電腦專題

5階棋盤之騎士漫遊僅有112個解

林建宏

摘 要

本文提出一個常用的觀念，將二維陣列視為一維陣列的思考方式，用以找尋騎士漫遊的所有解。配合計算機之助，如不考慮對稱解，則可求出5階棋盤的騎士漫遊僅有112個解法。

19	14	7	2	25
6	1	18	13	8
15	20	9	24	3
10	5	22	17	12
21	16	11	4	23

5 × 5

29	40	31	34	27	18	3
32	35	28	39	2	9	20
41	30	33	26	19	4	17
36	25	38	1	8	21	10
45	42	47	22	13	16	5
24	37	44	7	48	11	14
43	46	23	12	15	6	49

7 × 7

1	38	55	34	3	36	19	22
54	47	2	37	20	23	4	17
39	56	33	46	35	18	21	10
48	53	40	57	24	11	16	5
59	32	45	52	41	26	9	12
44	49	58	25	62	15	6	27
31	60	51	42	29	8	13	64
50	43	30	61	14	63	28	7

8 × 8

1	18	33	14	3	20
34	29	2	19	8	13
17	32	15	12	21	4
28	35	30	7	24	9
31	16	11	26	5	22
36	27	6	23	10	25

6 × 6

圖 一

一、前言

十八世紀時，Euler 首先提出下列問題：

在8×8西洋棋盤上置一騎士，是否能找到63次的移動，使該騎士走遍棋盤上每一方格呢？

這個問題本身敍述簡單，一般人相當容易了解。事實上，想要找出一個解法，光靠手算，在Euler 那個時代，很可能辦不到的。原因是求解過程非常繁複。現在，祇要讀者有資料結構方面的知識，並具備程式設計的能力，經由計算機運算，要找到一個解法，應該是件很容易辦到的事。玆分別擧出5×5，6×6，7×7，8×8例解各一個，如圖一所示。（圖一請看上頁）

由於筆者得出5×5西洋棋盤騎士漫遊的一些解後，引發莫大興趣，進一步地想找出所有的解，經過一番研究，終於獲致如下結果：

若不考慮對稱解，則5階西洋棋盤之騎士漫遊僅有112個解。

以下是研究過程與結果。

二、基本符號定義與初步分析

爲論述精確起見，我們必須先將問題作適當轉化，並引進一些術語和符號。

西洋棋盤，爲方便起見，以下均簡稱棋盤。所謂5×5棋盤，如右邊圖二所示。

類似於線性代數中的n階方陣，我們稱5×5棋盤爲5階棋盤。5階棋盤可加上號碼，代表某一格子的位置。這種表示法，列於右邊圖三。

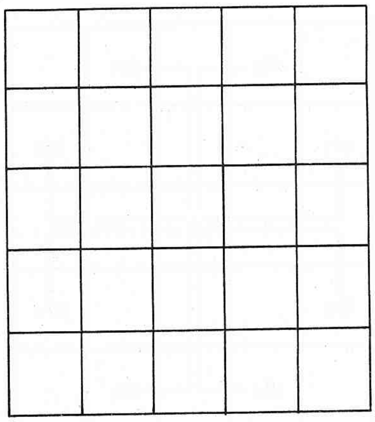

圖 二

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

圖 三

作法是將1到25的數字，由上而下，五個一列，依序塡入各相對應的方格中，分別代表棋盤上的每一方格。今定義這種表示法的方格k爲：

$$x_k\ ,\quad 1 \leq k \leq 25$$

例如，方格9可用x_9表示。由於騎士是走L字形，若將騎士置於方格k，則下一步的可能位置，如圖四所示，即下列8種情況：

x_{k-9} ：m_1

x_{k-3} ：m_2

x_{k+7} ：m_3

x_{k+11} ：m_4

x_{k+9} ：m_5

x_{k+3} ：m_6

x_{k-7} ：m_7

x_{k-11} ：m_8

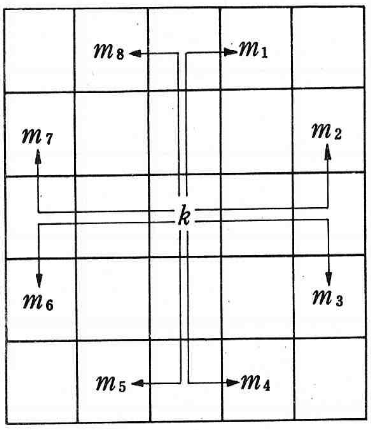

圖 四

此處m_i代表第 i 種走法，其中 $1\leq i\leq 8$ 。現在，我們將m_i看成算子，若原來位置爲方格 k，下一步爲方格 $k+p$ ，則前述 8 種走法可寫成

$$x_{k+p}=m_i[x_k]$$

其中 $p=\pm 3$, ± 7 , ± 9 , ± 11 ，而 $1\leq i\leq 8$ 。例如

$$x_{23}=m_5[x_{14}]$$

意思就是說，騎士原來的位置在方格14，採用第 5 種走法，那麼下一步的位置就在方格23了。附帶說明一點，各個m_i($1\leq i\leq 8$)順序可互換，並不影響整個問題的結果。由圖四易知，我們採取順時針方向。

必須特別注意的是，條件 $1\leq k\leq 25$，並不一定能保證 $x_{k+p}=m_i[x_k]$ 使得 $1\leq k+p\leq 25$ 亦成立。譬如

$$m_7[x_{12}]$$

就不是一個合法的移動，蓋因這個走法已使騎士跳出 5 階棋盤外了。由此可知，爲使騎士儘可能走遍 5 階棋盤的每一方格，必須再作適當的定義，以滿足 $1\leq k+p\leq 25$ 的條件。現在，我們定義正規走法如下：

定義 1：

假設騎士原來位置爲方格 k_1 ，採用第 i 種走法後，下一步位置爲方格 k_2，其中 $1\leq k_1\leq 25$ 。當 $1\leq k_2\leq 25$ 亦成立時，則稱此走法爲正規走法。

簡言之，正規走法就是騎士不跳出 5 階棋盤的走法。舉例來說，若騎士原來位於方格 1 ，則正規走法僅有下列兩種，即

$$x_8=m_3[x_1]$$
$$x_{12}=m_4[x_1]$$

或可改寫成

$$x_1\ ;\ x_8\ ,\ x_{12}$$

按照這種表示法，我們將 5 階棋盤上，其他方格的每一正規走法，列出如下：

x_2 ; x_9 , x_{13} , x_{11}
x_3 ; x_{10} , x_{14} , x_{12} , x_6
x_4 ; x_{15} , x_{13} , x_7
x_5 ; x_{14} , x_8
x_6 ; x_3 , x_{13} , x_{17}
x_7 ; x_4 , x_{14} , x_{18} , x_{16}
x_8 ; x_5 , x_{15} , x_{19} , x_{17} , x_{11} , x_1
x_9 ; x_{20} , x_{18} , x_{12} , x_2
x_{10} ; x_{19} , x_{13} , x_3
x_{11} ; x_2 , x_8 , x_{18} , x_{22}
x_{12} ; x_1 , x_3 , x_9 , x_{19} , x_{23} , x_{21}
x_{13} ; x_4 , x_{10} , x_{20} , x_{24} , x_{22} , x_{16} , x_6 , x_2
x_{14} ; x_5 , x_{25} , x_{23} , x_{17} , x_7 , x_3
x_{15} ; x_{24} , x_{18} , x_8 , x_4
x_{16} ; x_7 , x_{13} , x_{23}
x_{17} ; x_8 , x_{14} , x_{24} , x_6
x_{18} ; x_9 , x_{15} , x_{25} , x_{21} , x_{11} , x_7
x_{19} ; x_{10} , x_{22} , x_{12} , x_8
x_{20} ; x_{23} , x_{13} , x_9
x_{21} ; x_{12} , x_{18}
x_{22} ; x_{13} , x_{19} , x_{11}
x_{23} ; x_{14} , x_{20} , x_{16} , x_{12}
x_{24} ; x_{15} , x_{17} , x_{13}
x_{25} ; x_{18} , x_{14}

三、進一步分析與估計

由於 5 階棋盤共有25個方格，因此騎士走遍棋盤的解，可能有 $25! \approx 1.55 \times 10^{25}$ 個。1.55×10^{25} 與 112 差距太大了，我們還得繼續找出其他限制條件，才有可能將估計值再降低些。

今考慮將 5 階棋盤上的格子，以黑白兩色交錯塗色，但角上的格子均用黑色，則黑格子

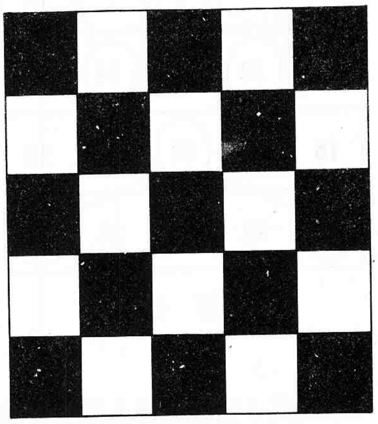

圖　五

的數目比白格子正好多一個，如圖五所示。而騎士每一步所經過的兩格子，由 8 種走法的特性可知，顏色必然不同。故騎士漫遊的解必然爲下列形式

黑－白－黑－白－⋯⋯－白－黑

即起始位置和終點位置都落在黑格子上。將這個結果，對應到帶有數字的 5 階棋盤，則可推得黑格子全爲奇數格，白格子全爲偶數格，並且起始位置和終點位置都落在奇數格上。因此，我們證明了下面定理：

定理 2：

若 5 階棋盤騎士漫遊有解，則起始位置和終點位置都落在奇數格上，且騎士走法，必奇數格偶數格相交錯。

這個定理，對我們幫助不小。假設騎士所走過的格子，依序爲

$$q_1, q_2, q_3, \cdots\cdots, q_{25}$$

其中 $q_j \in \{ x_k \mid 1 \leq k \leq 25 \}$，$1 \leq j \leq 25$。則由定理 2 可知

$q_1, q_3, \cdots\cdots, q_{25}$ 全是奇數格，共 13 個

$q_2, q_4, \cdots\cdots, q_{24}$ 全是偶數格，共 12 個

有了這個結果，我們估計騎士漫遊解頂多有 $13! \times 12! \approx 2.98 \times 10^{18}$ 個。此數值和 112 比較起來，還是不成比例。再找找看有沒有其他更明顯的條件，可供估計。前面提到的正規走法又是一個好條件。因爲在第二節末尾，我們已將 5 階棋盤所有 x_k（$1 \leq k \leq 25$）的正規走法求出。所以，再次估計騎士漫遊解個數爲 $2^4 \times 3^8 \times 4^8 \times 6^4 \times 8 = 2^{27} \times 3^{12} \approx 7.13 \times 10^{12}$。到此爲止，我們已盡最大努力，利用一些很明顯的限制條件，作 5 階棋盤騎士漫遊解的估計。經過實際運算，還有一個具決定性影響的條件，這個限制條件，表面上看起來不太明顯，那就是：若騎士下一步位置原先已走過，則不得重複。此條件，我們稱作非明顯限制條件。有關解的估計，在此結束，底下討論對稱問題。

四、對稱問題與起始位置的決定

5 階棋盤騎士漫遊的解，經歸納可發現下列三種不同形式的對稱解：

㈠旋轉對稱解

㈡鏡射對稱解

㈢逆向對稱解

所謂旋轉對稱解是指，以 5 階棋盤的中心方格爲準，順時針或反時針方向旋轉 90°，

180°, 270°, 則由此獲得的解即稱旋轉對稱解。而鏡射對稱解則是分別以棋盤的主對角線、斜對角線、水平中分線、垂直中分線爲準，將棋盤翻轉 180° 或反向翻轉 180°, 以此方式所得到的解就稱作鏡射對稱解。現在，我們要來說明逆向對稱解。請先參閱圖六所示：

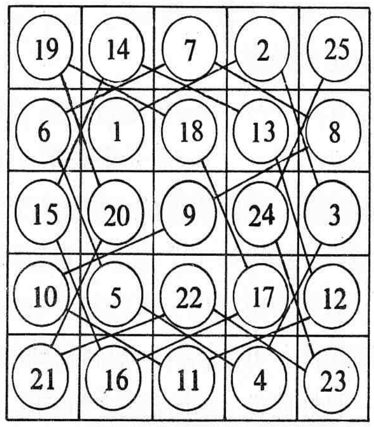

圖 六

圖六是一個 5 階棋盤騎士漫遊解。我們將每一步所走過的方格子，按號碼順序，用線連接起來。如此，則得一條走遍 5 階棋盤每一方格的折線。很容易看出，我們的走法是按照起始位置爲 1 號的格子開始，接著是 2 號格子，依次序下去，直至終點位置的25號格子。逆向對稱解就是說，將 25號格子視爲起始位置，倒序反方向走，再來是24號格子，繼續下去，直到 1 號格子爲止，這個解即爲逆向對稱解。有一點必須特別留意：反向走法是存在且唯一的。爲了說明這一點，我們重新將騎士位於方格 k 的 8 種可能走法列出如下：

x_{k-9} : m_1　　x_{k+9} : m_5

x_{k-3} : m_2　　x_{k+3} : m_6

x_{k+7} : m_3　　x_{k-7} : m_7

x_{k+11} : m_4　　x_{k-11} : m_8

顯然，m_1 與 m_5，m_2 與 m_6，m_3 與 m_7，m_4 與 m_8 均互爲反向走法，且是唯一對應的反向走法，故保證了逆向對稱解的反向走法是存在且唯一的。也基於這個理由，逆向對稱解是可行的。

定理 3：

若 5 階棋盤騎士漫遊有解，則騎士的起始位置或終點位置必須在角落上的格子裏。

證明：假設騎士的起始位置或終點位置不在角落上的格子，則騎士要走遍 5 階棋盤，必須經過四個角落上的格子。若騎士要經過四個角落上的格子，則所走的路線，如圖七所示，即必須重複走過某一格子，與規定不合。因此定理成立。

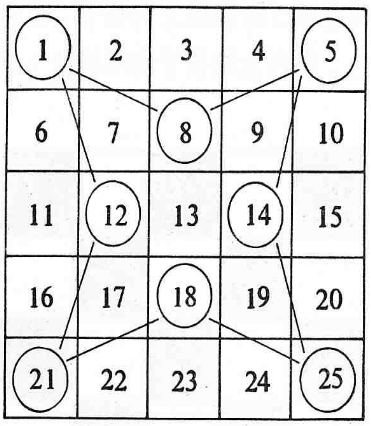

圖 七

定義 4：

設 K_5 爲 5 階棋盤騎士漫遊解的部分集合，且集合 K_5 滿足下列兩個條件：

㈠任二元素之間無對稱關係。

㈡不屬於 K_5 的其他 5 階棋盤騎士漫遊解，均可由 K_5 中的某一元素，經對稱關係求出。

則稱 K_5 爲 5 階棋盤騎士漫遊之基本解集合，其元素稱作基本解。

定理 5：

若 5 階棋盤騎士漫遊有解，則所有基本解之起始位置，可固定在角落上的任一格子開始。

證明：由定理 3 及逆向對稱解的性質可知，所有本解之起始位置，可選擇由角落上的格子開始。其次，由旋轉對稱解及鏡射對稱解的性質，易

知所有基本解之起始位置可固定在角落上的任一格子開始。證畢。

五、基本解之分析

定理 5 使得我們求 5 階棋盤騎士漫遊之基本解，省去很多時間。因爲我們祇要將騎士之起始位置，固定在某一角落上的格子，接著求出以此格子爲起始位置的所有解，再經分析，排除對稱解，即可找出基本解。

按照上面提到的方法，我們將騎士的起始位置，固定在 5 階棋盤之方格 1，同時將第二節結尾所計算出的每一方格之正規走法輸入計算機，經一番運算，可得出起始位置在方格 1 的解，共有 304 個。由於這些解包含對稱解，故須再加以分析，最後可得出 112 個基本解。

茲將 112 個基本解分成三類如下：

第一類基本解—起始位置在角上，但終點位置不在角上的解，共 64 個。

第二類基本解—起始位置在角上，而終點位置在相對角的解，共 18 個。

第三類基本解—起始位置在角上，而終點位置在同邊角的解，共 30 個。

底下，我們將 112 個基本解列出。

(1)	1	20	25	14	3	18	13	2	9	24	21	8	19	4	15	12	17	6	23	10	7	22	11	16	5
(2)	1	10	25	20	3	24	19	2	9	14	11	8	15	4	21	18	23	6	13	16	7	12	17	22	5
(3)	1	14	25	20	3	24	19	2	15	10	13	8	11	4	21	18	23	6	9	16	7	12	17	22	5
(4)	1	12	25	18	3	22	17	2	13	24	11	8	23	4	19	16	21	6	9	14	7	10	15	20	5
(5)	1	12	25	20	3	24	19	2	11	16	13	8	17	4	21	18	23	6	15	10	7	14	9	22	5
(6)	1	20	25	12	3	16	11	2	19	24	21	8	17	4	13	10	15	6	23	18	7	22	9	14	5
(7)	1	14	9	24	3	20	25	2	15	10	13	8	19	4	23	18	21	6	11	16	7	12	17	22	5
(8)	1	20	9	14	3	10	25	2	21	16	19	8	15	4	13	24	11	6	17	22	7	18	23	12	5
(9)	1	14	19	24	3	20	25	2	9	18	15	8	13	4	23	12	21	6	17	10	7	16	11	22	5
(10)	1	10	15	20	3	16	25	2	9	14	11	8	21	4	19	24	17	6	13	22	7	12	23	18	5
(11)	1	20	11	16	3	12	25	2	21	10	19	8	17	4	15	24	13	6	9	22	7	18	23	14	5
(12)	1	12	19	24	3	20	25	2	13	18	11	8	17	4	23	16	21	6	9	14	7	10	15	22	5
(13)	1	12	17	22	3	18	25	2	11	16	13	8	23	4	21	24	19	6	15	10	7	14	9	20	5
(14)	1	14	19	24	3	20	25	2	13	18	15	8	11	4	23	10	21	6	17	12	7	16	9	22	5
(15)	1	14	9	20	3	16	21	2	25	10	13	8	15	4	19	22	17	6	11	24	7	12	23	18	5
(16)	1	24	9	14	3	10	15	2	25	20	23	8	19	4	13	16	11	6	21	18	7	22	17	12	5
(17)	1	24	11	16	3	12	17	2	25	10	23	8	21	4	15	18	13	6	9	20	7	22	19	14	5
(18)	1	12	15	20	3	16	21	2	25	14	11	8	13	4	19	22	17	6	9	24	7	10	23	18	5
(19)	1	24	19	14	3	18	13	2	25	20	23	8	11	4	15	12	17	6	21	10	7	22	9	16	5
(20)	1	22	17	12	3	16	11	2	25	18	21	8	23	4	13	10	15	6	19	24	7	20	9	14	5
(21)	1	24	9	18	3	14	19	2	23	10	25	8	13	4	17	20	15	6	11	22	7	12	21	16	5
(22)	1	20	9	14	3	10	15	2	19	22	25	8	21	4	13	16	11	6	23	18	7	24	17	12	5
(23)	1	24	19	14	3	18	13	2	9	20	25	8	23	4	15	12	17	6	21	10	7	22	11	16	5
(24)	1	10	21	16	3	20	15	2	9	22	25	8	11	4	17	14	19	6	23	12	7	24	13	18	5
(25)	1	22	11	16	3	12	17	2	21	10	25	8	23	4	15	18	13	6	9	20	7	24	19	14	5
(26)	1	24	13	18	3	14	19	2	23	12	25	8	11	4	17	20	15	6	9	22	7	10	21	16	5
(27)	1	12	21	16	3	20	15	2	11	22	25	8	13	4	17	14	19	6	23	10	7	24	9	18	5
(28)	1	24	17	12	3	16	11	2	23	18	25	8	21	4	13	10	15	6	19	22	7	20	9	14	5
(29)	1	14	9	20	3	24	19	2	15	10	13	8	25	4	21	18	23	6	11	16	7	12	17	22	5
(30)	1	20	9	14	3	10	15	2	19	24	21	8	25	4	13	16	11	6	23	18	7	22	17	12	5
(31)	1	24	19	14	3	18	13	2	9	20	23	8	25	4	15	12	17	6	21	10	7	22	11	16	5
(32)	1	10	15	20	3	16	21	2	9	14	11	8	25	4	19	22	17	6	13	24	7	12	23	18	5
(33)	1	22	11	16	3	12	17	2	21	10	23	8	25	4	15	18	13	6	9	20	7	24	19	14	5
(34)	1	12	23	18	3	22	17	2	13	24	11	8	25	4	19	16	21	6	9	14	7	10	15	20	5
(35)	1	12	17	22	3	18	23	2	11	16	13	8	25	4	21	24	19	6	15	10	7	14	9	20	5
(36)	1	22	17	12	3	16	11	2	23	18	21	8	25	4	13	10	15	6	19	24	7	20	9	14	5
(37)	1	14	9	20	3	22	19	2	15	10	13	8	21	4	25	18	23	6	11	16	7	12	17	24	5
(38)	1	18	9	24	3	10	23	2	19	14	17	8	13	4	25	22	11	6	15	20	7	16	21	12	5
(39)	1	16	21	14	3	22	13	2	9	20	17	8	15	4	25	12	23	6	19	10	7	18	11	24	5
(40)	1	10	15	24	3	16	23	2	9	14	11	8	19	4	25	22	17	6	13	20	7	12	21	18	5
(41)	1	18	11	24	3	12	23	2	19	10	17	8	15	4	25	22	13	6	9	20	7	16	21	14	5

(42)	1	12	21	18	3	22	17	2	13	20	11	8	19	4	25	16	23	6	9	14	7	10	15	24	5
(43)	1	12	17	24	3	18	23	2	11	16	13	8	21	4	25	22	19	6	15	10	7	14	9	20	5
(44)	1	16	21	12	3	22	11	2	15	20	17	8	13	4	25	10	23	6	19	14	7	18	9	24	5
(45)	1	14	9	20	3	24	19	2	15	10	13	8	23	4	21	18	25	6	11	16	7	12	17	22	5
(46)	1	16	9	22	3	10	21	2	17	12	15	8	11	4	23	20	25	6	13	18	7	14	19	24	5
(47)	1	18	23	14	3	24	13	2	9	22	19	8	17	4	15	12	25	6	21	10	7	20	11	16	5
(48)	1	10	15	22	3	16	21	2	9	14	11	8	17	4	23	20	25	6	13	18	7	12	19	24	5
(49)	1	16	11	22	3	12	21	2	17	10	15	8	13	4	23	20	25	6	9	18	7	14	19	24	5
(50)	1	12	23	18	3	24	17	2	13	22	11	8	21	4	19	16	25	6	9	14	7	10	15	20	5
(51)	1	12	17	22	3	18	21	2	11	16	13	8	19	4	23	20	25	6	15	10	7	14	9	24	5
(52)	1	18	23	12	3	24	11	2	17	22	19	8	15	4	13	10	25	6	21	16	7	20	9	14	5
(53)	1	22	9	16	3	12	17	2	21	10	23	8	11	4	15	18	13	6	25	20	7	24	19	14	5
(54)	1	20	9	14	3	10	15	2	19	24	21	8	23	4	13	16	11	6	25	18	7	22	17	12	5
(55)	1	22	19	14	3	18	13	2	9	20	23	8	21	4	15	12	17	6	25	10	7	24	11	16	5
(56)	1	10	23	18	3	22	17	2	9	24	11	8	13	4	19	16	21	6	25	14	7	12	15	20	5
(57)	1	12	23	18	3	22	17	2	11	24	13	8	15	4	19	16	21	6	25	10	7	14	9	20	5
(58)	1	22	17	12	3	16	11	2	21	18	23	8	19	4	13	10	15	6	25	20	7	24	9	14	5
(59)	1	14	9	22	3	18	23	2	15	10	13	8	17	4	21	24	19	6	11	16	7	12	25	20	5
(60)	1	22	9	14	3	10	15	2	23	18	21	8	17	4	13	16	11	6	19	24	7	20	25	12	5
(61)	1	12	17	22	3	18	23	2	9	16	13	8	11	4	21	24	19	6	15	10	7	14	25	20	5
(62)	1	10	15	20	3	16	21	2	9	14	11	8	23	4	19	22	17	6	13	24	7	12	25	18	5
(63)	1	22	11	16	3	12	17	2	23	10	21	8	19	4	15	18	13	6	9	24	7	20	25	14	5
(64)	1	12	17	22	3	18	23	2	13	16	11	8	15	4	21	24	19	6	9	14	7	10	25	20	5

(65)	1	20	15	10	3	14	9	2	21	16	19	22	7	4	11	8	13	24	17	6	23	18	5	12	25
(66)	1	8	19	14	3	18	13	2	7	20	9	22	11	4	15	12	17	24	21	6	23	10	5	16	25
(67)	1	8	21	16	3	20	15	2	7	12	9	22	13	4	17	14	19	24	11	6	23	10	5	18	25
(68)	1	18	13	8	3	12	7	2	21	14	17	22	19	4	9	6	11	24	15	20	23	16	5	10	25
(69)	1	18	13	8	3	12	7	2	17	14	19	22	15	4	9	6	11	24	21	16	23	20	5	10	25
(70)	1	16	21	8	3	12	7	2	15	20	17	22	13	4	9	6	11	24	19	14	23	18	5	10	25
(71)	1	18	13	8	3	12	9	2	19	14	17	22	11	4	7	10	5	24	15	20	23	16	21	6	25
(72)	1	20	15	8	3	14	9	2	21	16	19	22	13	4	7	10	5	24	17	12	23	18	11	6	25
(73)	1	14	19	8	3	18	9	2	13	20	15	22	17	4	7	10	5	24	21	12	23	16	11	6	25
(74)	1	12	7	18	3	6	19	2	13	8	11	22	15	4	17	20	5	24	9	14	23	10	21	16	25
(75)	1	12	7	16	3	6	17	2	21	8	11	22	13	4	15	18	5	24	9	20	23	10	19	14	25
(76)	1	18	7	12	3	6	13	2	17	8	19	22	9	4	11	14	5	24	21	16	23	20	15	10	25
(77)	1	16	11	6	3	10	5	2	17	12	15	22	19	4	7	20	9	24	13	18	23	14	21	8	25
(78)	1	18	11	6	3	10	5	2	17	12	19	22	13	4	7	14	9	24	21	16	23	20	15	8	25
(79)	1	18	13	8	3	12	5	2	19	14	17	22	7	4	9	6	11	24	15	20	23	16	21	10	25
(80)	1	10	19	14	3	18	5	2	9	20	11	22	13	4	15	6	17	24	21	8	23	12	7	16	25
(81)	1	10	5	18	3	14	19	2	11	6	9	22	13	4	17	20	15	24	7	12	23	8	21	16	25
(82)	1	18	5	10	3	6	11	2	19	14	17	22	13	4	9	12	7	24	15	20	23	16	21	8	25

(83)	1	20	17	12	3	16	11	2	7	18	21	24	19	4	13	10	15	6	23	8	25	22	9	14	5
(84)	1	18	23	12	3	16	11	2	7	22	19	24	17	4	13	10	15	6	21	8	25	20	9	14	5
(85)	1	10	15	20	3	16	21	2	7	14	11	24	9	4	19	22	17	6	13	8	25	12	23	18	5
(86)	1	8	21	16	3	20	15	2	7	22	9	24	11	4	17	14	19	6	23	12	25	10	13	18	5
(87)	1	8	23	18	3	22	17	2	7	12	9	24	13	4	19	16	21	6	11	14	25	10	15	20	5
(88)	1	8	13	18	3	14	19	2	7	12	9	24	21	4	17	20	15	6	11	22	25	10	23	16	5
(89)	1	16	11	20	3	10	21	2	17	12	15	24	19	4	7	22	9	6	13	18	25	14	23	8	5
(90)	1	16	11	18	3	10	19	2	23	12	15	24	17	4	7	20	9	6	13	22	25	14	21	8	5
(91)	1	20	11	14	3	10	15	2	19	12	21	24	13	4	7	16	9	6	23	18	25	22	17	8	5
(92)	1	18	23	12	3	10	13	2	17	22	19	24	11	4	7	14	9	6	21	16	25	20	15	8	5
(93)	1	20	15	8	3	14	9	2	21	16	19	24	11	4	7	10	13	6	17	22	25	18	23	12	5
(94)	1	22	17	8	3	16	9	2	23	18	21	24	13	4	7	10	15	6	19	12	25	20	11	14	5
(95)	1	14	21	8	3	20	9	2	13	22	15	24	17	4	7	10	19	6	23	12	25	16	11	18	5
(96)	1	14	23	8	3	22	9	2	13	18	15	24	19	4	7	10	21	6	17	12	25	16	11	20	5
(97)	1	8	19	14	3	18	13	2	9	20	7	24	21	4	15	12	17	6	23	10	25	22	11	16	5
(98)	1	8	23	14	3	18	13	2	9	22	7	24	19	4	15	12	17	6	21	10	25	20	11	16	5
(99)	1	8	15	20	3	16	21	2	9	14	7	24	11	4	19	22	17	6	13	10	25	12	23	18	5
(100)	1	8	13	18	3	14	19	2	23	12	7	24	9	4	17	20	15	6	11	22	25	10	21	16	5
(101)	1	10	21	16	3	20	15	2	11	22	7	24	9	4	17	14	19	6	23	12	25	8	13	18	5
(102)	1	12	23	18	3	22	17	2	13	10	7	24	11	4	19	16	21	6	9	14	25	8	15	20	5
(103)	1	20	11	16	3	12	17	2	21	10	7	24	19	4	15	18	13	6	9	22	25	8	23	14	5
(104)	1	22	11	16	3	12	17	2	23	10	7	24	21	4	15	18	13	6	9	20	25	8	19	14	5
(105)	1	18	13	8	3	12	7	2	19	14	17	24	21	4	9	22	11	6	15	20	25	16	23	10	5
(106)	1	18	13	8	3	12	7	2	23	14	17	24	19	4	9	20	11	6	15	22	25	16	21	10	5

(107)	1	20	13	8	3	12	7	2	19	14	21	24	15	4	9	16	11	6	23	18	25	22	17	10	5
(108)	1	18	23	8	3	12	7	2	17	22	19	24	13	4	9	14	11	6	21	16	25	20	15	10	5
(109)	1	20	15	10	3	14	7	2	21	16	19	24	9	4	11	8	13	6	17	22	25	18	23	12	5
(110)	1	22	17	12	3	16	7	2	23	18	21	24	11	4	13	8	15	6	19	10	25	20	9	14	5
(111)	1	12	21	16	3	20	7	2	11	22	13	24	15	4	17	8	19	6	23	10	25	14	9	18	5
(112)	1	12	23	18	3	22	7	2	11	16	13	24	17	4	19	8	21	6	15	10	25	14	9	20	5

上列112個解（括弧內的數字代表第幾個解），編號1～64屬第一類，65～82屬第二類，83～112屬第三類。

由於這些解是以一維表示，故表面上不容易看出騎士如何走遍5階棋盤的每一方格。其實，祇要我們將解法，五個數一列，逐次排下來，即可看出。例如第1解可視爲

1	20	25	14	3
18	13	2	9	24
21	8	19	4	15
12	17	6	23	10
7	22	11	16	5

接著，我們爲確保這112個解有效起見，分別將騎士的起始位置定於x_5，x_{21}，x_{25}任一格求解，得出結果與原先的112個解，在數目上是一致的，而且透過對稱關係，所有的解，均可由以上112個基本解求出。於是，我們的結果，可簡單寫成

$$|K_5| = 112$$

六、結論

第三節中，我們提到5階棋盤騎士漫遊解的估計，最多約有7.13×10^{13}個解。而事實顯示，基本解祇有112個。造成這麼大的差距，最主要兩個因素，一爲對稱解的存在，二即爲非明顯限制條件。

若騎士在q_j時，發現（q_1，……，q_{j-1}）有任何一個位置已走過，則（q_j，……，q_{25}）便放棄。因此，排除不少不合規定的走法，而使得7.13×10^{13}再減小些。雖然如此，想要更精確的估計，仍不易辦到。因爲我們無法確知q_j的j是1到25數字中的那一個。

定理2明確地指出：若5階棋盤騎士漫遊有解，則起始位置和終點位置都落在奇數格上。很容易根據這個定理，推測並加以驗證：奇數階棋盤騎士的起始位置和終點位置都落在奇數格上。

偶數階棋盤就沒有這項性質，因爲偶數格與奇數格互相對稱。

整個求解過程中，定理5幫助我們除去不少對稱解，對求解的工作而言，節省很多時間。於是，我們不禁要問：階數更高的棋盤，是否仍會使得定理5成立呢？

最後，再問一個問題：已知K_5的元素爲112個，那麼$|K_n| = ?$（$n \geq 6$）。

七、致謝

本文承審核先生，熱忱地提供許多寶貴的修改意見，並更正謬誤之處，謹此致謝。

—本文作者台北工專電子工程科畢業—