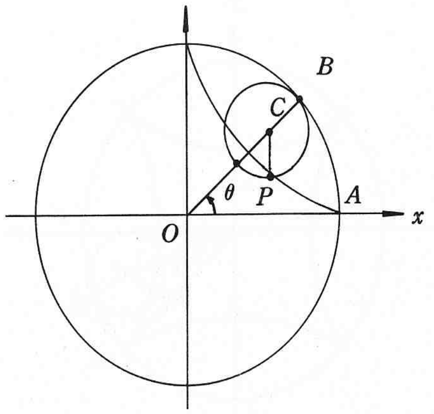
設圓 O 爲以原點爲中心，半徑爲 1 之定圓；動圓 C 爲半徑 1/4 之圓。若圓 C（其中心亦以 C 表之）在圓 C 之內部沿圓 O 之周上平滑地轉動時，圓 C 上之定點的軌跡稱爲**星形線**。

如果開始轉動時，圓 C 之周上的定點在 x 軸上 A 處，圓 C 沿圓 O 之周上轉動到點 B 處時，設其周上的定點在點 P 處（第13圖）。我們來求點 P 之軌跡之點方程式於下：

設 $\angle AOB=\theta$。因爲圓 C 之弧 $\widehat{BP}$ 之長度等於圓 O 之弧 $\widehat{AB}$ 之長度，故得

$$\frac{1}{4}(\angle PCB)=\theta \quad 即 \quad \angle PCB=4\theta$$

因此



第13圖

$$\overrightarrow{OC}=\frac{3}{4}(\cos\theta+i\sin\theta)\text{，}$$

$$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{4}(\cos(\theta-4\theta)+i\sin(\theta-4\theta))\text{。}$$

若置 $t=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，則

$$\frac{1}{t^3}=e^{-3i\theta}=\cos(-3\theta)+i\sin(-3\theta)$$

故

$$\overline{OP}=\frac{3}{4}t+\frac{1}{4}\frac{1}{t^3}\text{。}$$

若 P 之座標以 z 表之，則將點 P 之軌跡的點方程式

$$(9.1)\qquad z=\frac{3}{4}t+\frac{1}{4}\frac{1}{t^3}\text{。}$$

我們依 §6 之方法來求此曲線之線方程式：設

$$f(t)=\frac{3}{4}t+\frac{1}{4}\frac{1}{t^3}\text{，}$$

則得

$$f'(t)=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\frac{1}{t^4}$$

$$\overline{f(t)}=\frac{3}{4}\frac{1}{t}+\frac{1}{4}t^3$$

$$\overline{f'(t)}=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}t^4$$

故把這些式子代入下式中就可得線方程式：

$$\overline{f'(t)}\,z+t^2f'(t)\,\overline{z}=\overline{f'(t)}\,f(t)+t^2f'(t)\,\overline{f(t)}$$

其結果爲

$$z-\frac{1}{t^2}\overline{z}=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\frac{1}{t^3}$$

即

$$(9.2)\qquad \frac{1}{2}t^4-zt^3+\overline{z}t-\frac{1}{2}=0$$

但是通常所用的星形線之線方程式是下面形狀（請看 Hodgson 和 Sutton 之文章）：

(9.3) $$t^4 - zt^3 - \bar{z}t + 1 = 0$$

所以通常所用的星形線之位置應與上述的星形線之位置不同。欲求通常所用的線方程式所表的星形線之位置，我們先來求此線方程式所表曲線之點方程式（其法爲 §6 所述者）。把此式對 t 微分得

$$4t^3 - 3zt^2 - \bar{z} = 0$$

由此式和所與式消去 $\bar{z}$，則得

(9.4) $$z = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2t^3}$$

此爲所求的點方程式。現在比較 (9.1) 式與 (9.2) 式，因爲二式之最後一次符號相異，故試置

(9.5) $$t' = te^{-i\frac{\pi}{4}} \quad 即 \quad t = t'e^{i\frac{\pi}{4}}$$

則得

$$t^{-1} = t'^{-1}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

故

$$t^{-3} = t'^{-3}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$= t'^{-3}e^{(i\frac{\pi}{4} - i\pi)}$$

$$= -t'^{-3}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

現在把此式代入 (9.1) 式中，則得

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{4}t' - \frac{1}{4}\frac{1}{t'^3}\right)$$

即

$$e^{-i\frac{\pi}{4}}z = \frac{3}{4}t' - \frac{1}{4}\frac{1}{t'^3}$$

若置

(9.6) $$z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

則得

$$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}t' - \frac{1}{2}\frac{1}{t'^3}\right)$$

因爲

$$t' = te^{-i\frac{\pi}{4}}$$

故 t' 之始點是把 t 之始點順時針廻轉 $\pi/4$ 而得的。

又 $z' = ze^{-i\frac{\pi}{4}}$ 故新的 $x'y'$ 座標系從 xy 座標系廻轉 $\frac{\pi}{4}$ 而得的。故 $z = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2t^3}$ 之位置和大小可從上面變換式推測而得之如下：

設圓 O 爲以原點爲中心，半徑爲 2 之定圓。圓 C 爲半徑爲 1/2 之動圓。設圓 C 在圓 O 之內部沿圓 O 之周上平滑地轉動，當圓 C 開始轉動時，定點 P 在 A 上，A 是 x 軸順時針廻轉 $\pi/4$ 而得的半徑之端點。此時圓 C 上的定點 P 之軌跡之點方程式爲

$$z = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\frac{1}{t^3}$$

設圓 C 轉動至點 B 時，圓 C 上之定點在 P 處，則如上面討論，P 之軌跡之點方程式可求之如下：

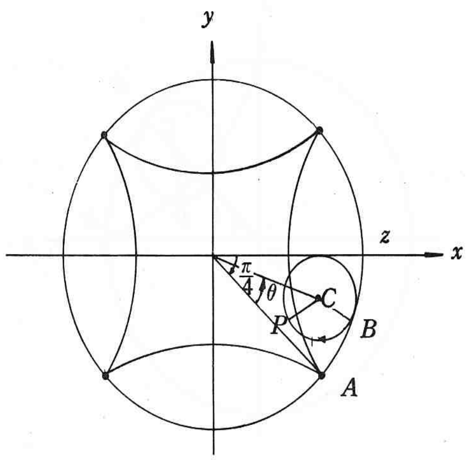
大圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 之長度 $= 2\theta =$ 小圓弧 BP 長度 $= \frac{1}{2}(\angle BCP)$，故 $\angle BCP = 4\theta$，因此

$$\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\theta\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right],$$

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}-3\theta\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-3\theta\right)\right]。$$

現在假設

$$t = \cos\left(-\frac{\pi}{4}+\theta\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\theta\right)$$



第14圖

則

$$\frac{1}{t}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$\frac{1}{t^3}=\cos\left(\frac{3\pi}{4}-3\theta\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-3\theta\right)$$

$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}-3\theta\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}-3\theta\right)$$

$$=-\cos\left(-\frac{\pi}{4}-3\theta\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-3\theta\right)$$

故

$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}=\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}\frac{1}{t^3}$$

即所求點方程式爲

$$z=\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}\frac{1}{t^3} \tag{9.4}$$

故所與線方程式

$$t^4-zt^3-\bar{z}t+1=0 \tag{9.3}$$

爲以 (9.4) 爲點方程式的星形線之線方程式。

§ 10 平行星形線 (Parastroid) 再論內心

以

$$t^4-zt^3+\mu t^2-\bar{z}t+1=0 \tag{10.1}$$

或

$$tz+\frac{1}{t}\bar{z}=t^2+\mu+\frac{1}{t^2}$$

爲線方程式的曲線稱爲**平行星形線**，故星形線爲滿足 $\mu=0$ 的特殊的平行星形線。

平行星形線之切線

$$tz+\frac{1}{t}\bar{z}=t^2+\mu+\frac{1}{t^2} \tag{10.2}$$

和星形線的切線

$$tz+\frac{1}{t}\bar{z}=t^2+\frac{1}{t^2} \tag{9.3}$$

爲平行。

從原點至此二平行線之距離分別爲

$$-\frac{1}{2}\left(t^2+\mu+\frac{1}{t^2}\right)$$

和 $$-\frac{1}{2}\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)$$

故此二平行切線間之距離爲它們的差，即

$$-\frac{1}{2}\mu \tag{10.2}$$

此值與 t 無關，即爲一定值。故一平行星形線與星形線爲平行的曲線，現在來考慮 $\mu=1$ 和 $\mu=-1$ 時的平行星形線的圖形，爲此目的先依 §9 求平行星形線的點方程式於下：

將

$$t^4-zt^3+\mu t^2-\bar{z}t+1=0$$

對 t 微分得

$$4t^3-3zt^2+2\mu t-\bar{z}=0,$$

從此二式消去 $\bar{z}$ 可得

$$z=\frac{3}{2}t+\frac{\mu}{2t}-\frac{1}{2t^3}\text{。} \tag{10.3}$$

此爲平行星形線之點方程式。

現在來討論 $\mu=1$ 時的平行星形線。此時

$$z=\frac{3}{2}t-\frac{1}{2t^3}+\frac{1}{2t}$$

當 $t=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ 時，

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),$$

$$\left(\frac{1}{t}\right)^3=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

故 $z=\sqrt{2}(1-i)+\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)$。

當 $t=1$ 時

$$z=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\text{。}$$

當 $t=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ 時，

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i),$$

$$\left(\frac{1}{t}\right)^3=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),$$

故 $z=\sqrt{2}(1+i)+\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-i)$。

當 $t=i$ 時，

$$z=\frac{3}{2}i-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}i\text{。}$$

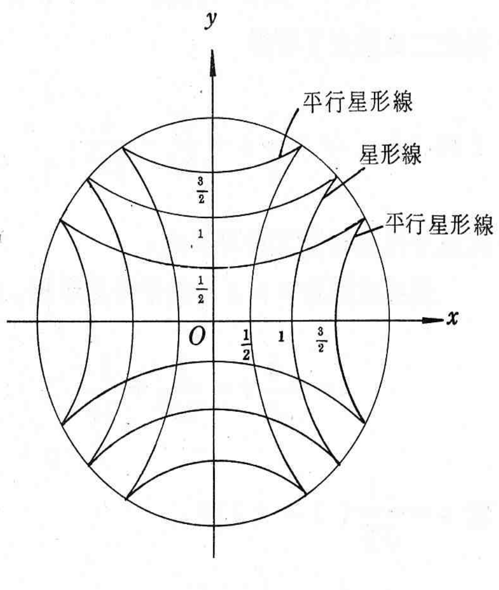
又如果 t 改變符號，則 z 亦改變其符號，如

$$z'=\frac{3}{2}(-t)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(-t)^3}+\frac{1}{2}\frac{1}{(-t)}\right.$$

$$=-\left(\frac{3}{2}t-\frac{1}{2t^3}+\frac{1}{2t}\right)$$

$$=-z$$

故，$\mu=1$ 時的平行星形線之圖形如第15圖。



第15圖

一條星形線可由四個條件來決定（即其大圓 O 之中心，大圓之半徑和開始點 A 之位置），而一條平行星形線除了星形線的四個條件外，還與實數 μ 有關。故一條平行星形線可由五個條件來決定。即也就是說一條平行星形線可由其五條切線來決定。給了一條有向5-直線時，其五條有向直線決定一條平行星形線，故一條有向5-直線之五條有向直線可視為一平行星形線之切線。我們不妨假設其所決定的平行星形線之線方程式為

$$(10.1)\qquad t^4-zt^3+\mu t^2-\bar{z}t+1=0$$

而所給有向5-直線 $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ 之五條直線可寫成

$$(10.2)\qquad t_i z+\frac{1}{t_i}\bar{z}=t_i^2+\mu+\frac{1}{t_i^2}$$

$$i=1,2,3,4,5$$

因此對於有向5-直線如以上式來表示，對解決問題較方便。當然，有向3-直線 $\{t_1, t_2, t_3\}$，有向4-直線 $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ 也可視為有向5-直線 $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ 的一部份而加以討論。

現在把五條有向直線以（10.2）表示，求其三條有向直線 $\{t_1, t_2, t_3\}$ 之內心。假設三條有向直線所決定的圓的線方程式為

$$(10.3)\qquad t^2(z-a)+(\bar{z}-\bar{a})=2\rho t$$

由(10.1)、(10.3)消去 z，$\bar{z}$ 可得

$$t^4-at^3+(\mu-2\rho)t^2-\bar{a}t+1=0$$

此方程式之四根表示二曲線(10.1)及(10.3)之共通切線。已知對應於 t_1, t_2, t_3 之有向直線為這二曲線之共通切線，如果 t_4'' 為第四條共通切線，又設

$$\sigma_1''=t_1+t_2+t_3+t_4''$$
$$\sigma_2'', \sigma_3'', \sigma_4''=t_1t_2t_3t_4''$$

為 t_1, t_2, t_3, t_4'' 之初等對稱函數，則有下列關係存在：

$$a=\sigma_1'',\qquad \mu-2\rho=\sigma_2''$$
$$\bar{a}=\sigma_3'',\qquad 1=\sigma_4''$$

故得 $a=s_1+t_4''$，$1=s_3t_4''$。

因此

$$(10.4)\qquad a=s_1+\frac{1}{s_3}$$

其中 s_1, s_2, s_3，為 t_1, t_2, t_3 的初等對稱函數，此式比上述§8例子的表法簡單些。

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ 為 t_1, t_2, t_3, t_4 之初等對稱函數，則

$$\sigma_1 = s_1 + t_4, \quad \sigma_2 = s_2 + t_4 s_1$$

$$\sigma_3 = s_3 + t_4 s_2, \quad \sigma_4 = s_3 t_4$$

故（10.4）式可表成下列形狀

$$a = \sigma_1 - t_4 + \frac{t_4}{\sigma_4}$$

$$= \sigma_1 + \left(\frac{1}{\sigma_4} - 1 \right) t_4$$

故此點在下圓圓周上

$$z = \sigma_1 + \left(\frac{1}{\sigma_4} - 1 \right) t$$

此式比 §8 例子的表示法簡單些。

§11 應用例

對於§10中所討論的，現在來舉幾個應用列子。

例題1（Hodgson 定理）：

(a) 設 $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$為一有向 4-直線，又設 z_{123} 為有向 3-直線 $\{t_1, t_2, t_3\}$ 之內心。$z_{124}, z_{134}, z_{234}$ 為同樣定義的內心。現在從 z_{123} 向有向直線 t_4 作垂線，從 z_{123} 向直線 t_3 作垂線，從 z_{123} 向直線 t_2 作垂線，並從 z_{234} 向直線 t_1 作垂線，則此四垂線與同一圓相切。

(b) 設 $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$為一有向 5-直線，則依(a)項，對於各有向 4-直線 $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, $\{t_1, t_2, t_3, t_5\}$, $\{t_1, t_2, t_4, t_5\}$ $\{t_1, t_3, t_4, t_5\}$, $\{t_2, t_3, t_4, t_5\}$ 可得一圓。如此五個圓均與同一直線相切。

證明：

(a)已知有向 3-直線 $\{t_1, t_2, t_3\}$之內心為

$$z_{123} = s_1 + \frac{1}{s_3}$$

有向直線 t_4 之方程式為

$$t_4 z + \frac{1}{t_4} \bar{z} = t_4^2 + \mu + \frac{1}{t_4^2}$$

經過 z_{123} 與此直線垂直的直線之方程式為

$$t_4^2 z - \bar{z}$$

$$= t_4^2 \left(s_1 + \frac{1}{s_3} \right) - \left(\frac{s_2}{s_3} + s_3 \right)$$

如上假設 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ 為 t_1, t_2, t_3, t_4 之初等對稱函數，則此方程式可寫成下列形狀：

$$t_4^2 z - \bar{z} = t_4^2 \left(\sigma_1 - t_4 + \frac{t_4}{\sigma_4} \right)$$

$$- \frac{t_4}{\sigma_4} \left(\sigma_2 - t_4 \sigma_1 + t_4^2 \right)$$

$$- \frac{\sigma_4}{t_4}$$

$$= t_4^2 \sigma_1 - t_4^3 - \frac{\sigma_2}{\sigma_4} t_4$$

$$+ \frac{\sigma_1}{\sigma_4} t_4^2 - \frac{\sigma_4}{t_4}$$

因為

$$t_4^4 - \sigma_1 t_4^3 + \sigma_2 t_4^2 - \sigma_3 t_4 + \sigma_4 = 0$$

可得

$$- \sigma_1 t_4^2 + \sigma_2 t_4 - \sigma_3 = - t_4^3 - \frac{\sigma_4}{t_4}$$

因此

$$t_4^2 z - \bar{z}$$

$$= t_4^2 \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_4} t_4 + \frac{\sigma_1}{\sigma_4} t_4^2$$

$$- \sigma_1 t_4^2 + \sigma_2 t_4 - \sigma_3$$

$$= \frac{\sigma_1}{\sigma_4} t_4^2 - \sigma_3 + \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_4} \right) t_4$$

即

$$(11.1) \quad t_4^2 \left(z - \frac{\sigma_1}{\sigma_4} \right) - \left(\bar{z} - \sigma_3 \right)$$

$$= \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_4} \right) t_4 。$$

如果在下式代入 $t = t_4$，則可得(11.1)式。

$$(11.2) \quad t^2 \left(z - \frac{\sigma_1}{\sigma_4} \right) - \left(\bar{z} - \sigma_3 \right)$$

$$= (\sigma_2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_4})\ t$$

此式表一圓，因爲此式可在下式代入 $t' = it$ 得到，而下式表一圓。

$$t'^2\ (z - \frac{\sigma_1}{\sigma_4}) + (\overline{z} - \sigma_3)$$

$$= i\ (\sigma_2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_4})\ t'\ 。$$

所以直線（11.1）爲此圓之一切線，即垂線(11.1)與此圓相切。因爲此式對於 $t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4$ 成對稱，故得知另外三垂線亦與此圓相切。

(b)設 $r_1 = t_1 + \cdots + t_5,\ r_2,\ r_3,\ r_4,$
$r_5 = t_1 t_2 t_3 t_4 t_5$

爲 $t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5$ 的初等對稱函數。故有下列關係存在

$$(11.3)\quad \sigma_1 = r_1 - t_5\ ,$$
$$\sigma_2 = r_2 - t_5 r_1 + t_5^2, \cdots,$$
$$\sigma_4 = \frac{r_5}{t_5}\ 。$$

現在將這些關係代入（11.2）式中，則得 得

$$t^2 z - \overline{z} = \frac{\sigma_1}{\sigma_4}\ t^2 - \sigma_3 + (\sigma_2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_4})\ t$$

$$= \frac{t_5}{r_5}\ (r_1 - t_5)\ t^2$$
$$- (r_3 - t_5 r_2 + t_5^2 r_1 - t_5^3)$$
$$+ (r_2 - t_5 r_1 + t_5^2$$
$$- \frac{t_5}{r_5}\ (r_2 - t_5 r_1 + t_5^2))\ t$$

$$= - r_3 + r_2 t + t_5^3\ (1 - \frac{t}{r_5})$$

$$+ t_5^2\ (1 - \frac{t}{r_5})\ (t - r_1)$$

$$+ t_5\ (1 - \frac{t}{r_5})\ (r_2 - r_1 t)$$

如果令 $t = r_5$，則得

$$r_5^2 z - \overline{z} = - r_3 + r_2 r_5$$

$$= r_5^2\ (\frac{r_2}{r_5}) - r_3$$

因爲

$$\frac{r_2}{r_5} = \frac{r_3}{r_5}\ \cdot\ r_5 = r_3$$

此式表示經過點 $z = \frac{r_2}{r_5}$ 的一直線。此直線爲上述的圓之一切線。因爲此式關於 $t_1,\ t_2, \cdots, t_5$ 成對稱，得知此直線亦爲其他四圓之切線，即此直線爲上述五圓之共通切線。

例題2（Sutton 之定理）：

(a) 設 $\{t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4\}$ 爲一有向 4- 直線，g 爲一定直線，$z_{123}, \cdots, z_{234}$ 爲有向 3- 直線 $\{t_1,\ t_2,\ t_3\}, \cdots, \{t_2, t_3, t_4\}$ 之內心。設 z_{ijk} 關於 g 之對稱點爲 z'_{ijk}。現在從 z_{123} 向有向直線 t_4 作垂線，從 z'_{124} 向有向直線 t_3 作垂線，從 z'_{134} 向有向直線 t_2 作垂線，從 z'_{234} 向有向直線 t_1 作垂線，則此四垂線與同一圓相切。

(b) 設 $\{t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5\}$ 爲一個有向 5- 直線。依(a)項；對於 $\{t_1,\ t_2, \cdots, t_5\}$ 中各有向 4 - 直線 $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}, \cdots, \{t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5\}$ 各有一圓。這樣的五個圓與同一直線相切。

證明：設所與直線 g 之方程式爲

$$\frac{z}{a} + \frac{\overline{z}}{\overline{a}} = 1$$

則 $z_{123} = s_1 + \frac{1}{s_3}$，關於此直線之對稱點 z'_{123} 之座標爲

$$z'_{123} = a - \frac{a}{\overline{a}}\ \overline{z}_{123} = a - \frac{a}{\overline{a}}\ (\frac{s_2}{s_3} + s_3)$$

經過此點與有向直線 t_4 垂直的直線之方程式爲

$$(11.4)\quad t_4^2 z - \overline{z}$$

$$= t_4^2\ [\ a - \frac{a}{\overline{a}}\ (\frac{s_2}{s_3} + s_3)\ ]$$

$$- [\ \overline{a} - \frac{\overline{a}}{a}\ (s_1 + \frac{1}{s_3})\ ]$$

此式右邊可寫成下列形狀：

$$右邊 = t_4^2 a - \frac{a}{\bar{a}} t_4^2 \left[\frac{t_4}{\sigma_4} (\sigma_2 - t_4\sigma_1 + t_4^2) + \frac{\sigma_4}{t_4} \right] - \bar{a} + \frac{\bar{a}}{a} \left(\sigma_1 - t_4 + \frac{t_4}{\sigma_4} \right)$$

$$= t_4^2 a + \frac{a}{\bar{a}} \frac{1}{\sigma_4} (- \sigma_2 t_4^3 + \sigma_1 t_4^4 - t_4^5) - \frac{a}{\bar{a}} \sigma_4 t_4 - \bar{a} + \frac{\bar{a}}{a} \sigma_1 - \frac{\bar{a}}{a} t_4 + \frac{\bar{a}}{a} \frac{1}{\sigma_4} t_4$$

因爲

$$t_4^4 - \sigma_1 t_4^3 + \sigma_2 t_4^2 - \sigma_3 t_4 + \sigma_4 = 0$$

$$- t_4^5 + \sigma_1 t_4^4 - \sigma_2 t_4^3 = - \sigma_3 t_4^2 + \sigma_4 t_4$$

故

$$右邊 = t_4^2 a + \frac{a}{\bar{a}} \left(- \frac{\sigma_3}{\sigma_4} t_4^2 + t_4 \right) - \frac{a}{\bar{a}} \sigma_4 t_4 - \bar{a} + \frac{\bar{a}}{a} \sigma_1 - \frac{\bar{a}}{a} t_4 + \frac{\bar{a}}{a} \frac{1}{\sigma_4} t_4$$

故得

$$t_4^2 \left(z - a + \frac{a}{\bar{a}} \frac{\sigma_3}{\sigma_4} \right) - \left(\bar{z} - \bar{a} + \frac{\bar{a}}{a} \bar{\sigma}_1 \right) = \left(\frac{a}{\bar{a}} - \frac{a}{\bar{a}} \sigma_4 - \frac{\bar{a}}{a} + \frac{\bar{a}}{a} \frac{1}{\sigma_4} \right) t_4$$

如果把上式 t_4 換爲 t，則可得下式

$$(11.5) \quad t^2 \left(z - a + \frac{a}{\bar{a}} \frac{\sigma_3}{\sigma_4} \right) - \left(\bar{z} - \bar{a} + \frac{\bar{a}}{a} \sigma_1 \right) = \left(\frac{a}{\bar{a}} - \frac{a}{\bar{a}} \sigma_4 - \frac{\bar{a}}{a} + \frac{\bar{a}}{a} \frac{1}{\sigma_4} \right) t$$

此式爲一圓之線方程式，因如在下式代入 $t' = it$，則可得此式，而下式顯然爲一圓之線方程式

$$t'^2 \left(z - a + \frac{a}{\bar{a}} \frac{\sigma_3}{\sigma_4} \right) + \left(\bar{z} - \bar{a} + \frac{\bar{a}}{a} \sigma_1 \right) = i \left(\frac{a}{\bar{a}} - \frac{a}{\bar{a}} \sigma_4 - \frac{\bar{a}}{a} + \frac{\bar{a}}{a} \frac{1}{\sigma_4} \right) t' 。$$

因之，上列直線（11.4）與此圓相切，因爲此圓之直線方程式關於 $t_1, \cdots, t_4$ 成對稱，故其他的垂線亦與此圓相切。

(b)把（11.3）式代入（11.5）式，可得

$$(11.6) \quad t^2 z - \bar{z} - t^2 a + \bar{a} - \frac{a}{\bar{a}} t + \frac{\bar{a}}{a} t = - \frac{a}{\bar{a}} t^2 \frac{t_5}{r_5} (r_3 - t_5 r_2 + t_5^2 r_1 - t_5^3) + \frac{\bar{a}}{a} (r_1 - t_5) - \frac{a}{\bar{a}} \frac{r_5}{t_5} t + \frac{\bar{a}}{a} \frac{t_5}{r_5} t$$

因

$$t_5^5 - r_1 t_5^4 + r_2 t_5^3 - r_3 t_5^2 + r_4 t_5 - r_5 = 0$$

可得

$$- t_5^4 + r_1 t_5^3 - r_2 t_5^2 + r_3 t_5 = r_4 - \frac{r_5}{t_5}$$

把此式代入（11.6）式之右邊，可得

$$(11.6)式右邊 = - \frac{a}{\bar{a}} t^2 \frac{1}{r_5} \left(r_4 - \frac{r_5}{t_5} \right) + \frac{\bar{a}}{a} (r_1 - t_5) - \frac{a}{\bar{a}} t \frac{r_5}{t_5} + \frac{\bar{a}}{a} \frac{t_5}{r_5} t$$

$$= - \frac{a}{\bar{a}} \frac{r_4}{r_5} t^2 + \frac{\bar{a}}{a} r_1 + \frac{a}{\bar{a}} \frac{t}{t_5} (t - r_5) - \frac{\bar{a}}{a} t_5 \left(1 - \frac{t}{r_5} \right)$$

所以，如果置 $t = r_5$ 於（11.6）式中可得

$$r_5^2 z - \bar{z} - r_5^2 a + \bar{a} - \frac{a}{\bar{a}} r_5 + \frac{\bar{a}}{a} r_5$$

$$= -\frac{a}{\bar{a}} r_4 r_5 + \frac{\bar{a}}{a} r_1$$

即

$$r_5^2 z - \bar{z}$$

$$= r_5^2 \left(a - \frac{a}{\bar{a}} \frac{r_4}{r_5} + \frac{a}{\bar{a}} \frac{1}{r_5} \right)$$

$$- \left(\bar{a} - \frac{\bar{a}}{a} r_1 + \frac{\bar{a}}{a} r_5 \right)$$

故此直線上上面的圓相切。因此式爲關於 t_1，…，t_5 成對稱，故其他的圓亦與此直線相切。

§12 曲線A^6, A^8, ……, A^{2m}

利用平行星形線 A^4，我們可討論與有向 5-直線$\{t_1, \cdots, t_5\}$ 和其所包含的有向 3-直線 $\{t_1, t_2, t_3\}$，有向 4-直線 $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$等有關的問題。但是我們無法討論關於有向 6-直線 $\{t_1, \cdots, t_6\}$的問題。

要討論與有向 6-直線或有向 7-直線(和它們所包含的有向 3-直線，4-直線，5-直線)有關的問題時，我們通常利用與平行星形線 A^4 類似的曲線 A^6 此曲線的線方程式爲

$$t^6 - a_1 t^5 + z t^4 - \mu t^3 + \bar{z} t^2 - a_5 t + 1 = 0 \qquad (\mu \text{爲實數})$$

要討論與有向 8-直線或有向 9-直線(和它們所包含的有向 3-直線，4-直線，5-直線，6-直線，7-直線)有關的問題時，我們利用以下列的方程式爲其線方程式的曲線 A^8：

$$t^8 - a_1 t^7 + a_2 t^6 - z t^5 + \mu t^4 - \bar{z} t^3 + a_6 t^2 - a_7 t + 1 = 0$$

我們可如此繼續下去。一般的 A^{2n} 之線方程式爲

$$t^{2n} - a_1 t^{2n-1} + \cdots + (-1)^{n+1} z t^{n+1} + (-1)^n \mu t^n + (-1)^{n-1} \bar{z} t^{n-1} + (-1)^{n-2} a_{n+2} t^{n-2} + \cdots\cdots + (-1) a_{2n-1} t + 1 = 0$$

利用如此的諸曲線 A^6，A^8，…，A^{2n}，Hodgson 證明了上述Hodgson 定理之推廣的一般定理。Sutton 認爲同樣利用這些曲線，她也可證明她的上述定理之推廣，但是筆者們認爲，她的證明是不完全的而且有錯。她的一般定理的一部份(即對應於(b)的部份)是錯的。因爲這些都相當複雜，我們不想在此處討論。

寫這一篇論述時，我們參考了下列書籍和文章：

1. 小林幹雄：複素數の幾何學(日文)。
2. Frank and F. V. Morley : Inversive geometry.
3. Joseph E. Hodgsen : Orthocentric Properties of the plane directed n-line. Traus. Amer. Math Soc. vol. 13 (1912).
4. Flora D. Sutton : On certain chains of theorems in reflexive geometry. Amer. Jour. of Math. vol. 45(1923).

——本文作者分別為本所研究員及助理研究員——