有向直線

許振榮
呂素齡

§0 導言

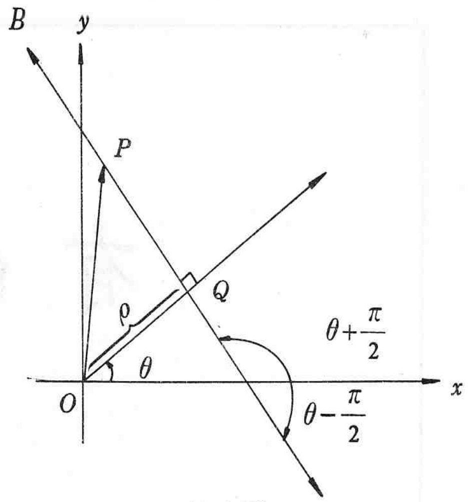
點和直線是歐氏平面的基本元素，而有向直線和有向圓則是拉氏(Lagurre)二維幾何的基本元素。所以有向直線在拉氏二維幾何中非常重要，不僅如此，它在歐氏幾何中也相當值得討論。在歐氏平面上，曲線可看成“滿足某些條件的動點軌跡”，也可看成“滿足某些條件的有向動直線之包絡線”。因而，就像探討許多有關一些點(三個以上)在一圓周上的定理，以及有關一些圓(三個以上)經過同一點的定理那樣，我們也可探討一些有向直線(三個以上)與同一圓相切的定理，以及一些圓(三個以上)切於同一有向直線的定理，這些結果都相當有趣。以下我們想稍微敍述這些事項的基礎部分。

§1 定義

一直線有二方向，如果選其中之一爲此直線之正方向，則得一有向直線。此直線之正方向以一箭頭來表示。故一直線載有二有向直線。它們之正方向相反。對於一有向直線，我們可以考慮此有向直線之左側和右側，即如有一人向此有向直線之正方向行進時，他的左側和右側稱爲此有向直線之左側和右側。

我們規定在平面上所用的直角座標系均爲右手系，即從 x 軸之正方向至 y 軸之正方向的廻轉方向與時針之廻轉方向相反。設 L 爲平面上任一直線，經過直角座標系之原點作此直線之垂線其垂足以 Q 表之。從 x 軸之正方向至此垂線之正方向的廻轉角設爲 θ，此時此垂線(或稱爲直線 L 之法線)之正方向的單位向量爲

$$\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$$



第1圖

此處 $\vec{i}$，$\vec{j}$ 分別表 x 軸和 y 軸上的正方向之單位向量。所與直線 L 上的二方向分別爲

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\vec{i}+\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$$

(即有向直線 $\overrightarrow{QA}$)

和 $$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\vec{i}+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)j$$

(即有向直線 $\overrightarrow{QB}$)

我們規定此直線 L 之正方向和此垂線之正方向成一右手系。現在因爲

$$(1.1)\quad \begin{vmatrix}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\\ \cos\theta & \sin\theta\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{vmatrix}$$

$$=1$$

故依上面的右手系之規定，此直線 L 之正方向爲 $\overrightarrow{QA}$ 之方向(第1圖)。

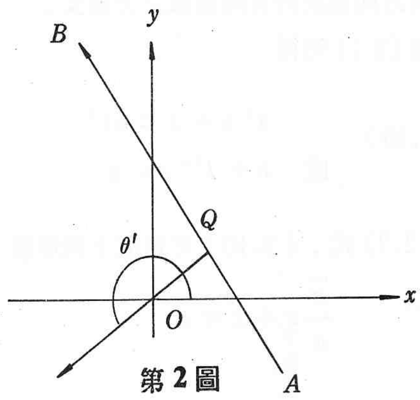
現在來求這種有向直線的方程式。設 P 爲有向直線 L 上的任一點。則向量

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

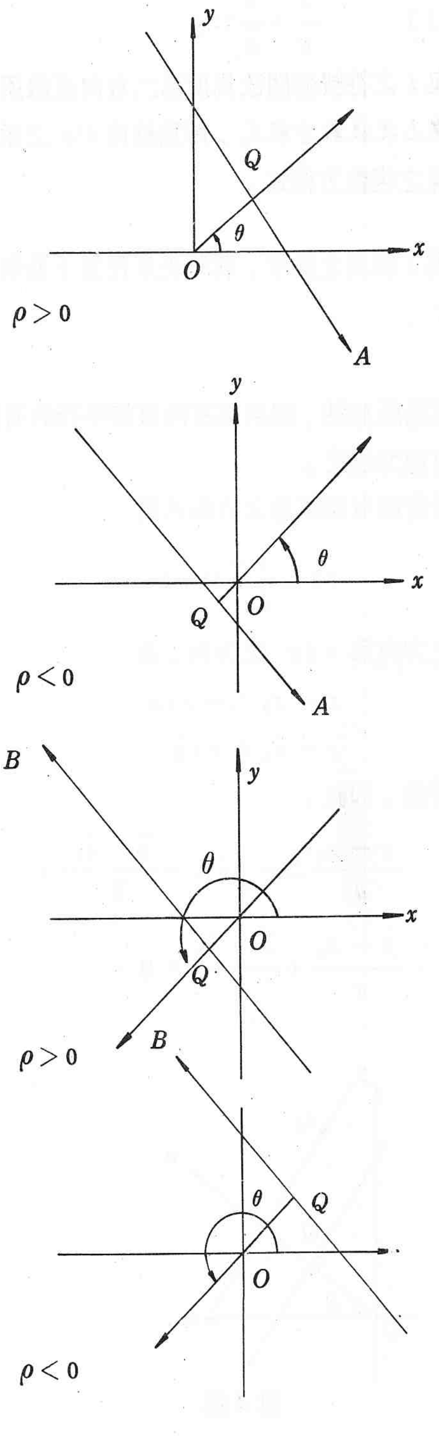
$$\overrightarrow{OQ}=\rho(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j})$$

此處如果 $\overrightarrow{OQ}$ 之方向與垂線之正方向相同，則 $\rho>0$，否則 $\rho<0$。L 經過原點 O 時 $\rho=0$，故

$$[(x\vec{i}+y\vec{j})-\rho(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j})]\cdot(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j})=0$$



第 2 圖



第 3 圖

此處“ • ”表內積。由此式可得

(1.2)　$x \cos \theta + y \sin - \rho = 0$

故此爲有向直線 $\overrightarrow{QA}$ 之方程式。

同理在第 2 圖中可得

$\overrightarrow{OQ} = \rho' \,(\cos \theta' \vec{i} + \sin \theta' \vec{j})$

而得

(1.3)　$x \cos \theta' + y \sin \theta' - \rho' = 0$

此時 L 之正方向爲 $\overrightarrow{QB}$ 之方向。故有向直線均可表成

$$x \cos \theta + y \sin \theta - \rho = 0$$

之形狀，ρ 之正負和 θ 之向線可表之如第 3 圖。

注意： 等式的兩邊不能乘以“ -1 ”“兩邊乘以 -1 ”即等於考慮在同一直線上的另一有向直線。

§ 2　有向直線之複數方程式

現在我們把平面上的點以複數來表示。即如果 $z = x + iy$ 成立，把 z 稱爲以 (x, y) 爲直角座標的點之*複數座標*。如果以 $\bar{z}$ 表示 z 之共軛複數，則有

$$z + \bar{z} = 2x\,, \qquad z - \bar{z} = 2iy$$

之關係，所以

$$(2.1)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z}) \\[2ex] y = -\dfrac{i}{2}(z - \bar{z}) \end{cases}$$

把此二式代入有向直線之標準式（或稱爲法線式）

(1.2)　$x \cos \theta + y \sin \theta - \rho = 0$

（ρ 爲實數）

則得

$$(2.2)\qquad (\cos \theta - i \sin \theta)\, z + (\cos \theta + i \sin \theta)\, \bar{z} = 2\rho$$

假設

$$(2.3)\qquad \begin{aligned} t &= \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} \\ t' &= \cos\theta + i\sin\theta \\ &= \frac{1}{t} \\ &= e^{i\theta} \end{aligned}$$

把(2.3)式代入(2.2)式，可得

$$(2.4)\qquad tz + \frac{1}{t}\bar{z} = 2\rho \qquad \text{或} \quad \frac{1}{t'}z + t'\bar{z} = 2\rho$$

這二式亦可寫成

$$(2.5)\qquad t^2 z + \bar{z} = 2\rho t \qquad \text{或} \quad z + t'^2\bar{z} = 2\rho t'$$

之形狀。

令

$$(2.6)\qquad a = 2\rho t' \qquad \text{則}$$

$$(2.6)'\qquad \bar{a} = 2\rho t \qquad 。$$

因此

$$(2.7)\qquad \frac{\bar{a}}{a} = \frac{2\rho t}{2\rho t'} = t^2 \qquad \text{即} \quad \bar{a} = at^2;$$

而且

$$(2.8)\qquad 2\rho = \frac{a}{t'} = at = \frac{\bar{a}}{t} = \bar{a}t' 。$$

所以(2.4)、(2.5)式可分別寫成

$$(2.9)\qquad tz + \frac{1}{t}\bar{z} = at \qquad \text{或} \quad \frac{1}{t'}z + t'\bar{z} = \frac{a}{t'},$$

此爲有向直線之複數方程式。如果兩邊乘以(-1)，則得

$$(-t)z + \frac{1}{(-t)}\bar{z} = a(-t)$$

或

$$\frac{1}{(-t')}z + (-t')\bar{z} = \frac{a}{(-t')}$$

此爲方向相反的有向直線之方程式。

故由(2.1)可得

$$(2.10)\qquad t^2 z + \bar{z} = at^2 \qquad \text{或} \quad z + t'^2\bar{z} = a$$

依(2.7)式，(2.10)可寫成下列形狀

$$\frac{\bar{a}}{a}z + \bar{z} = \bar{a}$$

故

$$(2.11)\qquad \frac{z}{a} + \frac{\bar{z}}{\bar{a}} = 1$$

此式與 t 之符號無關故爲所述二有向直線所在的直線 L 之複數方程式，即爲線段 Oa 之垂直平分線之複數方程式。

爲了後面之應用，我們先來注意下面幾件事情：

(1) 經過所給點，與所與有向直線平行的有向直線方程式。

設所與有向直線之方程式爲

$$tz + \frac{1}{t}\bar{z} = at$$

它的正方向爲 $-ia$ 之方向。故

$$z - z_0 = -ria$$

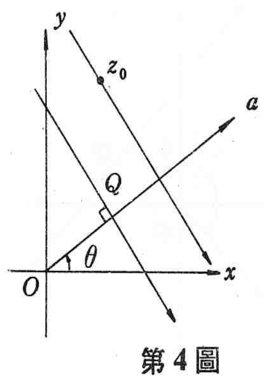
$$\bar{z} - \bar{z}_0 = ri\bar{a}$$

r 爲實數。因此，

$$\frac{z - z_0}{a} = -ri = -\frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{\bar{a}} 。$$

故

$$\frac{z - z_0}{a} + \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{\bar{a}} = 0,$$



第4圖

即 $$\frac{z}{a}+\frac{z}{\bar{a}}=\frac{z_0}{a}+\frac{\bar{z}_0}{\bar{a}}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{2\rho}z+\frac{1}{2\rho t}\bar{z}=\frac{t}{2\rho}z_0+\frac{1}{2\rho t}\bar{z}_0$$

即

$$(2.12)\qquad tz+\frac{1}{t}\bar{z}=tz_0+\frac{1}{t}\bar{z}_0$$

(2) 經過所給點和所與一有向直線垂直的直線方程式。

設所與有向直線之方程式為

$$t+\frac{1}{t}\bar{z}=at$$

則 $$z-z_0=ra,\qquad r\text{為實數}$$
$$\bar{z}-\bar{z}_0=r\bar{a}$$

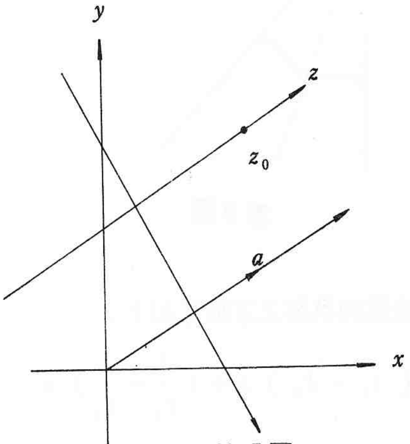
故 $$\frac{z-z_0}{a}=r=\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{\bar{a}}$$

則 $$\frac{z}{a}-\frac{\bar{z}}{\bar{a}}=\frac{z_0}{a}-\frac{\bar{z}_0}{\bar{a}}$$

$$\frac{t}{2\rho}z-\frac{\bar{z}}{2\rho t}=\frac{tz_0}{2\rho}-\frac{\bar{z}_0}{2\rho t}$$

即

$$(2.13)\qquad tz-\frac{1}{t}\bar{z}=tz_0-\frac{\bar{z}_0}{t}$$



第 5 圖

(3) 經過二點 z_1, z_2 的有向直線 $\overrightarrow{z_1 z_2}$ 之方程式。

此有向直線之方程式可寫成

$$(2.14)\qquad tz+\frac{1}{t}\bar{z}=tz_1+\frac{1}{t}\bar{z}_1$$

之形狀。設此直線為線段 Oa 之垂直平分線，則向量 z_2-z_1 可表成

$$z_2-z_1=-ria$$

之形狀，此處 r 為一正實數。故

$$\bar{z}_2-\bar{z}_1=ri\bar{a}$$

依(2.8)可得

$$z_2-z_1=-ri2\rho\frac{1}{t}$$
$$\bar{z}_2-\bar{z}_1=ri2\rho t$$

因此可得

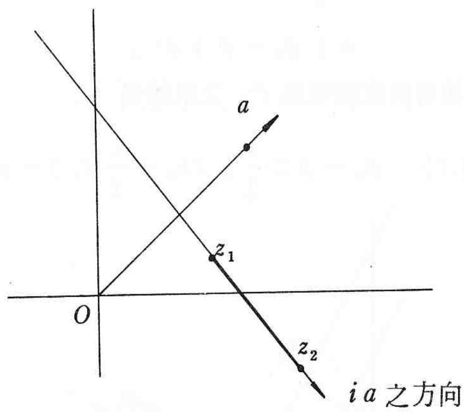
$$t=\frac{-ri\cdot 2\rho}{z_2-z_1}\qquad \frac{1}{t}=\frac{ri\cdot 2\rho}{\bar{z}_2-\bar{z}_1}$$

故(2.14)可寫成下列形狀

$$\frac{-2ir\rho}{z_2-z_1}z+\frac{2ir\rho}{\bar{z}_2-\bar{z}_1}\bar{z}$$
$$=\frac{-2ir\rho}{z_2-z_1}+\frac{2ir\rho}{\bar{z}_2-\bar{z}_1}\bar{z}_1$$

即

$$(2.15)\qquad \frac{z}{z_2-z_1}-\frac{\bar{z}}{\bar{z}_2-\bar{z}_1}$$
$$=\frac{z_1}{z_2-z_1}-\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1}$$



第 6 圖

§3 內心

平面上 n 條有向直線之集合如果滿足下列二條件時稱爲有向 n—直線：

(1)此集合中任何二條有向直線均不爲平行或反平行。

(2)此集合中任何三條有向直線爲不共點。

爲了求有向 3-直線之內心（等距離點），我們先來討論

(a) 一有向直線至一點 P_0 之距離

由 §2(1)經過所給點 $P_0(z_0)$ 和所與有向直線：

$$tz+\frac{1}{t}\bar{z}=2\rho=at$$

平行的有向直線之方程式爲

$$tz+\frac{1}{t}\bar{z}=t\,z_0+\frac{1}{t}\bar{z}_0\ 。$$

如果把此式右邊以 $2\rho_0=a_0t$ 表示，則

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}a\ ,\quad \overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}a_0\ 。$$

如果從 P_0 至所與直線所作的垂線之垂足爲 Q_0，則

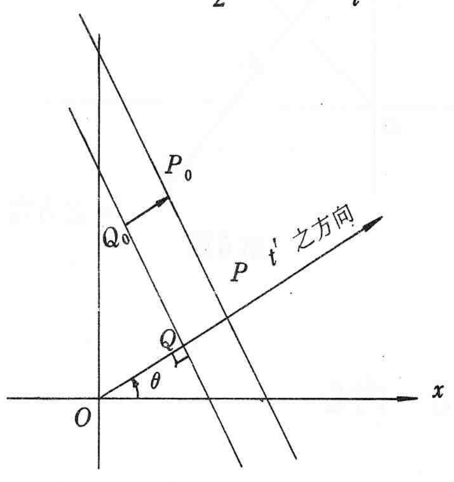
$$\overrightarrow{O_0P_0}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(a_0-a)$$

$$=\frac{1}{2}(2\rho_0t'-2\rho t')$$

$$=(\rho_0-\rho)\,t'\ 。$$

故從有向直線至點 P_0 之距離爲

$$(3.1)\qquad \rho_0-\rho=\frac{1}{2}\left(tz_0+\frac{1}{t}\bar{z}_0\right)-\rho$$



第 7 圖

$$=\frac{1}{2}\left(t\cdot z_0+\frac{1}{t}\bar{z}_0-2\rho\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(tz_0+\frac{1}{t}\bar{z}_0-at\right)。$$

如果 $\overrightarrow{Q_0P_0}$ 與法線 OQ 之正方向相同，則 $\rho_0-\rho$ 爲正，否則 $\rho_0-\rho$ 爲負。

(b) 和二條有向直線等距離點之軌跡

設二條有向直線之方程式爲

$$t_iz+\frac{1}{t_i}\bar{z}-z_it_i=0$$

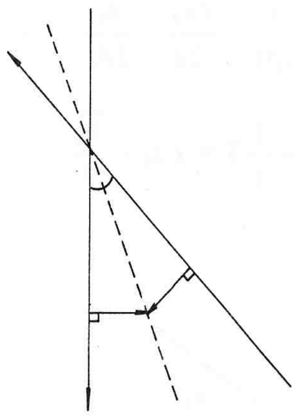
$$i=1,2$$

故依(a)項，至此二有向直線之距離相等之點滿足

$$\frac{1}{2}\left(t_1z+\frac{1}{t_1}\bar{z}-z_1t_1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(t_2z+\frac{1}{t_2}\bar{z}-z_2t_2\right)$$

此處 z_1，z_2 爲二點。



第 8 圖

所以這種點的軌跡之方程式如下：

$$(t_1-t_2)\,z+\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)\bar{z}$$

$$-(z_1t_1-z_2t_2)=0$$

即

$$(3.2)\qquad z-\frac{1}{t_1t_2}\bar{z}-\frac{z_1t_1-z_2t_2}{t_1-t_2}=0$$

此爲在第 8 圖中所示的角之平分線。

(c) 有向 3 - 直線之內心(或稱爲等距離點)

設一有向 3 - 直線的三條有向直線爲

$$t_i z + \frac{1}{t_i}\bar{z} = z_i t_i$$

$$i = 1,\ 2,\ 3$$

對應於 t_1, t_2 的二條有向直線之等距離點之軌跡爲直線

$$z - \frac{1}{t_1 t_2}\bar{z} - \frac{z_1 t_1 - z_2 t_2}{t_1 - t_2} = 0$$

對應於 t_1, t_3 的二條有向直線之等距離點之軌跡爲

$$z - \frac{1}{t_1 t_3}\bar{z} - \frac{z_1 t_1 - z_3 t_3}{t_1 - t_3} = 0$$

此二直線之交點爲三有向直線之等距離點，或稱之爲此有向 3- 直線之內心。其複數座標可得之如下：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t_3} z - \dfrac{1}{t_1 t_2 t_3}\bar{z} - \dfrac{z_1 t_1 - z_2 t_2}{t_3 (t_1 - t_2)} = 0 \\ \dfrac{1}{t_2} z - \dfrac{1}{t_1 t_2 t_3}\bar{z} - \dfrac{z_1 t_1 - z_3 t_3}{t_2 (t_1 - t_3)} = 0 \end{cases}$$

把此二式邊邊相減得

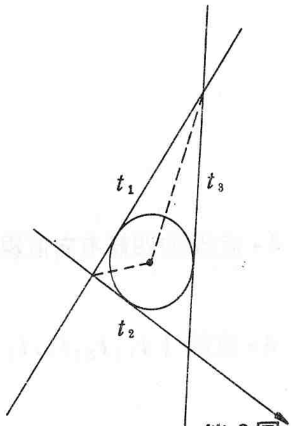
$$\left(\frac{1}{t_3} - \frac{1}{t_2}\right) z = \frac{z_1 t_1 - z_2 t_2}{t_3 (t_1 - t_3)} - \frac{z_1 t_1 - z_3 t_3}{t_2 (t_1 - t_2)}$$

故

$$z = \frac{t_2 (z_1 t_1 - z_2 t_2)}{(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)} - \frac{t_3 (z_1 t_1 - z_3 t_3)}{(t_1 - t_3)(t_2 - t_3)}$$

$$= \frac{z_1 t_1}{t_2 - t_3}\left(\frac{t_2}{t_1 - t_2} - \frac{t_3}{t_1 - t_3} \right) + \frac{z^2 t_2^2}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} + \frac{z_3 t_3^2}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

$$= \frac{z_1 t_1^2}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} + \frac{z_2 t_2^2}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} + \frac{z_3 t_3^2}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}$$



第 9 圖

即

$$z = \frac{z_1 t_1^2}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} + \frac{z_3 t_2^2}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} + \frac{z_3 t_3^2}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \tag{3.3}$$

此爲內心之複數座標。

如果把所與有向 3 - 直線之三條有向直線寫成

$$\frac{1}{t_i} z + t_i \bar{z} = \frac{z_i}{t_i}$$

$$i = 1,\ 2,\ 3$$

之形狀時，可同樣地求得其內心如下：

$$z = \frac{z_1 t_2 t_3}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} + \frac{z_2 t_1 t_3}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} + \frac{z_3 t_1 t_2}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \tag{3.4}$$

§4 例題

例題4.1 求有向 4-直線的四條有向直線切於一圓之條件。

解：設所與有向 4-直線 $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$ 之四條有向直線為

$$\frac{1}{t_i}z+t_i\bar{z}=\frac{z_i}{t_i}$$

$$i=1,2,3,4$$

如上所述有向 3-直線 $\{t_1,t_2,t_3\}$ 之內心為

$$z_{123}=\frac{z_1t_2t_3}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}+\frac{z_2t_1t_3}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}+\frac{z_3t_1t_2}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$

有向 3-直線 $\{t_1,t_2,t_4\}$ 之內心為

$$z_{124}=\frac{z_1t_2t_4}{(t_1-t_2)(t_1-t_4)}+\frac{z_2t_1t_4}{(t_2-t_1)(t_2-t_4)}+\frac{z_4t_1t_2}{(t_4-t_1)(t_4-t_2)}$$

如果有向 4-直線之四個有向直線切於一圓，則此二內心要一致。即 $z_{123}=z_{124}$成立。故得

$$\frac{z_1t_2}{t_1-t_2}\left[\frac{t_3}{t_1-t_3}-\frac{t_4}{t_1-t_4}\right]+\frac{z_2t_1}{t_2-t_1}\left[\frac{t_3}{t_2-t_3}-\frac{t_4}{t_2-t_4}\right]+\frac{z_3t_1t_2}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}-\frac{z_4t_1t_2}{(t_4-t_1)(t_4-t_2)}=0$$

即

$$\frac{z_1t_1t_2(t_3-t_4)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)}+\frac{z_2t_1t_2(t_3-t_4)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)(t_2-t_4)}+\frac{z_3t_1t_2(t_3-t_4)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_4)}+\frac{z_4t_1t_2(t_3-t_4)}{(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)}=0$$

故得

$$\frac{z_1}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)}+\frac{z_2}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)(t_2-t_4)}+\frac{z_3}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_4)}+\frac{z_4}{(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)}=0 \tag{4.1}$$

故此為四有向直線切於一圓之必要條件。

反之，如果此式成立，把上面之推理反方向進行可得 $z_{123}=z_{124}$，故二個內切圓重合，則四有向直線切於一圓。

例4.2 求有向 5-直線 $\{t_1,t_2,t_3,t_4,t_5\}$ 之五條有向直線切於一圓之條件。

解：現在將 (4.1) 式之左邊以

$$\sum\frac{z_1}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)}$$

表之。如果 t_1,t_2,t_3,t_4,t_5 等五條有向直線切於一圓，則 t_1,t_2,t_3,t_4 切於一圓，又 t_1,t_2,t_3,t_5 亦切於同一圓。故

$$\sum\frac{z_1}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)}=0$$

$$\sum\frac{z_1}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_5)}=0$$

成立。把此二式邊邊相減可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{z_1}{(t_1-t_2(t_1-t_3)}\left\{\frac{1}{t_1-t_4}-\frac{1}{t_1-t_5}\right\}\\
&+\frac{z_2}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}\left\{\frac{1}{t_2-t_4}-\frac{1}{t_2-t_5}\right\}\\
&+\frac{z_3}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\left\{\frac{1}{t_3-t_4}-\frac{1}{t_3-t_5}\right\}\\
&+\frac{z_4}{(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)}\}\\
&-\frac{z_5}{(t_5-t_1)(t_6-t_2)(t_5-t_3)}\\
&=0
\end{aligned}
$$

由此式可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{z_1(t_4-t_5)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)(t_1-t_5)}\\
&+\frac{z_2(t_4-t_5)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)(t_2-t_4)(t_2-t_5)}\\
&+\frac{z_3(t_4-t_5)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_4)(t_3-t_5)}\\
&+\frac{z_4(t_4-t_5)}{(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)(t_4-t_5)}\\
&+\frac{z_5(t_4-t_5)}{(t_5-t_1)(t_5-t_2)(t_5-t_3)(t_5-t_4)}\\
&=0
\end{aligned}
$$

以（t_4-t_5）除之，則得

$$
\begin{aligned}
(4.2)\quad &\sum\frac{z_1}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)(t_1-t_5)}\\
&\equiv\frac{z_1}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)(t_1-t_5)}\\
&+\frac{z_2}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)(t_2-t_4)(t_2-t_5)}\\
&+\frac{z_3}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_4)(t_3-t_5)}\\
&+\frac{z_4}{(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)(t_4-t_5)}\\
&+\frac{z_5}{(t_5-t_1)(t_5-t_2)(t_5-t_3)(t_5-t_4)}\\
&=0
\end{aligned}
$$

此爲五條有向直線 t_1，t_2，t_3，t_4，t_5，切於一圓之一必要條件。

今再來求另一必要條件。如果五條有向直線 t_1，t_2，t_3，t_4，t_5，切於一圓，當然有向直線 t_2，t_3，t_4，t_5 切於一圓。故有下列式子：

$$
\begin{aligned}
(4.3)\quad &\frac{z_2}{(t_2-t_3)(t_2-t_4)(t_2-t_5)}\\
&+\frac{z_3}{(t_3-t_2)(t_3-t_4)(t_3-t_5)}\\
&+\frac{z_4}{(t_4-t_2)(t_4-t_3)(t_4-t_5)}\\
&+\frac{z_3}{(t_5-t_2)(t_5-t_3)(t_5-t_4)}\\
&=0
\end{aligned}
$$

把 (4.2) 和 (4.3) 分别改寫成下列形狀：

$$
\begin{aligned}
(4.4)\quad &\frac{z_1t_1}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)(t_1-t_5)}\\
&+\frac{z_2t_1}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)(t_2-t_4)(t_2-t_5)}\\
&+\frac{z_3t_1}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_4)(t_3-t_5)}\\
&+\frac{z_4t_1}{(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)(t_4-t_5)}\\
&+\frac{z_5t_1}{(t_5-t_1)(t_5-t_2)(t_5-t_3)(t_5-t_4)}\\
&=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4.5)\quad &\frac{z_2(t_2-t_1)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)(t_2-t_4)(t_2-t_5)}\\
&+\frac{z_3(t_3-t_1)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_4)(t_3-t_5)}\\
&+\frac{z_4(t_4-t_1)}{(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)(t_4-t_5)}\\
&+\frac{z_5(t_5-t_1)}{(t_5-t_1)(t_5-t_2)(t_5-t_3)(t_5-t_4)}\\
&=0
\end{aligned}
$$

將此二式邊邊相加可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{z_1 t_1}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)(t_1-t_5)} \\
&+\frac{z_2 t_2}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)(t_2-t_4)(t_2-t_5)} \\
&+\frac{z_3 t_3}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_4)(t_3-t_5)} \\
&+\frac{z_4 t_4}{(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)(t_4-t_5)} \\
&+\frac{z_5 t_5}{(t_5-t_1)(t_5-t_2)(t_5-t_3)(t_5-t_4)} \\
&=0
\end{aligned}
$$

即

$$
(4.6)\quad \sum \frac{z_1 t_1}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)(t_1-t_5)} = 0
$$

成立。此爲另一必要條件。我們也可證明(4.2),(4.6)兩式爲充分條件。假設此二式成立。從(4.2)式可得(4.4)式。其次從(4.6)式減去(4.4)式可得(4.5)式。從(4.5)式可得(4.3)式。即四條有向直線(t_2, t_3, t_4, t_5)切於一圓。同理可證有向直線 t_1, t_3, t_4, t_5 切於一圓,而此二圓重合,因爲這二圓均爲有向直線 t_3, t_4, t_5 所決定的圓之故。

§5 圓之點方程式和線之方程式

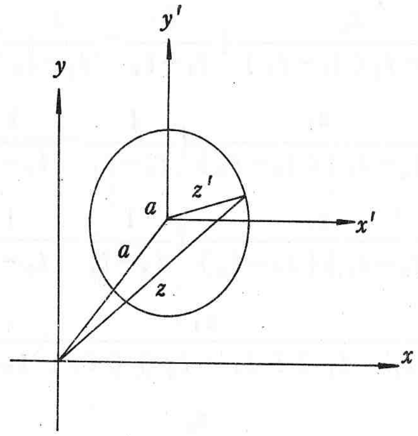
當複數 $t=e^{i\theta}$ 在單位圓上變動時,$z=a+\rho t$ 在以 a 爲中心,半徑爲 ρ 之圓上變動。故 $z=a+\rho t$ (ρ 爲實數)爲以 t 爲參數的參數方程式。現在來求圓:$z=a+\rho t$ 的切線之方程式。設 $Z'=z-a$,則 $z'=\rho t$ 爲在新座標系中,以原點 $z'=0$ 爲中心,半徑爲 ρ 的圓。

先求 $z'=\rho t$ 之切線之方程式。

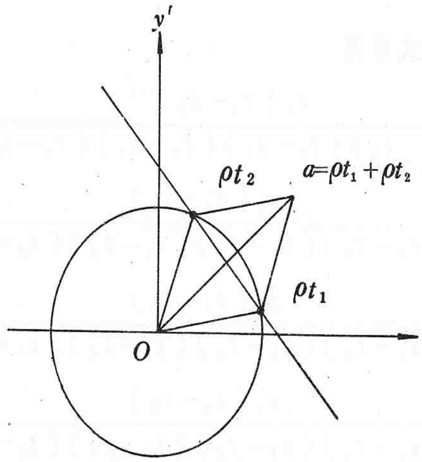
設 $a=\rho(t_1+t_2)$,

則 $\bar{a}=\overline{\rho(t_1+t_2)}$

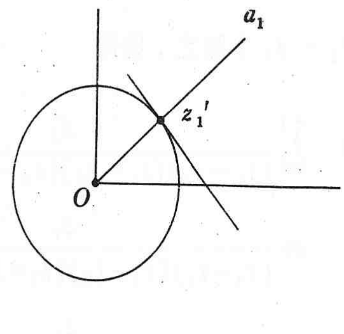
$$
=\rho\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)。
$$



第9圖



第10圖



第11圖

經過 $z_1'=\rho t_1$,$z_2'=\rho t_2$ 之直線爲線段 Oa 之垂直平分線。故其方程式爲

$$
\frac{z'}{\rho(t_1+t_2)}+\frac{\bar{z}'}{\rho\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)}=1
$$

則

$$\frac{z'}{t_1+t_2}+\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}\overline{z}'=\rho$$

即

$$z'+t_1t_2\overline{z}'=\rho(t_1+t_2)$$

當 z_2' 趨近於 z_1' 時（即 t_2 趨近於 t_1 時），我們得到在 z_1' 處的切線之方程式：

$$z'+t_1^2\overline{z}'=2\rho t_1$$

則

$$\frac{z'}{2\rho\, t_1}+\frac{t_1}{2\rho}\overline{z}'=1$$

故此直線爲線段 Oa_1 之垂直平分線，此處 $a_1=2\rho t_1$。故此直線爲經過 z_1' 與 Oz_1' 垂直的直線，把 $z'=z-a$ 代入此方程式中，再把 t_1 改成 t，則得

(5.1) $$(z-a)+t^2(\overline{z}-\overline{a})=2\rho t$$

此爲圓 $z=a+\rho t$ 在 $a+\rho t$ 處的切線方程式。

如果把圓之參數方程式寫成

$$z=a+\rho\frac{1}{t'}$$

之形狀，則其切線之方程式可寫成下列形狀

(5.2) $$t'^2(z-a)+(\overline{z}-\overline{a})=2\rho t'$$

(5.1)，(5.2) 稱爲圓之線方程式（line equation）。而原來的 $z=a+\rho t$ 或 $z=a+\dfrac{\rho}{t'}$ 稱爲圓之點方程式。

現在來證明：以線方程式所表的圓可看成相鄰二切線之交點，當一切線向另一切線趨近時，其交點之極限位置的點集合。現在考慮切線

$$(z-a)+t_1^2(\overline{z}-\overline{a})-2\rho t_1=0$$

即

$$\frac{1}{t_1^2}(z-a)+(\overline{z}-\overline{a})-\frac{2\rho}{t_1}=0$$

設另一切線爲

$$\frac{1}{t_2^2}(z-a)+(\overline{z}-\overline{a})-\frac{2\rho}{t_2}=0$$

由此二式消去 $\overline{z}$，則得

$$(z-a)\left(\frac{1}{t_1^2}-\frac{1}{t_2^2}\right)-2\rho\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)=0$$

以 $\dfrac{1}{t_1}-\dfrac{1}{t_2}$ 除之，得

$$(z-a)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)-2\rho=0$$

z 爲此二切線之交點之座標。當 t_2 向 t_1 趨近時可得

$$(z-a)\frac{2}{t_1}-2\rho=0$$

即 $$z=a+\rho t_1$$

t_1 變動時可求得圓上之方程式

$$z=a+\rho t。$$

§ 6 一般的平面曲線之點方程式和線方程式

設 $z=f(t)$ 爲一般的平面曲線之參數方程式，參數 t 在單位圓周上變動。與 §5 一樣，經過二點 $f(t_1)$，$f(t_2)$ 之直線，當 t_2 向 t_1 趨近時的極限位置，稱爲曲線 $z=f(t)$ 在 $f(t_1)$ 處的切線。現在來求切線的方程式。

依上面所討論的（§2，(3)項），經過二點 $f(t_1)$，$f(t_2)$ 之直線之方程式爲

(2.15) $$\frac{z-z_1}{f(t_2)-f(t_1)}-\frac{\overline{z}-\overline{z}_1}{\overline{f(t_2)}-\overline{f(t_1)}}=0$$

即

$$\left[\overline{f(t_2)}-\overline{f(t_1)}\right](z-f(t_1))-\left[f(t_2)-f(t_1)\right]\left[\overline{z}-\overline{f(t_1)}\right]=0$$

以 t_2-t_1 除之，得

(6.1) $$\left[\frac{\overline{f(t_2)}-\overline{f(t_1)}}{t_2-t_1}\right]\left[z-f(t_1)\right]-\left[\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}\right]\left[\overline{z}-\overline{f(t_1)}\right]=0$$

因為

$$\overline{\left[\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}\right]}=\frac{\overline{f(t_2)}-\overline{f(t_1)}}{\dfrac{1}{t_2}-\dfrac{1}{t_1}}$$

$$=-\frac{\overline{f(t_2)}-\overline{f(t_1)}}{t_2-t_1}(t_1t_2)\text{，故}$$

$$(6.2)\quad \frac{\overline{f(t_2)}-\overline{f(t_1)}}{t_2-t_1}=-\frac{1}{t_1t_2}\overline{\left[\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}\right]}$$

上式可寫成下列形狀：

$$(6.3)\quad -\frac{1}{t_1t_2}\overline{\left[\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}\right]}[z-f(t_1)]-\left[\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}\right][\bar{z}-\overline{f(t_1)}]=0$$

當 t_2 向 t_1 趨近時可得

$$-\lim_{t_1\to t_1}\frac{1}{t_1t_2}\lim_{t_1\to t_2}\overline{\left[\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}\right]}[z-f(t_1)]-\lim_{t_2\to t_1}\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}[\bar{z}-\overline{f(t_1)}]=0$$

即

$$(6.4)\quad -\frac{1}{t_1^2}\overline{f'(t_1)}[z-f(t_1)]-f'(t_1)[\bar{z}-\overline{f(t_1)}]=0$$

此因

$$(6.5)\quad \lim_{t_2\to t_1}\overline{\left[\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}\right]}=\overline{\left[\lim_{t_2\to t_1}\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}\right]}=\overline{f'(t_1)}$$

之故。如此所求在 $f(t_1)$ 處的切線之方程式為

$$\overline{f'(t_1)}\,z+t_1^2f'(t_1)\,\bar{z}=\overline{f'(t_1)}\,f(t_1)+t_1^2f'(t_1)\,\overline{f(t_1)}$$

故 t_1 任意變動時，$z=f(t)$ 之所有切線的集合可表成下列形狀：

$$(6.6)\quad \overline{f'(t)}\,z+t^2f'(t)\,\bar{z}=\overline{f'(t)}\,f(t)+t^2f'(t)\,\overline{f(t)}\text{。}$$

此式稱為平面曲線 $z=f(t)$ 之線方程式。

現在給平面曲線之線方程式來求其點方程式，即其普通的參數方程式如下：

設平面曲線之線方程式為

$$(6.7)\quad f(t)z+g(t)\bar{z}=h(t)\text{。}$$

如§5，該平面曲線為其上相鄰二條切線。

$$f(t_1)z+g(t_1)\bar{z}=h(t_1)$$
$$f(t_2)z+g(t_2)\bar{z}=h(t_2)$$

之交點，當 t_2 向 t_1 趨近時，其極限位置的點集合。現在先求此二切線之交點之座標；為此目的先消去 $\bar{z}$。第一式乘 $g(t_2)$，第二式乘 $g(t_1)$ 後邊邊相減，可得

$$(6.8)\quad [f(t_1)g(t_2)-f(t_2)g(t_1)]z=h(t_1)g(t_2)-h(t_2)g(t_1)$$

由此式可求交點之座標。此式可寫成下列形狀：

$$\{f(t_1)[g(t_2)-g(t_1)]-g(t_1)[f(t_2)-f(t_1)]\}z=\{h(t_1)[g(t_2)-g(t_1)]-g(t_1)[h(t_2)-h(t_1)]\}$$

將此式除以 t_2-t_1，則得

$$\left[f(t_1)\frac{g(t_2)-g(t_1)}{t_2-t_1}-g(t_1)\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}\right]z=h(t_1)\frac{g(t_2)-g(t_1)}{t_2-t_1}-g(t_1)\frac{h(t_2)-h(t_1)}{t_2-t_1}$$

當 t_2 向 t_1 趨近時，由此式可得

$$[f(t_1)g'(t_1)-g(t_1)f'(t_1)]z=h(t_1)g'(t_1)-g(t)h'(t_1)$$

（下轉第121頁）