書評書介

評傅溥先生「複變函數論」

康明昌

書　　名：複　變　函　數　論

編　著　者：傅　　溥

出　版　者：國　立　編　譯　館

發　行　者：正　中　書　局

中華民國六十五年初版，六十八年二版

(一)

複變函數論(習稱「函數論」)是在十九世紀橢圓積分與數學物理的研究中誕生的。除了 Gauss 以外，Cauchy 是第一個使用複變函數定積分(Contour Integral)的人。此後Cauchy不斷的探索究竟那些函數才能使用他的積分定理，那就是解析函數的出現。由於留數定理與保角變換的廣泛應用，數學家終於認識到：該是建立嚴密的理論基礎的時候了。複變函數論的基本理論是Cauchy(1789～1857)、Riemann (1826～1866)與Weierstrass(1815～1903)建立的。

設U是複平面C的開子集，$f:U\to C$是U到C的函數。若$z\in U$，定義

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

若$f'(z)$存在，$\forall z\in U$，則f叫做U上的解析函數。表面上看，解析函數與可微分的實函數相差不多，其實兩者相差不可以道里計。解析函數具有許多初學者意想不到的性質。例如：

1.若f是圓$|z-z_0|<r$上的解析函數，則$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\cdots\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots\cdots$,

$\forall |z-z_0|<r$。(泰勒展開式,「複變函數論」238頁,定理一)。

若f是環狀區域$r<|z-z_0|<R$上的解析函數,則$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$,$\forall r<|z-z_0|<R$(羅郎展開式,「複變函數論」297~300頁)。

因爲冪級數在其收斂範圍內可以重複的微分;因此,若$f(z)$是U上的解析函數,則$f^{(n)}(z)$必存在,$\forall n=1,2,\cdots\cdots$。

2.若$f_n(z)$是解析函數,且f_n是均勻收斂到f,則$f(z)$亦爲解析函數。(Weierstrass 均勻收斂定理)。

3.若$f(z)$是U上的解析函數,且$f(z_n)=0$ $\forall n=1,2,\cdots\cdots$,其中$\lim_{n\to\infty}z_n\in U$,且$z_i\neq z_j$ $(i\neq j)$。則$f(z)\equiv 0$,(一致性原則)。

4.若$f(z)$是U上的解析函數,$z_0\in U$且$|f(z)|\leq|f(z_0)|$,$\forall z\in U$。則f是常數函數。(極大值原則)

5.若f是複平面C上的解析函數。如果f是有界函數,則f是常數函數。更一般的,如果$|f(z)|\leq M\cdot z^n$,$\forall z\in C$,其中M是某個固定正數,n是正整數,則f是次數不超過n的多項式。(Liouville定理)。

利用Liouville定理,可以證明「代數基本定理:複係數代數方程式至少有一複數根」。

以上這些定理都可以根據下述兩個定理導出。

1.若γ是複平面的封閉曲線,$f(z)$是開集U的解析函數,其中U包含γ與γ內部的點。則$\int_\gamma f(z)dz=0$。(Cauchy積分定理,「複變函數論」162頁)

2.若γ是複平面的封閉曲線,$f(z)$是開集U的解析函數,其中U包含γ與γ內部的點。設z_0是γ內部的點,且γ依正方向繞行z_0一周,則$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-z_0}dz$。(Cauchy 積分表示式,「複變函數論」183頁)

這兩個定理的積分就是前述的複變函數定積分,其定義與微積分課程考慮的線積分的定義類似。事實上,只要根據Green定理與Cauchy-Riemann方程(「複變函數論」94頁)就可導出這兩個定理。

複變函數的初學者至少要能夠掌握以下方法的基本手法:1.複變函數定積分,2.無窮級數,3.解析延拓(Analytic Continuation)。我們以「複變函數論」第46節的例子說明解析延拓。

設f是$(0,1)$上的可微分函數,一般的說,我們並不知道如何把f擴張爲$(-1,+2)$上的可微分函數。與此大異其趣的是,解析函數有一種自然的擴張其定義域的方法。例如,冪級數$f(z)=1+z+z^2+\cdots\cdots+z^n+\cdots\cdots$的收斂半徑是$|z|<1$。把這個函數在$z=\frac{i}{2}$展開,得

$$g(z)=1+\{(z-\frac{i}{2})+\frac{i}{2}\}+\{(z-\frac{i}{2})+\frac{i}{2}\}^2+\cdots$$

$$=\frac{2}{2-i}+\frac{4}{3-4i}(z-\frac{i}{2})+\cdots\cdots+(\frac{2}{2-i})^{n+1}\cdot(z-\frac{i}{2})^n+\cdots\cdots$$

,$g(z)$的收斂半徑是$\frac{2}{\sqrt{5}}$。

但是圓$|z|<1$並不能包含圓$|z-\frac{i}{2}|<\frac{2}{\sqrt{5}}$,因此我們就把$f(z)$定義的範圍從$|z|<1$推廣$\{z:|z|<1\}\cup\{z:|z-\frac{i}{2}|<\frac{2}{\sqrt{5}}\}$。也可以用鏡像原理(「複變函數論」63節)或函數方程(Functional Equations)進行解析延拓。

在初等數學中,多值函數是個禁忌(Taboo)。但是Cantor說得好:「數學的精神是自由!」既然多值函數會很自然的產生,如$f(z)=\sqrt{z}$。爲什麼不能討論多值函數呢?事實上

，在複數函數，我們並不廻避多值函數。在 $|z-1|<1$ 的範圍，取定 $f(z)=\sqrt{z}$ 的(單值)數值，然後進行解析延拓。我們發現函數的定義域不只是複平面，而是兩個複平面用某種方法黏合起來的(「複變函數論」400～420頁),這就是一種黎曼面(Riemann Surface)。多值函數 $f(z)=\sqrt{z}$ 可以看成複平面到這個黎曼面的解析函數。

黎曼面是一種微分流型(Differentiable Manifolds)。事實上，有人乾脆就定義黎曼面爲一維的複流型(1-Dimensional Complex Manifold)。研究黎曼面的函數論、分類、不變量(離散的與連續的)，是從十九世紀到今天爲止，非常重要的數學課題。以台灣目前數學系的課程安排來看，誇張一點的說，微積分、高等微積分、線性代數所學到的只是一些零碎的定理，甚至有的只是一些語言詞彙(Language)而已，直到複變函數與黎曼面，學生才算接觸到近代數學的一支豐富優美的理論。這套理論像一座花園的大門，通過這個大門，可以看到裏面盛開的百花，那裏有黎曼面、模函數(Modular Forms)、微分流形、代數拓樸、多複變函數、代數幾何。

複變函數與高等微積分還有一點不同：奇異點(Singularity)。高等微積分碰到不連續點或不可微分點，如果不是可忽略(也就是，這些點的出現不影響函數的大域的性質)，就是很棘手的問題。複變函數的情形有點不同。

設 $f(z)$ 是 $0<|z-z_0|<r$ 之上的解析函數，令 $f(z)$ 的羅郎展開式爲 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$。第一種情況：$a_{-1}=a_{-2}=\cdots\cdots=a_n=\cdots\cdots=0$，$z_0$ 叫做 $f(z)$ 的可去奇異點(Removable Singularity)，因爲只要定義 $f(z_0)=a_0$，我們就得到 $|z-z_0|<r$ 之上的解析函數。第二種情況：存在一個正整數 N，使得 $a_{-(N+1)}=a_{-(N+2)}=\cdots\cdots=0$,則 z_0 叫做 $f(z)$ 的極點(Pole)。第三種情況：$a_{-1},a_{-2},a_{-3},\cdots\cdots$ 有無窮多個不爲零的項，則 z_0 叫做 $f(z)$ 的眞性奇異點(Essential Singularity)。

在研究複變函數時，極點的存在並不是什麼不得了的事。至於眞性奇異點，Casorati-Weierstrass定理證明：若 z_0 是 $f(z)$ 的孤立眞性奇異點，c 是任意複數或無限大，則存在一組數列 $\{z_n: n=1,2,\cdots\cdots\}$，滿足 $\lim_{n\to\infty} z_n=z_0$ 且 $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=c$。若 z_0 是 $w=f(z)=\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\frac{a_{-(N-1)}}{(z-z_0)^{N-1}}+\cdots\cdots+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots\cdots$ 的極點，令 $t=\frac{1}{w}$，則 $t=(z-z_0)^N\{b_0+b_1(z-z_0)+\cdots\cdots+b_n(z-z_0)^n+\cdots\cdots\}$；因此，函數 $f:\{z: 0<|z-z_0|<r\}\to C$ 可以看成 $\{z:|z-z_0|<r\}\to S^2$ 的解析函數，其中 $S^2=C\cup\{\infty\}$ 是黎曼球(Riemann Sphere)。

複變函數 $f:U\to C$ 叫做半純函數(Meromorphic Function)，如果 f 在 U 上是解析或只有極奇異點。解析函數有時叫做全純函數(Holomorphic Function)。Mittag-Leffler定理描述複平面上所有的半純函數(「複變函數論」56節)，Weierstrass乘積定理描述複平面上所有的全純函數(「複變函數論」57節)。黎曼球上所有的半純函數恰爲有理函數的全體，黎曼球上的全純函數只能是常數函數(「複變函數論」54節，其中331頁之定理四的敍述易滋混淆)。利用Schwarz引理可以討論單位圓 $\{z:|z|<1\}$ 之上的全純函數與半純函數(「複變函數論」沒有介紹Schwarz引理)；黎曼寫像定理說，任意單連通區域，若其周界至少有兩點，則必與單位圓爲雙解析等價(Biholomorphic)(「複變函數論」65節)，因此我們也可瞭解這些領域之上的全純與半純函數。

(二)

可能有人認爲，大學課程的複變函數已經變成很基本的教材，許多教科書也大同小異，因此對於複變函數教科書、教材的選取與安排，實在沒有討論的必要。這使我想起托爾斯泰名著「安娜・卡列尼娜」的第一句話：「所有的幸福家庭都是相似的，每個不幸的家庭有它自己的不幸。」是的，有些人可以毫無困難的掌握複變函數的要點，他是幸福的；可是，有許多各式各樣的小問題卻足以絆倒不少複變函數的初學者。一本書如果能夠幫助學生比較容易的掌握學習要點，那麼學生和老師都應該感謝這本書的作者。

在這意義之下，我願意推荐傅溥先生編著的這本「複變函數論」。

傅溥先生這本書大體上是根據日本數學家竹內端三的「函數論」編寫的。傅先生的第一章至第六章是竹內原著的上卷，第七章是竹內原著下卷的最後一章。竹內端三是東京帝國大學的教授（二次戰後改稱東京大學），他的「函數論」初版在大正15年（1925）發行，昭和7年（1932）改版，昭和41年（1966）新版，都由「裳華房」書局出版。竹內「函數論」的下卷討論多值函數、橢圓函數、等角寫像。竹內端三與佐藤正孝還編有「函數論演習」，是原書的習題解答與一些補充問題。

傅先生的文筆流暢，讀這本書毫無詰屈聱牙的困擾。我想提出幾點粗淺的意見就教於傅先生和讀者。

1. 這本書共有七章：複數、複變數函數、微分法、積分法、冪級數、特異點、等角寫像，這些材料正是本文第(一)節介紹的定理，可以說包括複變函數的基本理論，但是並沒有討論更專門的理論（如，橢圓函數、黎曼面、特殊函數、在解析數論的應用）。這些材料適合大學部一學期複變函數的課程。

這本書的講法以分析的工具爲主。拓樸與幾何的討論並不苛求，好處是學生很淸晰的看到分析的方法和結果，壞處是不夠嚴密（請看下文3）。

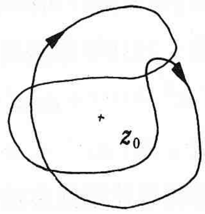
講解非常詳細、非常親切，是這本書的優點。作者不厭其煩的舉出許多例子，來說明各種概念。近二十年許多數學書籍的作者似乎傾向於介紹完整的理論體系，以致沒有工夫多舉一些例子。被那些硬綁綁的書籍壓得透不過氣來的學生，讀這本書的時候，大概會有如釋重負的感覺。

2. 初學複變函數者的困難之一是，有些人高等微積分的基礎不好，因此一看到線積分或無窮級數就有大禍臨頭的感覺。事實上，高等微積分與複變函數的關係並沒有想像的那麼密切。高等微積分處理的是多變數函數的性質與某些古典分析的基本技巧（如，富氏級數、微分方程的存在定理）。學生只要具備初等微積分學過的無窮級數與線積分的知識，就可以順利的學習複變函數。

本書正是採取這種觀點。作者在第三章不厭其煩的定義複變函數的極限、連續性、微分。在第四章討論Cauchy積分定理之前，他就從線積分的定義開始。第五章先從無窮級數的定義開始，然後討論均勻收斂的定義與基本性質，接著再討論冪級數，然後才是泰勒展開式與解析延拓。這種「一切都從頭開始」的方式，可能要多花費一些篇幅，可是卻可以減少某些學生的心理負擔。

3. 學習複變函數的另一個困難是來自拓樸性質的複雜性。本書作者對於拓樸問題採取廻避的態度。

例如，在Cauchy積分定理的敍述，作者輕描淡寫的說「z_0是封閉曲線γ內部的點」。至於什麼是內部、什麼是外部，那就只有依靠作者與讀者之間的默契了。我們可以說，如果曲線是簡單閉曲線（simple closed curve），讀者可以憑直觀去理解「內部」與「外部」，並且不會產生邏輯的謬誤，因爲 Jordan-Schoenflies 定理保證直覺並沒有欺騙我們。但是像下圖的 γ 與 z_0，究竟 z_0 是不是 γ 內部的點呢？



通常的複變函數的書都採用E.Artin的繞數（Winding Number）來解決這個困難，或者乾脆考慮基礎羣（Fundamental Groups）。這個拓樸的問題常常變成學生學習複變函數線積分的障礙，甚至變成他們不善於運用Cauchy 積分定理的原因之一。因此本書採取「不證自明」的態度似乎不無見地。

4.本書把積分法、冪級數、奇異點都各自獨立成為一章。有些作者甚至把這些定理合成一章，交互使用線積分與冪級數的方法。例如Mackey 只用一章（共52頁）的篇幅，就講完本書的核心內容（見參考資料 7 ）。

可是本書這種講法自有其可取之處。學生可以慢慢的熟習各種工具的運用。有些人固然可以同時左手畫方、右手畫圓；有的人卻只能每次用一隻手畫一種圖形。

這種講法的缺點是，有時某些定理被不合理的割裂。例如，留數定理在第34節出現，它的應用卻在第37節出現，而留數的計算在第53節才出現。同樣的情形，泰勒展開式與羅郎展開式只不過是Cauchy 積分表示式的簡單延伸，但是這三者卻分別在第35、44、51節出現。

5.許多現代的教科書在 Cauchy 積分定理部份，常常有一段頗長的保角變換的討論（主要是Moebius Transformation）。本書把保角變換擺在最後一章，因此學生在學習初期就接觸到一些深刻而又引人入勝的結果，如，Cauchy 積分定理與留數定理。相信這種安排有助於學生的學習興趣。

6.本書第 445 頁的人名對照表，把Mittag 與Leffle 分別開列。我想，這樣做會使讀者誤會那是兩個人。Mittag-Leffler 是瑞典人，Weierstrass的學生，著名的數學雜誌「Acta Mathematica（Uppsala）」的創辦者。本書沒有列出參考文獻，也沒有告訴學生唸完這些複變函數ＡＢＣ之後，下一步該做什麼。的確是美中不足。培養學生對數學的發展有通盤的認識（Global View），似乎是比較健康的教學態度。

總的來說，傅溥先生這本「複變函數論」是一本好書，值得向初學者推荐。如果有人唸了Ahlfors 的「Complex Analysis」（參考資料 1 ）感覺心茫茫然，如墜入五里霧中，我建議他唸唸這本「複變函數論」。你將會發覺，原來複變函數竟是這麼具體，這麼直覺，同時又這麼優美！

傅先生編著這本書所花費的心力值得我們感激。寫作一本好書，一方面固然是滿足個人的創作衝動，另一方面則是對社會、對文化的貢獻。如果有許多學生從這本書中學到複變函數的初步理論，傅先生應該會感到很欣慰吧。

(三)

好的初等微積分的書並不多。和這情形完全相反的是，複變函數的好書可不少，並且第一流的數學家似乎很樂意寫複變函數的書，例如，Hurwitz-Courant，Jordan，Tannery，E.Borel,Goursat, Picard，Bieberbach，Julia, Titchmarsh，Carathéodory，Saks-Zygmund，Hille，Ahlfors，H. Cartan，Nevalinua-Paatero，Mackey，Polya。其中Ahlfors 的「Complex Analysis」（參考資料 1 ）是許多教師喜歡採用的教科書。

「複變函數論」只介紹初步的理論，下一步該怎麼辦？讀者從以上名家的書不難找到方向。我的建議是，稍微專門一點的複變函數的

教材可以看看，1.橢圓函數，2.黎曼面，3.特殊函數。

複變函數是通往近世數學的一道門戶。可是以今天的標準來看，(單)複變函數是不是還有一些好問題值得研究呢？

十九世紀末期與二十世紀初期，(單)複變函數的研究在巴黎的確是一門非常興旺的學問。儘管有人認為，(單)複變函數的研究已經脫離數學的主流(參考資料4)，目前這方面的研究者還是不少(參考資料2)。我不是函數論的專家，沒有資格回答這麼微妙的問題；只能把它做為一個問題提出來，提醒讀者。

複變函數的研究在兩年前有一個新聞：Bieberbach猜測被證實了。L.Bieberbach是柏林大學的教授，1910年他在Hilbert第18問題的研究(Crystallographic Groups)作了決定性的突破。1916年他提出一個猜測：若 $f(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$ 是單位圓上的解析單射，則 $|a_n|\leqslant n|a_1|$，$\forall n$。Bieberbach猜測有什麼重要性呢？根據L.V.Ahlfors的看法，它不見得是一個非常有意義的問題，但是為了解決這個問題，卻推動了單複變函數論的發展。Bieberbach猜測在1984年春天由美國普渡大學教授Louis de Branges加以證明(參考資料3，5)。

參考資料

1. L.V.Ahlfors. *Complex analysis*, 2nd, *ed.*,「歐亞書局」翻印本。
2. K.F.Barth, D.A.Brannan and W.K.Hayman, Research problems in complex analysis, *Bull. Landon Math.* Soc. 16 (1984) 490～517。
3. L.de Branges, A proof of the Bieberbach conjecture, *Acta Math.* (Uppsala) 154 (1985) 137～152。
4. J.Dieudonné, Present trends in pure mathematics, *Adv. in Math* 27 (1978) 235～255。
5. C.H Fitzgerald, *The Bieberbach conjecture: retrospective*, *Notices Amer. Math. Soc.* 32 (1985) 2～6。
6. E.Neuenschwander, Studies in the history of complex function theory Ⅱ: interactions among the French school, Riemann, and Weierstrass, *Bull. Amer. Math.* Soc. 5 (1981) 87～105。
7. G.W.Mackey, *The theory of functions of a complex variable*, Van Nostraud, 1967, Princeton。
8. D.S.Mitrinovic and J.D. Keckic, *The Cauchy method of residues*, D. Reidel, 1984, Dordrecht.
9. G.Sansone and J.Gerretsen, *Lecturs on the theory of functions of a complex variable*, 2 vols, Walters-Noordhoff, 1969, Groningen。

—本文作者任教於台灣大學數學系—