電腦專題

韓信點兵問題摭談

何景國

新編高中基礎數學第一册第一章習題 1-1 中有一道題目很值得研究：「韓信點兵，兵不滿一萬，每 5 人一數，9 人一數，13人一數，17 人一數，都餘 3 人，問兵有多少？」。在這個題目中，由於每一種數法所得之餘數都相同，所以利用最小公倍數法，求 5，9，13，17 之最小公倍數，再加餘數 3，就很容易的算出人數爲 9948 了。可是如果在各種數法所得之餘數不盡相同時，要計算人數可就不這麼容易了！如在古老的「孫子算經」中，流傳民間頗廣有「韓信點兵」、「鬼谷算」等名稱的著名問題，便是一例。這個問題出自漢武帝劉邦在巡狩雲夢大澤時，想趁機捉拿韓信其中之一段對話錄。對話是這樣子的：

劉邦：「卿部下有多少兵卒？」

韓信：「啓奏陛下，兵不知數，三三數之賸二，五五數之賸三，七七數之賸二」自感身危的韓信，不得不謹愼地回答。

到底韓信手下究竟有多少兵卒呢?!陳平使盡神機妙算，也無法數淸，連當時號稱「運籌帷幄之中，決勝千里之外」的張良竟也回答說：「兵數無法算，不可數！」。

宋代的一本筆記中，寫下它的解答，有詩爲證。

三歲孩兒七十稀，五留廿一事尤奇；

七度上元重相會，寒食清明便可知。

這首四句詩，您懂得它的意思嗎？這與明朝程大位著算法統宗解題歌訣一樣撲朔迷離。歌訣如下：

三人同行七十稀，五樹梅花廿一枝；

七子團圓正半月，除百零五便得知。

但是一經道破，就很簡單了。詩中「三歲孩兒七十稀」是說，用 3 去除所得的餘數（即 2）用 70 去乘（即 2×70）；「五留廿一事尤奇」是說，用 5 去除所得的餘數（即 3）用21去乘（即 2×21）；「七度上元重相會」（古稱正月十五日爲「上元」，所以「上元」是暗指「15」）是說，用 7 去除所得的餘數（即 2）用 15 去乘（即 2×15）；「寒食清明便可知」（古稱「冬至百六是淸明」，寒食是淸明前一日，所以「寒食淸明」暗指「105」）是說，把上面所得的三個數相加，加得的和若大於 105，便減去 105 的倍數。這樣得到的數就是最小的一個解答。今算式如下：

$$\begin{cases} 2\times 70+3\times 21+2\times 15=233 \\ 233-2\times 105=23 \end{cases}$$

23 即爲所求。

這些道理是這樣的：70是 5 與 7 的倍數用 3 去除餘 1；21是 3 與 7 的倍數用 5 去除餘 1；15 是 3 與 5 的倍數，用 7 去除餘 1，故：

$$2\times 70+3\times 21+2\times 15=233$$

用 3 去除餘 2，用 5 去除餘 3，用 7 去除餘 2。70，21，15是如何求得呢？用今天的符號，同餘式的理論來說，則「韓信點兵」問題相當於求解下列聯立同餘式，（今外國人稱解聯立同餘式爲「中國餘式定理」（又稱孫子算法））。

$$\begin{cases} x\equiv 2 \pmod 3 \\ x\equiv 3 \pmod 5 \\ x\equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$$

求出滿足上述聯立同餘式之最小正整解，即爲兵卒人數了。求 70 之法：

$$\begin{cases} x\equiv 1 \pmod 3 \cdots\cdots\cdots ① \\ x\equiv 0 \pmod 5 \cdots\cdots\cdots ② \\ x\equiv 0 \pmod 7 \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

由②，③兩式得 $x=5\times 7y$

即　$35y-3t=1$（其中 t 爲一整數）

利用輾轉相除法可得：$y=-1$，$t=-12$

故　$x=-35\equiv 70 \pmod{105}$

同理，可求得 21 和 15 。

古時解法甚多，另一解爲孫子算經。「術曰：三三數之賸二，置一百四十；五五數之賸三，置六十三，七七數之賸二，置三十；并之，得二百三十二，以二百一十減之即得。凡三三數之賸一則置七十；五五數之賸一則置二十一；七七數之賸一則置十五，一百六以上，以一百五減之即得」。再另一解爲秦九紹在數書九章中的大衍求一數。（即今天的歐基里得 EUCLID 輾轉相除法，也就是解同餘方程式法）。

元數　3，5，7

衍母　105

衍數　35，21，15

奇數　2，1，1

乘率　2，1，1

乘數　2×35，1×21，1×15

餘數　2，3，2

用數　$2\times 2\times 35$，$3\times 1\times 21$，$2\times 1\times 15$

$$\begin{array}{ccc} \| & \| & \| \\ 140 & 63 & 30 \end{array}$$

則答數爲

$$140+63+30-2\times 105=23$$

用今天同餘理論符號，則爲：

解下列聯立同餘方程式：

$$\begin{cases} x\equiv 2 \pmod 3 \cdots\cdots\cdots ① \\ x\equiv 3 \pmod 5 \cdots\cdots\cdots ② \\ x\equiv 2 \pmod 7 \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

這裡 $3\cdot 5\cdot 7=3\cdot(5\cdot 7)=5\cdot(3\cdot 7)=7\cdot(3\cdot 5)$，故分別以 35，21，15 乘上面之①，②，③方程式得：

$$\begin{cases} 35x\equiv 70 \ (\bmod\ 35\times 3=105) \cdots\cdots (甲) \\ 21x\equiv 63 \ (\bmod\ 21\times 5=105) \cdots\cdots (乙) \\ 15x\equiv 30 \ (\bmod\ 15\times 7=105) \cdots\cdots (丙) \end{cases}$$

所以，由(乙)＋(丙)－(甲)式得：

$$x\equiv 233 \pmod{105}$$

或

$$x\equiv 23 \pmod{105}$$

故，23 爲最小之正整數解。

這個問題，清朝曾紀鴻（1848－1877），又介紹了另一種解法。解答是以現在代數式解之：

$$\left|\ \frac{n}{(3,5,7)}=(2,3,2)\right.$$

所以　$n=3x+2=5y+3=7z+2$

即得　$x=y+\dfrac{3y+1}{3}$

式中，令 $\dfrac{3y+1}{3}=t$ 得 $y=t+\dfrac{t-1}{2}$

再令 $\dfrac{t-1}{2}=u$，則 $t=2u+1$

故 $\begin{cases} y=3u+1 \\ x=5u+2 \end{cases}$

且 $n=3x+2=15u+8$

$7z=15u+6$

或 $z=2u+\dfrac{u+6}{7}$

令 $\dfrac{u+6}{7}=v$，則 $u=7v-6$，

$z=15v-12$

故 $n=7z+2=105v-82$

令 $v=1$

則得 $n=23$

這裡主要目的是採用解線性方程式的方法來研究「韓信點兵」的問題。並且利用這解題原理來設計一個由BASIC寫成的電腦程式，由它在電腦上執行求解。毫無疑問的，這是「韓信點兵」的一種電腦解法。（見附錄程式(一)及其執行樣本）

下面我們再來介紹用疊合原理來解線性方程的方法。

首先我們必須要說明疊合原理的種種意思。這可分成三方面來說：

Ⅰ、齊次的情形： $L(y)=0$

由於齊次解空間是一個線性空間，所以解答有無限多個，我們可以先找解空間的基底，從而任何一個解答皆可以表成這些基底元素之線性組合。

Ⅱ、非齊次的情形： $L(y)=g$

此時疊合原理可以敍述成：

一般解＝特別解＋齊次解

這就是說，要找非齊次線性方程式的解答辦法是：先找出

$$L(y)=g$$

的任意一個特別解答，其次找

$$L(y)=0$$

的齊次一般解答，再將它們疊合起來，就是得到 $L(y)=g$ 的一般解了。

Ⅲ、$L(y)=f+g$ 的情形：

此時分別考慮 $\begin{cases} L(y)=f \\ L(y)=g \end{cases}$，及

先求出特解，再將特解疊合起來，就得到 $L(y)=f+g$ 之特解，其次可仿Ⅱ的辦法作一次疊合，就得到

$$L(y)=f+g$$

的通解了。

有了上述的理解，假如我們令某數 x 用 m_1 去除餘 r_1，用 m_2 去除餘 r_2，用 m_3 去除餘 r_3，求某數 x。

用代數符號寫出就是求滿足：

$$\begin{cases} x=m_1k_1+r_1 \\ x=m_2k_2+r_2 \cdots\cdots(甲) \\ x=m_3k_3+r_3 \end{cases} \quad （其中 k_1，k_2 \; k_3 為整數）$$

的 x 解法也並不困難。這是一次不定方程式整數解的問題。

我們將(甲)式改寫為：

$$\begin{cases} x-m_1k_1=r_1 \\ x-m_2k_2=r_2 \\ x-m_3k_3=r_3 \end{cases}$$

若 L 為一線性變換，則上方程式，轉化為下面的問題：

已知 $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$，要找未知數 x，使得 $L(x)=\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$

這是一個典型的解方程式的問題。我們用疊合原理來求解。

(i) 先解齊次方程式 $L(x)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

此時解空間為一線性空間，只不過用整數作係數乘法而已！

今滿足。

$$L(x)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

的 x 是 m_1，m_2 及 m_3 的倍數，故所有的齊次解都是 m_1，m_2，m_3 的最小公倍數 d 之倍數，亦即齊次解空間爲：

$$\{\,d\cdot k\ /\ k\in Z\,\}$$

(ii) 其次解 $L(x)=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix}$

我們先找一個特別解。如何求解呢？

首先注意到：

$$\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\r_2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\r_3\end{pmatrix}$$
$$=r_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+r_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+r_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

因此只要解：

$$L(x)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad L(x)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad L(x)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

再作疊合就好了。這時候只要找到適當的 a_1，a_2，a_3 使它們分別滿足：a_1 以 m_1 除剛好餘 1，而都可以被 m_2，m_3 整除；a_2 以 m_2 除餘 1，又可以被 m_1，m_3 分別整除；a_3 以 m_3 除餘 1，可以被 m_1，m_2 整除；則由疊合原理知 $a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3$ 爲

$$L(x)=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix}=r_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+r_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+r_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

的一個特解。

因此一般解可以表成如下：

$$a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3+dt$$

式中，d 爲 m_1，m_2，m_3 的最小公倍數，且 t 爲一整數。

利用上面所介紹的方法，我們就可以解說「韓信點兵」問題及四句詩的解法。

設兵卒有 x 人，因爲三三一數餘二，故知 $x-2$ 是 3 的倍數，即：

$$x-3k_1=2\text{，其中 }k_1\text{ 爲整數}$$

同理，

$$x-5k_2=3\text{，其中 }k_2\text{ 爲整數}$$
$$x-7k_3=2\text{，其中 }k_3\text{ 爲整數}$$

換言之，我們可得下列線性方程式如下：

$$L(x)=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

今滿足 $L(x)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 的 x 是 3 的倍數，且是 5，7 兩數的倍數，故所有的齊次解都是 3，5，7 的最小公倍數的倍數，亦即齊次解空間爲

$$\{\ 105t\ \mid\ t\in Z\ \}$$

其次，我們必須找一個特解，因此只要解

$$L(x)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad L(x)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad L(x)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

再作疊合就好了！可是

$$L(x)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

中的 x 表示可被 5 及 7 整除，且用 3 去除餘 1，也就是說 x 是 35 的倍數，且用 3 去除餘 1，顯然 $a_1=70$ 合乎所要求，故 70 是一個特解，同理，我們分別求得

$$L(x)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\text{，及 }L(x)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

的某一個特解 $a_2=21$ 及 $a_3=15$。由疊合原理知

$$a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3=70(2)+21(3)+15(2)$$
$$=233$$

亦爲一個特解，因此一般解爲：$233+105t$，$t\in Z$

而最小正整數爲 23 (取 $t=-2$)

回顧「韓信點兵」的解題四句詩中 70 , 21 , 15 這三個數，剛好是應選的 a_1 , a_2 , a_3 而 105 剛好是 m_1 , m_2 , m_3 的最小公倍數 d , 除百零五便是再以最小公倍數屢減之，就可以求得最小正整數 23 了。

也就是說，兵卒人數可能是23個 (取 $t=-2$)，也可能是 128 個 (取 $t=-1$)，也可能是，…………

應用上面解線性方程式的方法，我們還可以用BASIC來寫程式輸入電腦，將方程式的個數 n ，及各組數字 m_i 與 r_i ，($i=1$, 2 , 3 , ……, n) 鍵入電腦，很快地就可以得到了答案。下面就是「韓信點兵」電腦解法程式。

```
]LIST

 10  REM    CHINESE REMAINDER THEOREM
 20  REM
 30  HOME : CLEAR
 40  POKE 34,0
 50  ONERR  GOTO 30
 60  GOSUB 1160
 70  GOSUB 1370
 80  FOR LL = 1 TO 1000: NEXT : VTAB 10: HTAB 15: FLASH : SPEED= 120: PRINT
     "  WELCOME !!": NORMAL : SPEED= 255
 90  GOSUB 1310
 100  INVERSE
 110  PRINT "      CHINESE REMAINDER THEOREM
 120  PRINT
 130  NORMAL
 140  VTAB 3: PRINT "mk be natural numbers";: HTAB 26: PRINT "&&&&&&&&&&&&
     &&&"
 150  VTAB 4: PRINT "0<= rk < mk";: HTAB 26: PRINT "& TYPE ";: FLASH : PRINT
     "*";: NORMAL : PRINT " TO  &"
 160  VTAB 5: HTAB 26: PRINT "& STOP INPUT &"
 170  VTAB 6: PRINT "KEY-IN mk & rk PLEASE ";: HTAB 26: PRINT "&&&&&&&&&&&
     &&&&"
 180  PRINT "~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~"
 190  POKE 34,7
 200  DIM M(280),R(280),A(280),B(280)
 210 Y = 1:W = 0
 220  VTAB 9
 230  FOR I = 1 TO 280
 240  PRINT " m";I;":";: INPUT " = ";M$
 250  PRINT " r";I;":";: INPUT " = ";R$
 260  PRINT :W = W + 1
 270 M1 =  VAL (M$):R1 =  VAL (R$)
 280  IF W = 279 THEN 90
 290  IF M$ = "*" THEN  HOME :W = W - 1: GOTO 370
 300  IF R$ = "*" THEN  HOME :W = W - 1: GOTO 370
 310 M(I) = M1:R(I) = R1
 320  IF M(I) <  >  INT (M(I)) OR M(I) < 0 THEN 240
 330  IF R(I) <  >  INT (R(I)) OR R(I) < 0 THEN 240
 340  IF M(I) <  = R(I) THEN 240
 350 Y = M(I) * Y:A(I) = M(I):B(I) = R(I)
 360  NEXT I
 370  HOME : PRINT " DO YOU REVISE DATA? (Y/N) :: ";
 380  GET S$
 390  IF S$ = "Y" THEN  HOME :Y = 1: GOTO 420
 400  IF S$ = "N" THEN  PRINT : GOTO 530
 410  GOTO 380
 420 : FOR I = 1 TO W
 430 A$ = "m" +  STR$ (I) + "="
 440 B$ = "r" +  STR$ (I) + "="
 450  PRINT A$;M(I); SPC( 5);
```

```
460  INPUT "CORRECTION :: ";M2
470  PRINT B$;R(I); SPC( 5);
480  INPUT "CORRECTION :: ";H
490 M(I) = M2:R(I) = H
500 Y = M(I) * Y:A(I) = M(I):B(I) = R(I)
510  PRINT
520  NEXT I
530  HOME : VTAB 12: HTAB 10: PRINT "C A L C U L A T I N G !!"
540 S = 0
550 S = S + 1
560 P = M(S):B = R(S)
570  FOR J = 1 TO W
580  IF J = S THEN 600
590 Q = M(J):F = R(J): GOTO 610
600  NEXT J
610  GOSUB 920
620 G =  ABS (B - F) / N
630  IF G <  >  INT (G) THEN 760
640  IF S < W THEN 550
650  FOR V = 2 TO 99999999999
660  FOR L = 1 TO W
670 D = M(L):E = R(L)
680  IF  ABS ((V - E)) / D <  >  INT ( ABS (V - E) / D) THEN 740
690  NEXT L
700  GOSUB 800
710  IF X = Y THEN 980
720  HOME : PRINT
730  SPEED= 130: PRINT : PRINT "LEAST SOLUTON ::";V: GOTO 770
740  NEXT V
750  HOME
760  HOME : SPEED= 130: PRINT : PRINT "             NO SOLUTION!!": SPEED=
     255: GOTO 780
770  PRINT : PRINT : PRINT "GENERAL SOLUTON : ";V;"+";X;"t": SPEED= 255
780  GOSUB 1480
790  END
800 T = 1
810 C = M(1):D = M(2)
820 U = M(1) -  INT (M(1) / M(2)) * M(2)
830  IF U = 0 THEN 860
840 M(1) = M(2):M(2) = U
850  GOTO 820
860 X = C * D / M(2)
870 T = T + 1
880  IF T = W THEN 910
890 M(1) = M(T + 1):M(2) = X
900  GOTO 810
910  RETURN
920 M = P:N = Q
930 R = M -  INT (M / N) * N
940  IF R = 0 THEN 970
950 M = N:N = R
960  GOTO 930
970  RETURN
980  PRINT
990 A = 1:K = 0:R = 0
1000 K = K + 1:A = A * A(K)
1010 F = 1:O = 1
1020  FOR J = 1 TO W
1030  IF J = K THEN 1050
1040 F = F * A(J)
1050  NEXT
1060  IF (O * F - 1) / A(K) =  INT ((O * F - 1) / A(K)) THEN 1090
1070 O = O + 1
1080  GOTO 1060
1090 R = R + O * F * B(K)
1100  IF K < W THEN 1000
1110  HOME
```

```
1120  SPEED= 180: VTAB 15: PRINT "GENERAL SOLUTION : ";R;"+";A;"t (t:int
   eger)"
1130  PRINT "Least positive solution : ";R + A *  INT ( - R / A + 1): SPEED=
   255
1140  GOSUB 1470
1150  END
1160  HOME
1170  FOR I = 18 TO 10 STEP  - 1
1180 T = 1
1190  VTAB 10: HTAB I - 2 * T
1200  SPEED= 240
1210  PRINT "CHINESE REMAINDER THEOREM  "
1220  VTAB 12: HTAB I - 2 * T: PRINT "      BY HE-JING-KUO  "
1230  NEXT
1240  PRINT  CHR$ (7)
1250  FOR OO = 1 TO 1000: NEXT : SPEED= 255: RETURN
1260  FOR I = 24 TO 13 STEP  - 1
1270  HTAB 1: VTAB I: CALL  - 868
1280  VTAB (25 - I): CALL  - 868
1290  FOR J = 1 TO 5: NEXT : NEXT : CALL  - 936
1300  RETURN
1310  REM
1320  FOR I = 24 TO 13 STEP  - 1
1330  HTAB 1: VTAB I: CALL  - 868
1340  VTAB (25 - I): CALL  - 868
1350  FOR J = 1 TO 130: NEXT : NEXT : CALL  - 936
1360  RETURN
1370  REM
1380  HOME
1390 A$ = "CHINESE REMAINDER THEOREM"
1400  FOR I = 27 TO 3 STEP  - 1
1410  VTAB 2: HTAB 4 + I
1420  PRINT  LEFT$ (A$,28 - I)
1430  SPEED= 180
1440  NEXT
1450  SPEED= 255
1460  RETURN
1470  PRINT
1480  PRINT : PRINT
1490  PRINT : PRINT  TAB( 9);"** AGAIN?(Y / N) **"
1500  GET S$
1510  IF S$ = "Y" THEN YY = 1: GOTO 1540
1520  IF S$ = "N" THEN 1590
1530  GOTO 1500
1540  FOR I = 1 TO 12: POKE 35,I: CALL  - 936: POKE 34,(24 - I): CALL  -
   936: POKE 35,24: POKE 34,0: POKE 33,I: POKE 32,(I - 1): CALL  - 936:
   POKE 32,(40 - (2 * I)): CALL  - 936: POKE 32,0: POKE 33,40: FOR D =
   1 TO 25: NEXT
1550  NEXT
1560  IF YY = 1 THEN  PRINT : VTAB 10: HTAB 15: PRINT "W A I T!!"
1570  CLEAR : GOTO 90
1580  END
1590  FOR I = 1 TO 12: POKE 35,I: CALL  - 936: POKE 34,(24 - I): CALL  -
   936: POKE 35,24: POKE 34,0: POKE 33,I: POKE 32,(I - 1): CALL  - 936:
   POKE 32,(40 - (2 * I)): CALL  - 936: POKE 32,0: POKE 33,40: FOR D =
   1 TO 60: NEXT
1600  HOME : VTAB 5: PRINT  TAB( 15);"E N D !!"
1610  PRINT : CALL  - 868: SPEED= 170
1620  FOR I = 38 TO 1 STEP  - 1
1630  HTAB I: PRINT "]";: FLASH : PRINT " ";: NORMAL : CALL  - 868
1640  NEXT I: SPEED= 255: HTAB 2: PRINT " ";: VTAB  PEEK (37)
1650  END
```

韓信點兵電腦解實例說明

電腦操作	螢　幕　顯　示	說　明
鍵 RUN 按 ↲	*CHINESE REMAINDER* *　THEOREM　* *(mk: natural no.)*	中國餘式定理各 m_k 皆爲自然數
	*　Type -9 for stop ** input mk &rk　*	（數秒鐘後，自動顯示） 鍵入－9 表示停止輸入
	INPUT mk & rk PLEASE	請鍵入 m_k 與 r_k
	(m1,r1)=?	（數秒鐘後，自動顯示） 數對（m_1，r_1）中 m_1 之值？
鍵　3	&?	數對（m_1，r_1）中 r_1 之值？
鍵　2	(m2,r2)=?	數對（m_2，r_2）中 m_2 之值？
鍵　5	&?	數對（m_2，r_2）中 r_2 之值？
鍵　3	(m3,r3)=?	數對（m_3，r_3）中 m_3 之值？
鍵　7	&?	數對（m_3，r_3）中 r_3 之值？
鍵　2	WAIT !	請等候！
	calculating !	計算中！
	gen.solution 233+ 105t (t:integer) 1st posit.solution 23	一般解：233 + 105t （t：整數） 最小正整數解：23
	AGAINT ?(Y/N)	繼續嗎？（是／否）
按　N		停止計算
按　N		停

底下附錄兩道習題

1.物不知其數，六六數之賸四，八八數之賸五，三三數之賸二，求其物數？

電腦執行樣本之一：

```
RUN
(m 1,r 1)=( 6, 4 )
(m 2,r 2)=( 8, 5 )
(m 3,r 3)=( 3, 2 )
     No solution !!
```

2.物不知其數，八八數之賸六，六六數之賸四，五五數之賸三，求其物數？

電腦執行樣本二：

```
RUN
 (m 1,r 1)=( 8, 6 )
 (m 2,r 2)=( 6, 4 )
 (m 3,r 3)=( 5, 3 )

  least sol: 118
  g.sol.: 118+ 120t
```

透過上述一連串的各種解法，以電腦求解是最爲完善的，它不受除數 m_i 兩兩互質的條件所限制。在資訊時代的今天提供這一種方法，相信是非常有裨益的，尤其是在CAI 的電腦輔助教學熱潮中，更具教學價值。教師可以在解決問題的教學活動中用來輔助教學，以利教學進度；同時學生亦可以在電腦「跑」出來的結果，核對答案、作爲練習，反覆演練，以達到確實了解「中國剩餘定理」的原理及應用，符合教學目標。

參考資料

王懷權：數學發展史，協進圖書有限公司，民72年。

李恭晴：整數論，協進圖書有限公司，民66年。

黃武雄：中西數學簡史，人間文化事業公司，民69年。

楊維哲、蔡聰明：普通數學教程，文仁事業有限公司，民65年

各科試用教材摘介(一)，「中國剩餘定理」，科學教育月刊，第47期，民71年。

陳金追：Apple Ⅱ BASIC程式設計，松崗電腦圖書資料有限公司，民72年。

CASIO PB-700 EASY TRIP TO BASIC

CASIO FP-200 OPERATION MANUAL

CASIO FP-200 C_{85}-BASIC and CETL REFERENCE MANUAL

—本文作者任教於私立延平中學—