



一個電腦遊戲的數學化

嚴劍琴

1. 前言

實驗室內新增購了一台德州儀器公司的個人電腦，其中最引人注目的是此系統內的「語音指令系統」。它亦是我們實驗的重點。實驗室的同仁們，均熱衷地使用電腦撥接電話、儲存語音、識別語音指令等。由於語音數位處理技術的成熟及資訊技術的應用，使得與機器（電腦）交談，已不再如「天方夜譚」，日後，或將深入我們的生活，成為每日接觸的一部分。

有一天，阿玉無意中在此電腦之溫式磁碟機裏，找到了唯一的一個電腦遊戲，讓我們得以在持續的工作中，得到一些額外的樂趣。此電腦遊戲是以BASIC語言寫成，程式的本身及遊戲的規則均很簡單，但玩起來却得花點心思去思維，否則還真會輸給電腦呢！

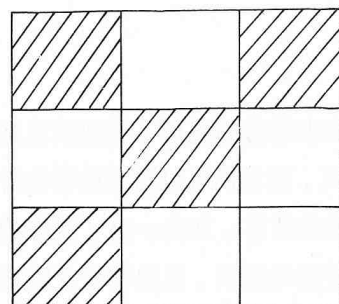
2. 遊戲規則

由於此電腦的彩色銀幕及其作圖能力，遊戲變得五彩繽紛且變化莫測，非常吸引人，玩

法是這樣的。

首先，銀幕將產生一個 3×3 的方陣圖形，方陣內含有九個小方塊形，每個小圖格或為黑色，或具有一美麗之圖案，我們稱此 3×3 方陣圖形為起始（Initial）圖形。起始圖形為任意產生，每次均不相同。遊戲之最終目的是要在限定的次數內，將此起始圖形轉變為除了中間一格為黑色外，其餘周圍八格均具圖案。

我們以圖一來表示某一起始圖形，及其相關位置編號。



1	2	3
4	5	6
7	8	9

圖一

上圖代表起始圖形，斜線部份表示黑色，白色部份表示具有圖案。下圖表示每一圖格之編號，代表電腦鍵盤上1至9的鍵。我們只要按1至9任何一鍵，即能轉變圖形，其規則如下：

(1)當按下中間位置之鍵(即5號)，則其與其上下左右之圖形均改變，由有圖形變為黑色，或由黑色變為有圖形，即2、4、5、6、8五個位置之圖形均反轉，其餘則不變。

(2)如果按下四個角落(1、3、7、9號)之鍵時，則其與其鄰近三個位置的圖形均須反轉，其餘則不變。例如：按下1鍵，則1、2、4、5四個位置的圖形反轉。

(3)如果按下偶數位置(2、4、6、8號)之鍵時，則其與其上、下或左、右位置的圖形均須反轉，其餘不變。例如：按下2鍵，則其左右之1、3位置之圖形與2之圖形須反轉，其餘不變。按下4鍵，則其上下之1、7與4號之圖形均須反轉。按6，則3、6、9位置圖形改變，按8，則7、8、9改變。

3. 數學模式化

現在由遊戲的規則，我們試着來建立一個數學模式，讓我們可以藉着數學的計算，求出這個遊戲的解答。如此一來，或許我們會失去了玩此遊戲的趣味，但數學平身的推理過程，不也是一種極具挑戰性的遊戲嗎？

3.1 建立一個線性方程組(9×9)

首先，我們發現，鍵盤上的任一個鍵，按兩次或偶數次，對於整個圖形是沒有任何影響的(因為負負得正，又還原回來了)。其次，按鍵的先後次序，對於所造成的最終圖形也是

無關緊要的。如此，對於給定的一個起始圖形，我們試着尋求一個解答；看這九個鍵中，那幾個是必須按的，那幾個是不動的，而能得到最終目標。很明顯的，最壞的狀況是九個鍵都必須按，也就是須要九步才能贏。

其次我們觀察知道，使得1號圖格改變的因素是，按下1號鍵、2號鍵、或4號鍵。會使2號圖格改變的是1號鍵、2號鍵、3號鍵及5號鍵。會使5號圖格改變的是1號鍵、3號鍵、5號鍵、7號鍵及9號鍵，以此類推可以得知影響其他各圖格的鍵。

對應於每一鍵(或圖格)，定義 x_i 是二元體 $GF(2)$ 的元素， $i=1, 2, \dots, 9$ 。所謂二元體是一個包含0和1的集合，其元素的加法和乘法與普通實數的運算一樣，除了 $1+1=0$ 這個例外，列表如下：

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$x_i=0$ 表示第 i 鍵不按， $x_i=1$ 則表示第 i 鍵按下。另外對於起始圖形及最終圖形，我們分別有 b_i 及 f_i ， $i=1, \dots, 9$ ，相對應。 $b_i=0$ 表示一開始第 i 圖格是黑色， $b_i=1$ 表示開始時第 i 圖格有美麗的圖案。同理， $f_i=0$ 或1分別表示最後第 i 圖格要變為黑色或美麗圖案。有了 b_i 和 f_i ，我們的目標是要求 x_i 。由上一段的觀察可以立下如下的聯立方程組。

$$x_1 + x_2 + x_4 + b_1 = f_1 \quad (1 \text{ 號鍵})$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + b_2 = f_2 \quad (2 \text{ 號鍵})$$

$$x_2 + x_3 + x_6 + b_3 = f_3 \quad (3 \text{ 號鍵})$$

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_7 + b_4 = f_4 \quad (4 \text{ 號鍵})$$

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + b_5 = f_5 \quad (5 \text{ 號鍵})$$

$$x_3 + x_5 + x_6 + x_9 + b_6 = f_6 \quad (6 \text{ 號鍵})$$

$$x_4 + x_7 + x_8 + b_7 = f_7 \quad (7 \text{ 號鍵})$$

$$x_5 + x_7 + x_8 + x_9 + b_8 = f_8 \quad (8 \text{ 號鍵})$$

$$x_6 + x_8 + x_9 + b_9 = f_9 \quad (9 \text{ 號鍵})$$

其意義是，例如：1號圖格由原始 b_1 值，再加上影響此圖格之1、2、4號鍵所對應的變數 x_1 、 x_2 、 x_4 ，最後得到 f_1 。九個圖格可推出九

個方程式，再加上每個起始圖形已知之 b_i 值，及每個圖形被規定之最終值 f_i ，可以解出 x_i 之值，將此聯立方程組改為矩陣的形式。

$$M\tilde{x} + \tilde{b} = \tilde{f}$$

其中

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_9 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_9 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.2 解聯立方程組求解

如果 M^{-1} 存在，則我們的解答 $\tilde{x} = M^{-1}\tilde{b} + M^{-1}\tilde{f}$ （請注意，因為 $1 + 1 = 0$ ，所以 $-1 = 1$ ，故向量 $M^{-1}\tilde{b} = -M^{-1}\tilde{b}$ ）。真正計算（事實上我們寫了一個電腦程式來算）得到 M^{-1} 如下。

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此

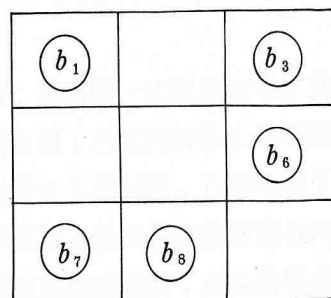
$$\tilde{x} = M^{-1}\tilde{b} + M^{-1}\tilde{f} = M^{-1}\tilde{b} + \tilde{f}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 + b_3 + b_6 + b_7 + b_8 & +1 \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_4 + b_5 + b_6 + 1 \\ b_1 + b_3 + b_4 + b_8 + b_9 & +1 \\ b_1 + b_2 + b_4 + b_5 + b_7 + b_8 & +1 \\ b_1 + b_3 + b_5 + b_7 + b_9 & +1 \\ b_2 + b_3 + b_5 + b_6 + b_8 + b_9 & +1 \\ b_1 + b_2 + b_6 + b_7 + b_9 & +1 \\ b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8 + b_9 & +1 \\ b_2 + b_3 + b_4 + b_7 + b_9 & +1 \end{pmatrix}$$

若解答 \tilde{x} 中之 $x_i = 0$ ，則無須按下 i 鍵，否則 $x_i = 1$ ，則按下此鍵，這就是我們的解答了！

為了方便記憶，我們發現如下的規則：

(甲)四角的 x_i 等於此角的 b_i 加上對角所在行列的各 b_i 和（但對角除外），最後加1。圖示如下（只畫出1號鍵、3號鍵、7號鍵及9號鍵與此類似。）



$$x_1 = b_1 + b_3 + b_6 + b_7 + b_8 + 1$$

(乙) 偶數號鍵的 x_i 等於此鍵所在的兩列或兩行的各 b_i 和加 1。

b_1	b_2	b_3
b_4	b_5	b_6

b_1	b_2	
b_4	b_5	
b_7	b_8	

上圖的和加 1 得到 x_2 (x_8 相似，求最下兩列之和)，下圖的和加 1 得到 x_4 (x_6 相似，求最右兩行之和)。

(丙) 中間的 x_5 則等於所有奇數 i 所對應的 b_i 和 (不再加 1)。

b_1		b_3
	b_5	
b_7		b_9

4. 遊戲規則之擴張及變更

此遊戲之原始規則有一則例外，則是在遊戲中途，若圖格全部轉為黑色，則我們便算輸了。若加了這個例外，則按鍵之先後次序便有關了，我們必須避免在得到最終圖形的過程中，使圖格全變為黑色，其解決的方法是這樣的：假設我們由起始圖形 \underline{b} 之值，經過按鍵 \underline{x}' 後

，使所有圖格變黑，得到 $\underline{Q} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]'$ ，則

$$M\underline{x}' + \underline{b} = \underline{Q} \quad (1)$$

而我們要尋求的解答 \underline{x} ，則滿足

$$M\underline{x} + \underline{b} = \underline{f} \quad (2)$$

同樣，我們可以求得 \underline{x}' 及 \underline{x} ，並加以比較，若 \underline{x}' 中，每個為 1 的元素，在 \underline{x} 中亦為 1，例如

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

則我們必須避免先按 x_1 及 x_4 兩鍵，再按其他鍵，則仍是可得到解答。至於 \underline{x} 及 \underline{x}' 之比較得到其他情況，則按鍵之次序便無關了。

另外，若改變遊戲的規則，例如按鍵與圖格變化的相關關係改變，則 M 矩陣跟着變，若遊戲之最終目標變更，則可得一新的 \underline{f} 。只要 M^{-1} 存在，則一定有解答，且一定能在最多九次內擊敗電腦。

5. 電腦程式

如果讀者擁有任一個人電腦，想要玩此遊戲，並印證此解答的話，可寫一 BASIC 語言程式來產生此遊戲，然後利用上面的公式決定按那幾個鍵，來和電腦一較高下。或許一般的個人電腦沒有繪圖能力，沒關係，我們以數字 0 來代表黑色，以數字 1 代表彩色圖格，以下之程式即是此遊戲程式，試試看吧！

```

5 REM reverse game
100 DIM D(9)
110 GOSUB 260
120 GOSUB 330
130 N=1
140 PRINT "ASSIGN#";N;" ";:INPUT X
150 GOSUB 510
160 IF EF=1 THEN 140
170 N=N+1
180 GOSUB 580
190 GOSUB 330
200 GOSUB 400
210 IF L$="" THEN 140
220 PRINT L$
230 PRINT "TRY AGAIN (Y OR N)";: INPUT A$
240 IF LEFT$(A$,1)="Y" THEN 110
250 END
260 S=0
270 FOR I=1 TO 9
280 P=INT(2*RND(15))
290 D(I)=P: S=S+D(I)
300 NEXT I
310 IF S=0 THEN 270
320 RETURN
330 PRINT: PRINT
340 FOR I=0 TO 6 STEP 3
350 FOR J=1 TO 3
360 PRINT TAB(7+3*J);D(I+J);
370 NEXT J: PRINT
380 NEXT I: PRINT
390 RETURN
400 S=0: L$=""
410 FOR I=1 TO 9
420 S=S+D(I)
430 NEXT I
440 A$="YOU LOSED THE GAME !!"
450 B$="CONGRATULANT !!"
460 IF S=0 THEN L$=A$
470 IF N>20 THEN L$=A$
480 IF S<>8 THEN 500
490 IF D(5)=0 THEN L$=B$
500 RETURN
510 EF=0
520 IF X<=9 THEN RETURN
550 PRINT "???" ILLEGAL INPUT"
560 PRINT :EF=1
570 RETURN
580 C$="124501230023560147002456836900457807890056890"
590 D(0)=0
600 FOR I=(5*X-4) TO 5*X
610 P=VAL(MID$(C$,I,1))
620 IF D(P)=0 THEN D(P)=1: GOTO 640
630 D(P)=0
640 NEXT I
650 RETURN

```