大廈的秘密——

一個非歐空間的介紹

葉東進

Ⅰ、源起

年初，曾看一本科幻小說「大廈」，內容主要是描述詹君為了租房子與其朋友葉君往尋某一建築特別精美的二十層大廈，該大廈房間的佈局設計甚合詹君的意思，只是奇怪的，整棟大廈除了住有一位管理員之外，空無一人。徵得管理員同意，詹君便獨自搭上通往頂層的電梯，照常理計算，以一般電梯上升的速度到達第二十層頂樓最多應不超過2分鐘便可，但是詹君卻花了三十多分鐘。事後調查，並非這部電梯上升的速度較一般的慢，也不是詹君的手錶有問題。這種不可思議的現象經葉君鍥而不捨的追踪調查與研究，終於眞相大白。

原來該座電梯是一群科學家為從事某種試驗而設計的一部改變空間的機器。詹君在電梯未啓動前是立於X空間，一旦電梯上升，經由該電梯的空間變換作用，詹君於是立即轉進另一Y空間，立於原地的葉君這時因而與詹君分別存在於不同的二種空間。異於我們日常生存空間的空間內，它的許多現象不是用我們的一般見解可說明白的，這自然不在話下。我們所感興趣的毋寧是能否從數學的觀點來看這部科幻小說的內容的可能性。

Ⅱ、另一種空間

數學家 Poincaré 提出一個這樣的幾何：在歐氏平面上，考慮一已予圓C（其圓心記為O，半徑令為r）。

定義：

(1)點：C內的點（如圖1中的P）。

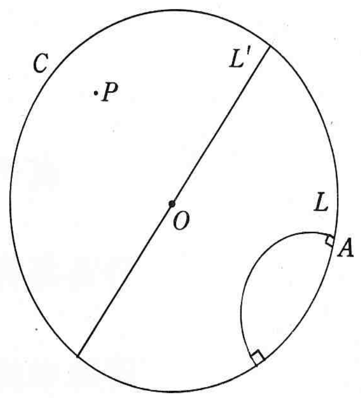

圖 1

(2)線：與C正交的圓（或直線），取其在C內的部分（如圖1中的L與L'）（註）。

(3)面：C的內部。

註：一圓L與圓C正交於點A，乃指過A點所

作L的切線與C的切線相互垂直；一直線L'與圓C正交，乃指L'通過C的圓心O點。

按照上面有關點、線、面的定義，我們可以證明圓C的內部決定了一個非歐空間。不過，證明之前先復習有關圓的鏡射的一些事象是有必要的。

1.歐氏平面上，以O爲圓心，r爲半徑的圓C，其鏡射的意義是：
若P是平面上任予點（$P \neq O$），在射線OP上，存在唯一的點P'滿足$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$，稱點$P'$是點$P$關於圓$C$的鏡像。（圖2）
當然，點P也是點P'關於圓C的鏡像。

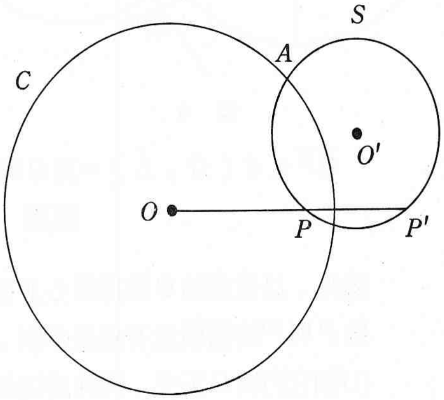

圖 2

2.承1，過點P與點P'任一圓S必與C正交。
證明：取A是S與C的一個交點，O'是S的圓心。（圖2）
由點P與點P'的關係：

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 = \overline{OA}^2$$

$\Rightarrow$直線OA是點O對S的切線
$\Rightarrow OA \perp O'A$
$\Rightarrow S$與C正交

3.承1，通過C的中心O的直線ℓ，其關於圓C的鏡像是ℓ本身。（圖3）
此由圓的鏡射的意義即得。

現在回到 Poincaré 幾何空間是一個非歐空間的證明上。

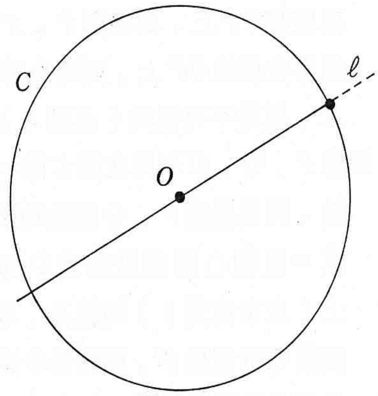

圖 3

首先，Poincaré 幾何是一個關聯幾何（Incidence geometry），理由是它符合下列的三個關聯公設：

A_1：一線爲一點集，至少含有兩點。

A_2：相異兩點含於唯一的線內。

A_3：平面上，至少含有不在一線上的三點。（註1）

其中A_1, A_3是明顯的眞確，不再多言，要證明的是對 Poincaré 幾何言，A_2也是眞確的。

證明：對於相異的兩點P與Q，

(A)當P，Q，O同在圓C的一直徑上時，不含兩端點的這條直徑便是 Poincaré 幾何內包含P與Q的一線；假定另有一線包含P與Q（顯然，這樣的一線不可能也是過O的另一直徑），則此線爲某一與圓C正交的圓（令爲圓K）在C內的部分，取P關於圓C的鏡像P'，則P'落在圓K上，也落

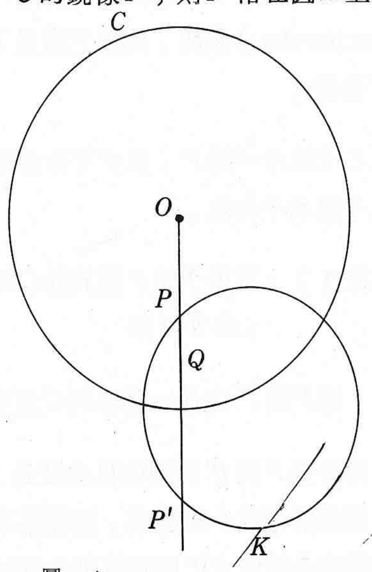

圖 4

在直線OP上，如此則P，P'，Q不僅落在直線OP上，同時也落在圓K上，這是不可能的（見圖4）。

(B)當P，Q，O不同在圓C的一直徑上時，因爲通過P，Q兩點的所有圓形成一組圓心落在線段PQ的中垂線上（自由度爲1）的圓系，取點P關於圓C的鏡像P'，則圓系中滿足與圓C正交的圓便是唯一存在（因爲這樣的圓，其圓心K是線段PQ的中垂線與線段PP'的中垂線的唯一交點），因此圓K在C內的部分便是Poincaré幾何內包含P，Q兩點的唯一線（見圖5）。

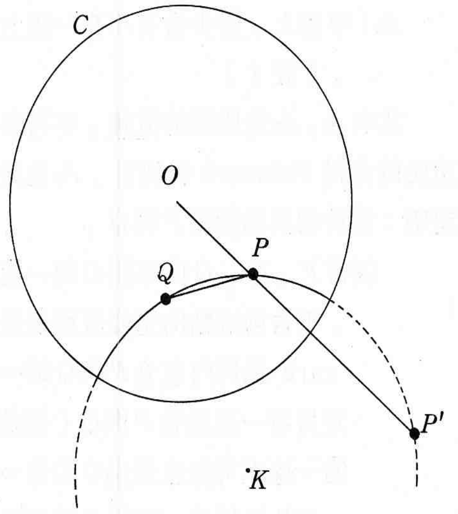

圖 5

其次，要證明 Poincaré 幾何是一個羅氏（Lobachevsky）幾何，因爲它滿足下面的羅氏平行公設：

過已予線外一點P，至少可作兩條此已予線的平行線。

證明（註2）：取所予點P關於圓C的鏡像P'，由Ⅱ-2知

過P與P'之任一圓必與C正交……(1)

由於過P與P'的圓的自由度是1，因此這些圓形成一組圓系，這組圓系的圓心軌跡是線段PP'的垂直平分線M。

現在按下列二種情況分別討論。

(A)當所予線L爲過O點的線時（圖6），以P爲焦點，L爲準線的拋物線爲Γ_o，則Γ_o與M恰有二交點Q_1與Q_2。因此，線段Q_1Q_2內的任意點Q必落在Γ_o的內部。因而有

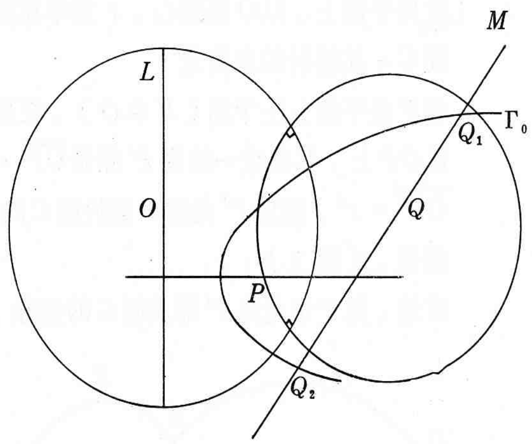

圖 6

$$\overline{QP} < d(Q, L) = \text{點}Q\text{到}L\text{的距離} \cdots\cdots(2)$$

因此，以這樣的Q點爲圓心並且通過點P與P'的圓顯然有無限多個，且由(1)知它們與C正交，同時由(2)知它們與L不相交。也就是說，在 Poincaré 幾何空間內，過P點至少有二線不與L相交。

(B)當所予線L不過O點時，由 Poincaré 幾何中線的定義，知L是含在一個與C正交的圓上，設該圓的圓心爲O'，半徑爲a。我們又分二種情況分別證明：

①點P與點O在線上的同側時（圖7），以點O'及點P爲焦點，a爲貫軸長的雙曲線令爲Γ_+，則Γ_+與M恰有二交點Q_1與Q_2。因此，落在直線M上而在線段Q_1Q_2外的任意點Q必在Γ_+的外部，因而有

$$|\overline{QP} - \overline{QO'}| > a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

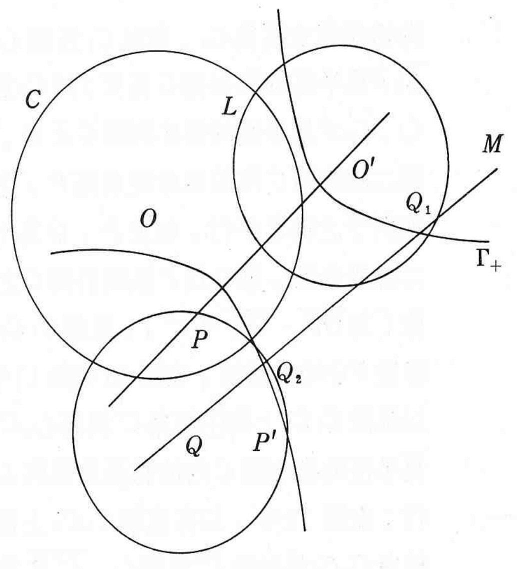

圖 7

因此，以這樣的Q點為圓心並且通過點P與點P'的圓顯然有無限多個，且由(1)知它們與C正交，同時由(3)知它們與L不相交。

②點P與點O在線L的異側時（圖 8），以點O'及點P為焦點，a為長

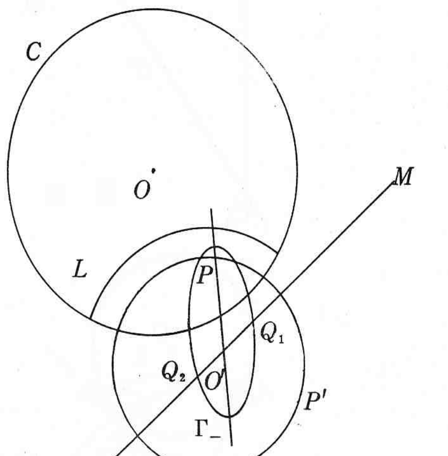

圖 8

軸長的橢圓令為Γ_-,則Γ_-與M恰有二交點Q_1與Q_2。因此，落在直線M上而在線段Q_1Q_2內的任意點Q必落在Γ_-的內部，因而有

$$\overline{QP}+\overline{QO'}<a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

因此，以這樣的點Q為圓心並且通過點P與點P'的圓顯然有無限多個，且由(1)知它們與C正交，同時由(4)知它們與L不相交。

綜合①及②知過P點至少有二條線不與L相交。

所以，Poincaré 空間是一個非歐空間。

三、「大廈」的秘密

回到「大廈」這件事來。

我們設想詹君、葉君以及大廈都是存在於 Poincaré 空間內，在此空間內，大廈的底層記為A點，頂層記為B點，並假定AB是落在過O點的一條線上（圖 9）；另外，又設想改變空間的這部電梯便是關於圓C的鏡射f。通

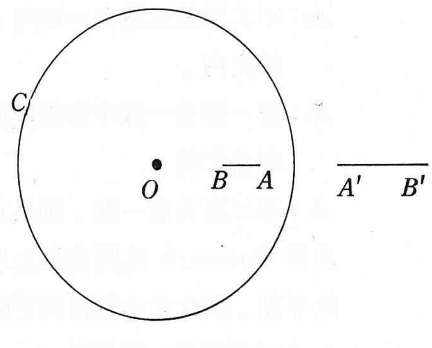

圖 9

過f，

令f：$A\to A'$　　由Ⅱ-3知

$B\to B'$　　O、B、A、A'、B'共線

$$\text{又由}\begin{cases}\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=r^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)\\ \overline{OB}\cdot\overline{OB'}=r_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)\end{cases}\text{知}$$

$$\overline{OA'}>r \;,\; \overline{OB'}>r$$

所以，點A'，點B'落在圓C外，因此A'，B'並不存在於 Poincaré 空間內，它們是落在歐氏空間內。

原本在A處的詹君，由於電梯的啓動，即刻被置換到另一空間內的A'處。因此，立於

Poincaré 空間內的葉君所見到的大廈高度是 AB，而經空間改變後的詹君，他所處身的大廈的高度却是 $A'B'$。

由 $(5)\times\overline{OB'}-(6)\times\overline{OA'}$

得 $(\overline{OA}-\overline{OB})\times\overline{OA'}\times\overline{OB'}$

$=r^2\times(\overline{OB'}-\overline{OA'})$

$\Rightarrow$ $\overline{AB}\times\overline{OA'}\times\overline{OB'}=r^2\times\overline{A'B'}$

由於 $\overline{OA'}$，$\overline{OB'}>r$

故 $\overline{AB}<\overline{A'B'}$

我們看到，葉君所見到的大廈高度 $\overline{AB}$ 是比詹君所處身經空間變換後的大廈的高度 $\overline{A'B'}$ 小多了。

這就是「大廈」的秘密。

註1：一個關聯幾何，除了須滿足上述的 A_1、A_2、A_3 三個公設外，還須滿足下列三公設：

A_4：不共線的三點在一面內，且在唯一的面內。

A_5：若一面含一線中的相異兩點，則此面含此線。

A_6：若二面共有一點，則必共有另一點。

由於 Poincaré 空間實際上只是一個非歐平面，因此文中僅證明它滿足 A_1、A_2、A_3 三個公設，而關於 A_4、A_5、A_6 便毋須提及。

註2：除了這個解析證法之外，底下還列了一個利用初等綜合幾何的證明方法（參見圖10，11，12）。

只考慮以 O 為圓心，以 r 為半徑的圓 C 的內部。

在圖10中所給直線 L 為直徑 A_1A_2 在圓 C 內的部分；在圖11和圖12中直線 L 則為與圓 C 正交的圓弧 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 在圓內的部分，其中 A_1，A_2 為圓弧與圓 C 的交點。在圖10，11，12中，設 P 為所予點，設線段 PA_1 之中垂線與在 A_1 處的切線的交點為 C_1，線段 PA_2 之中垂線與在 A_2 處的切線的交點為 C_2，則以 C_1 為圓心，$\overline{C_1P}$ 為半徑的圓與圓 C 正交；以 C_2 為圓心，$\overline{C_2P}$ 為半徑的圓亦與圓 C 正交。故這二圓在圓 C 內的部分經過點 P，並且與所予之線 L 平行。如果 P，Q 為上述二圓的交點，則 Q 為 P 點關於圓 C 之鏡像（即 $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=r^2$）。直線 C_1C_2 為線段 PQ 的中垂線。在圖10和圖11中，以線段 C_1C_2 上的任何點 C' 為圓心，$\overline{C'P}$ 為半徑的圓在圓 C 內的圓弧均為與 L 平行；在圖12中，以在直線 C_1C_2 上而在線段 C_1C_2 外的點 C' 為圓心，$\overline{C'P}$ 為半徑的圓在圓 C 內的圓弧均為與 L 平行的線。（以上的初等證明方法為本文之審核先生所提供）。

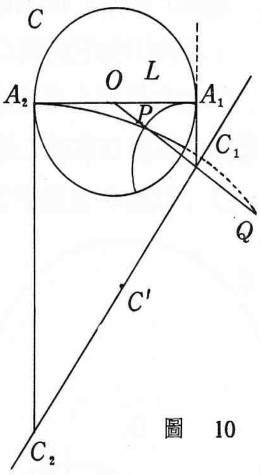

圖 10

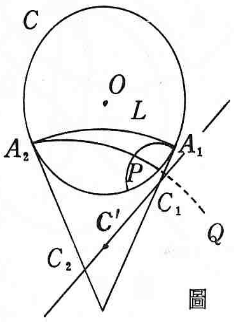

圖 11

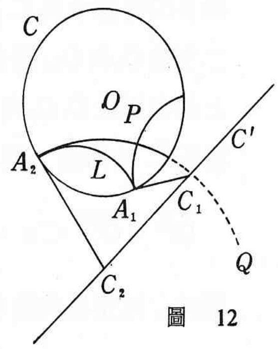

圖 12