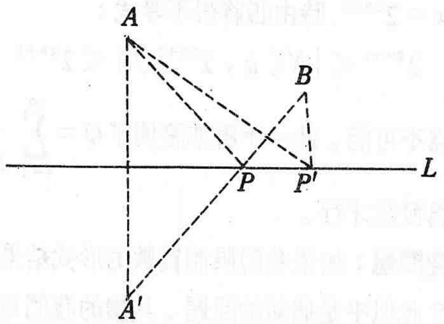
一個極值問題

葉東進

於平面中，想在一條已予直線L上取一點P，使它到L外同側的兩定點A與B的距離和$\overline{PA}+\overline{PB}$ 爲極小（圖一），這是大家熟悉的問題，而底下的解法也是普遍知曉的：



圖一

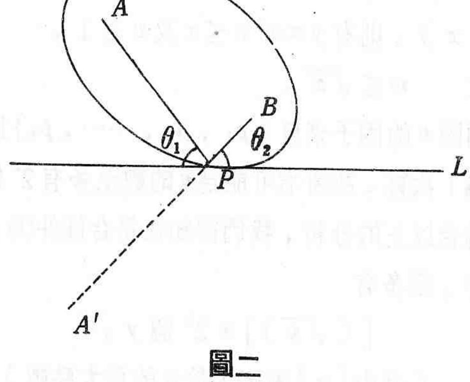
取點A關於直線L的對稱點A'，連接線段$A'B$交直線L於點P，則P點即爲所欲取。理由是若是在L上取其他點P'，則有

$$\begin{aligned}\overline{P'A}+\overline{P'B}&=\overline{P'A'}+\overline{P'B}>\overline{A'B}\\&=\overline{PA'}+\overline{PB}\\&=\overline{PA}+\overline{PB}\end{aligned}$$

現在想通過解析幾何的觀點來看上述的P點，而找出另一種處理方法，並把這樣的處理也運用到解決下面這個問題上：

於平面中，想在一條已予直線L上取一點P，使它到L外同側的兩定點A與B的距離比$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$爲極小（極大）。

於平面中，對兩定點A與B及定值k（$k>\overline{AB}$）而言，滿足 $\overline{PA}+\overline{PB}=k$ 的點P的軌跡是一個以A，B爲焦點而長軸的長爲k的橢圓。因此，想在直線L上取點P使 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 爲極小，便相當於要在A，B爲焦點的橢圓系中找出唯一的與直線L相切的那個橢圓，而它們的切點正是所欲取的P點（圖二）：



圖二

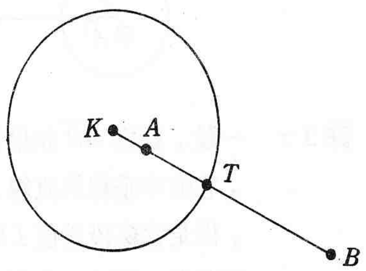
這樣的點P究竟落在L上的哪個位置？

假定P就是所欲取的切點，因爲橢圓的切線L具有$\theta_1=\theta_2$這樣的性質（圖二）（註1），我們便知道點P其實是落在由B點以及點A關於L的對稱點A'的連線$A'B$上，也就是說

點P便是線段$A'B$與直線L的交點。

接著要處理另一個問題，但首先必須建立下面的背景。

一、於平面中，對兩定點A與B及定值k（$k \neq 1$）而言，滿足$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=k$的點$P$的軌跡是一個圓；同時，$A$，$B$兩點恰互為關於該圓的鏡像（註2）。



圖三

證明：我們取$k<1$（因為如果$k>1$時，我們可以改考慮$\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}}=k$），另外，不失一般性，取一直角座標系，使點$A=(0,0)$，而點$B=(1,0)$，$P=(x,y)$。由

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=k$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=k\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow (1-k^2)x^2+(1-k^2)y^2+2k^2x+k^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{k^2}{k^2-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{k}{1-k^2}\right)^2$$

∴點P的軌跡是一個以點$K=\left(\dfrac{k^2}{k^2-1},0\right)$為圓心，以$\dfrac{k}{1-k^2}$為半徑的圓（圖三）。

同時，由

$$\overline{KA}\cdot\overline{KB}=\frac{k^2}{1-k^2}\left(1-\frac{k^2}{k^2-1}\right)$$

$$=\left(\frac{k}{1-k^2}\right)^2$$

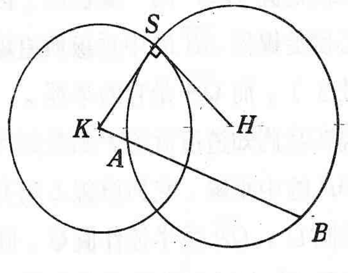
知點A與點B恰互為關於圓K的鏡像。

二、由$\dfrac{k}{1-k^2}>\dfrac{k^2}{1-k^2}$知圓$K$與線段$AB$有唯一的交點$T$。由

$$\begin{cases}\overline{KA}=\dfrac{k^2}{1-k^2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{k^2}-1}\\[2ex] \overline{TA}=\overline{KT}-\overline{KA}=\dfrac{k}{1-k^2}-\dfrac{k^2}{1-k^2}\\[2ex] \quad=\dfrac{k-k^2}{1-k^2}=\dfrac{k}{1+k}\end{cases}$$

知當k的值愈小時，點K與點T便各自從相反的方向而愈接近點A。

三、若A，B兩點互為關於圓K的鏡像，則通過A，B兩點的任一圓恒與圓K正交。



圖四

證明：取通過A，B兩點的任一圓H，令S是圓H與圓K的一個交點（圖四），因為A，B互為關於圓K的鏡像

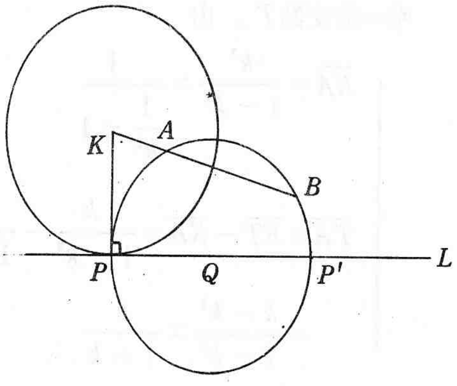
$$\therefore\ \overline{KA}\cdot\overline{KB}=\overline{KS}^2$$

因而線設KS便是圓H的一條切線段，隨之KS垂直HS，也就是圓H與圓K正交於點S。

通過上面所述的背景一與背景二便可以瞭解，想在直線上取點P使得$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$為極小，便相

當於要在過A，B兩點的圓系中找出唯一的與直線L相切的那個圓，而它們的切點正是所欲取的P點（圖五）。

這樣的點P究竟落在L上的哪個位置？



圖五

假定P就是所欲取的切點，由上面所述的背景三知通過A、B及P三點的圓 ABP 必與圓K正交，因爲線段 KP 垂直於直線 L，所以直線L便是圓 ABP 的一條直徑，因而圓ABP的圓心便是線段 $\overline{AB}$ 的中垂線與直線L的交點Q（註3），而$\overline{QA}$是它的半徑。

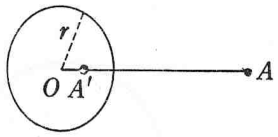
現在我們知道所欲的P點是如何取了：作線段 AB 的中垂線，它與直線L相交於點Q，以Q爲圓心，$\overline{QA}$ 爲半徑作圓Q，圓Q交L於兩點P及P'，經由前面的分析知道P點即是L上滿足$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$爲極小的點。

在L上取點P使得$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$爲極大，其實是等價於在$L$上取點$P$使得$\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$爲極小，仿前述方法，知道圖五中所提到的點 P' 便是使得$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$爲極大的點。

註 釋

註1： 參考高中數學實驗教材第四册（自然組、社會組修訂本）。

註2： 平面上，一點A關於已予圓O的鏡像點定義爲落在射線 OA 上並滿足 $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=r^2$ 的點A'。



註3： 一般，線段 $\overline{AB}$ 如果沒有垂直L時，它的中垂線與直線L恰有一交點，但是當線段垂直L時，交點Q並不存在，這時，我們有底下兩種情況：

（i） 若是點A到L的距離大於點B到L的距離時，圓K與L相切於P點，這時P使得$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$爲極大，而$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的極小不存在。

（ii） 若是點A到L的距離小於點B到L的距離時，圓K與L相切於P點，這時P使得$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$爲極小，而$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的極大不存在。

—本文作者任教於新竹科學園區實驗高中—