組合專題

差分法及其在組合學上的應用

何景國

差分法是數值分析中一門重要的課題，不只在數學理論上有著廣泛的應用，同時在處理問題技巧上更適合高速電算機的逐步計算。本文將介紹差分法的數學意義，並證明一些重要定理，就組合數學範疇內，學例說明處理問題之思考方法與求解之技巧。

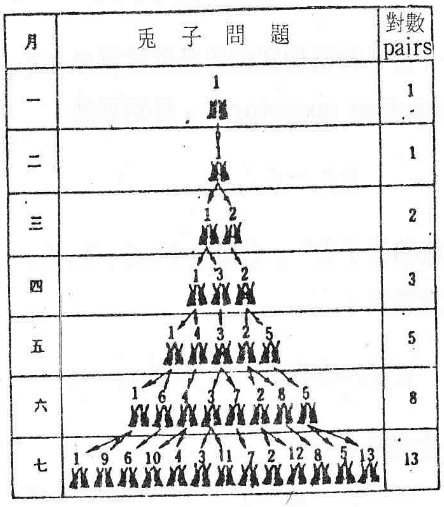
先以一道頗富趣味性的兔子問題來介紹何謂差分方程式。

兔子問題：

設有一對兔子在它出生後的第一個月不會生育，但在第二個月底和往後每個月底都會生一對兔子，則每月初有多少對兔子？

由下圖所示，顯見一對剛出生的兔子，往後逐月所衍生的兔子會形成一個數列如下：

1，1，2，3，5，8，13，……



實際上，這個數列的前幾項可以很容易求得。先寫出前二項 $f_1=1$，$f_2=1$，其後每一項均爲其兩項之和。因此如果以 f_n 表示第 n 個月初之兔子數，那麼我們可以得到下列的遞迴關係式：

$$\begin{cases} f_1=1\text{，}f_2=1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ f_n=f_{n-1}+f_{n-2}\ (n\geqslant 3) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

數列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 可看成是定義在正整數集上的函數。(2)式表示了三個相連正整數間該函數值之關係，稱爲差分方程式（Difference equation）。其中(1)式稱爲(2)式之邊界條件（Boundary Condition）。

差分方程式之解是用 n 表達 f_n 的一般形式，這裏我們先用生成函數（generating function）的方法來求滿足邊界條件(1)的方程式(2)之解；後面將用差分方程的求解方法來處理。

在下面，我們將遞迴關係式看成一種差分方程式，並在例說介紹另一種方程式求解的方法。

我們已經提過一個數列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ 可看成是定義在非負整數集上的函數，其於正整數之

值就是 f_n 。差分算子 Δ（Difference operator）是一在這些函數組成的集合上之變換，其定義為：

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$$

對 Δf_n 再做一次差分，就得到二階差分 $\Delta^2 f_n$，其高階差分算子 Δ^k（$k=3,4,\cdots\cdots$）仿此定義為：

$$\Delta^k f_n = \Delta(\Delta^{k-1} f_n)$$

差分可一直作下去，微分却可能有一些麻煩！我們並定義 $\Delta^0 = I$ ，其中 I 是恆等算子，即：

$$I f_n = f_n \qquad (n=0,1,2,\cdots\cdots)$$

與差分算子有密切關係的是位移算子 E（Translation operator），其定義為：

$$E f_n = f_{n+1}$$

高階位移算子 E^k ，（其中 $k=2,3,4,\cdots\cdots$）是定義為：

$$E^k f_n = E(E^{k-1} f_n) = f_{n+k}$$

我們並定義：

$$E^0 = I$$

顯然有：

$$E = \Delta + I$$

定理 1 ：差分算子 Δ 為一線性算子。

即，疊合原理對差分算子是成立的：

$$\begin{cases} \Delta(f_n + g_n) = \Delta f_n + \Delta g_n & (\text{加性}) \\ \Delta(\alpha f_n) = \alpha \Delta f_n \quad (\alpha \in R) & (\text{齊性}) \end{cases}$$

證明：

$$\because \quad \Delta(f_n + g_n) = (f_{n+1} + g_{n+1}) - (f_n + g_n)$$
$$= (f_{n+1} - f_n) + (g_{n+1} - g_n)$$

$$\therefore \quad \Delta(f_n + g_n) = \Delta f_n + \Delta g_n$$

同時， $\Delta(\alpha f_n) = \alpha f_{n+1} - \alpha f_n = \alpha(f_{n+1} - f_n)$

即： $\Delta(\alpha f_n) = \alpha \Delta f_n$

定理 2 ：若 $\Delta f_n = 0$ ，則 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ 為一常數數列。

證明：

$\because \quad \Delta f_n = 0$

$\therefore \quad f_{n+1} - f_n = 0 \qquad \forall n = 0,1,2,3,\cdots\cdots$

即， $f_n = f_0 \qquad \forall n = 0,1,2,3,\cdots\cdots$

即為常數數列。

給予一個數列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ ，要找另一個數列 $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使

$$f_n = \Delta g_n$$

我們可以找到許多不同的數列，但這些數列之間均只差個常數。此乃是由於如下的推論的。

推論：若兩數列 $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ 與 $\{g_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ 的差分相等則 $g_n = g_n^* + k$（k 為常數）因此，我們稱數列 $\{g_n\}$ 為數列 $\{f_n\}$ 的反差分數列。事實上，只要 g_n 存在，它欲是"本質上唯一"。剩下來的問題純粹是技術問題了。故可記作如下：

$$g_n = \Delta^{-1} f_n$$

那麼；要求 g_n 就是要取 f_n 的反差分，即和分！。總言之，我們有下列的差和分法基本定理。

若 $f_n = \Delta g_n$ ，則 $\sum\limits_{i=m}^{n} f_i = g_{n+1} - g_m = g_i \Big]_{i=m}^{i=n+1}$

定理 3 ：和分算子 Δ^{-1} 為一線性算子。

即：
$$\begin{cases} \Delta^{-1}(f_n + h_n) = \Delta^{-1} f_n + \Delta^{-1} h_n \\ \Delta^{-1}(\alpha f_n) = \alpha \Delta^{-1} f_n \quad (\alpha \in R) \end{cases}$$

定理 4 ：

$$\Delta^k f_n = f_{n+k} - \binom{k}{1} f_{n+k-1} + \binom{k}{2} f_{n+k-2}$$
$$\cdots\cdots + (-1)^k f_n$$

證明：

$\because \quad \Delta = E - I$

$\therefore \quad \Delta^k = (E - I)^k$

$$=E^k-\binom{k}{1}E^{k-1}+\binom{k}{2}E^{k-2}+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^k I$$

故：$\Delta^k f_n=E^k f_n-\binom{k}{1}E^{k-1}f_n+\binom{k}{2}E^{k-2}f_n$
$$+\cdots\cdots+(-1)^k f_n$$

定理 5：若 $h_n=f_n\times g_n$，

則 $\Delta h_n=(\Delta f_n)\times Eg_n+f_n\times\Delta g_n$

證明：

$\because\quad \Delta h_n=f_{n+1}\times g_{n+1}-f_n\times g_n$
$\qquad\qquad =(f_{n+1}-f_n)g_{n+1}+f_n(g_{n+1}-g_n)$

$\therefore\quad \Delta h_n=(\Delta f_n)\times g_{n+1}+f_n\times(\Delta g_n)$

或 $\qquad\quad =(\Delta f_n)\times Eg_n+f_n\times(\Delta g_n)$

推論：部分和分公式

$$\Delta^{-1}(f_n\times g_n)=(\Delta^{-1}f_n)\times g_n-\Delta^{-1}[E(\Delta^{-1}g_n)\times\Delta f_n]$$

任何方程式含有差分算子或與其等價之位移算子的稱爲差分方程式（Difference equation）。一個 k 階常係數線性差分方程式有一般形式：

$$a_0 f_{n+k}+a_1 f_{n+k-1}+\cdots\cdots+a_k f_n=g_n$$

其中 $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ 爲一給予數列，a_0，a_1，a_2，……，a_k 是給予之常數。如有 k 個相連的值爲給出，（稱爲邊界條件）則上述方程式有唯一的解。與其對應之齊次差分方程式是：

$$a_0 f_{n+k}+a_1 f_{n+k-1}+\cdots\cdots+a_k f_k=0$$

前述之兩個方程式又可記爲：

$$\begin{cases}(a_0E^k+a_1E^{k-1}+\cdots+a_\mu I)f_n=g_n & \cdots①\\ (a_0E^k+a_1E^{k-1}+\cdots+a_k I)f_n=0 & \cdots②\end{cases}$$

方程式②之解稱爲齊次解；任意滿足方程式①之解稱爲特別解。所有齊次形成的集合是一向量空間；方程式①之解必爲一個齊次解及某個特別解之和。即：

一般解＝（特別解）＋（齊次一般解）

下面我們討論 k 階齊次常係數線性差分方程式②之求解步驟，此時，②中令 $f_n=\beta^n$，我們有：

$$(a_0\beta^k+a_1\beta^{k-1}+\cdots\cdots+a_{k-1}\beta^1+a_k)\beta^n=0$$

其中 β 爲一非零之常數，故又有：

$$a_0\beta^k+a_1\beta^{k-1}+\cdots\cdots+a_{k-1}\beta+a_k=0 \quad\cdots\cdots\cdots③$$

方程式③爲一 k 次代數方程式，稱爲與②對應之特徵方程式；它有 k 個根，稱爲方程式②之特徵根。若③有 k 個相異根 β_1，β_2，……，β_k，則任一方程式②之解有如下的形式：

$$f_n=c_1\beta_1^n+c_2\beta_2^n+\cdots\cdots+c_k\beta_k^n$$

其中 c_1，c_2，c_3，……，c_k 爲未定係數，由所給出的邊界條件所決定。如果一特徵根 β 是③之 m 重根，則其對應之齊次解是：

$$(c_0+c_1n+c_2n^2+\cdots\cdots+c_{m-1}n^{m-1})\beta^n$$

其餘依此類推。

如果方程式③有一對共軛複根：

$$\begin{cases}\beta_1=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)\\ \beta_2=\rho(\cos\theta-i\sin\theta)\end{cases}\ (式中\ \rho,\theta\in R)$$

則其對應之齊次數又可寫成：

$$\begin{aligned}f_n&=c_1\beta_1^n+c_2\beta_2^n\\ &=\rho^n[c_1(\cos n\theta+i\sin n\theta)\\ &\quad+c_2(\cos n\theta-i\sin n\theta)]\end{aligned}$$

或

$$f_n=\rho^n(B_1\cos n\theta+B_2\sin n\theta)$$

其中 $\quad B_1=c_1+c_2$； $\quad B_2=c_1-c_2$

下面我們舉例來闡明齊次差分方程式之求解步驟。

例說 1：前面我們提了一道兔子數量的例子，並說明用生成函數求解的過程。現在我們試將

遞回關係式看成一種齊次差分方程式：

$$\begin{cases} f_{n+2}-f_{n+1}-f_n=0 \cdots \text{二階齊次差分方程式(甲)} \\ f_0=0\,,\ f_1=1 \cdots\cdots\cdots \text{邊界條件(乙)} \end{cases}$$

方程式(甲)之特徵方程式是：

$$\beta^2-\beta-1=0$$

它有兩個不同的特徵根是$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$與$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$。故齊次解爲：

$$f_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

將邊界條件代入得：

$$\begin{cases} 0=c_1+c_2 \\ 1=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

得聯立方程式之解：

$$c_1=\frac{\sqrt{5}}{5}\ ,\quad c_2=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

故：

$$f_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

例說 2：試計算下列 $n\times n$ 行列式之值：

$$\begin{vmatrix} 2&1&0&0&0&\cdots&0&0&0&0&0 \\ 1&2&1&0&0&\cdots&0&0&0&0&0 \\ 0&1&2&1&0&\cdots&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&2&0&\cdots&0&0&0&0&0 \\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0&1&2&1&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&2&1 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&1&2 \end{vmatrix}$$

解：設所求的 n 階行列式之值爲 f_n 。

將所求行列式以第一行展開得：

$$\begin{vmatrix} 2&1&0&0&0&\cdots&0&0&0&0&0 \\ 1&2&1&0&0&\cdots&0&0&0&0&0 \\ 0&1&2&1&0&\cdots&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&2&0&\cdots&0&0&0&0&0 \\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0&1&2&1&0 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&2&1 \\ 0&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&1&2 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$=2\times\begin{vmatrix} 2&1&0&0&\cdots&0&0&0&0&0 \\ 1&2&1&0&\cdots&0&0&0&0&0 \\ 0&1&2&0&\cdots&0&0&0&0&0 \\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots \\ 0&0&0&0&\cdots&0&1&2&1&0 \\ 0&0&0&0&\cdots&0&0&1&2&1 \\ 0&0&0&0&\cdots&0&0&0&1&2 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$-\begin{vmatrix} 1&0&0&0&\cdots&0&0&0&0&0 \\ 1&2&1&0&\cdots&0&0&0&0&0 \\ 0&1&2&0&\cdots&0&0&0&0&0 \\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots \\ 0&0&0&0&\cdots&0&1&2&1&0 \\ 0&0&0&0&\cdots&0&0&1&2&1 \\ 0&0&0&0&\cdots&0&0&0&1&2 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

再將上式右邊的第二項 $(n-1)$ 階行列式依第一列展開，可得差分方程式：

$$\begin{cases} f_n=2f_{n-1}-f_{n-2} \\ f_1=2\ ;\ f_2=3 \end{cases}$$

上式之特徵方程式是：

$$\beta^2-2\beta+\beta=0$$

這個方程式的特徵根爲 1（ $m=2$ 重根）

故： $f_n=(c_0+c_1n)(1)^n=c_0+c_1n$

將邊界條件代入得：

$$\begin{cases} 2=c_0+c_1 \\ 3=c_0+2c_1 \end{cases}$$

解得：

$$c_0=1\ ,\ c_1=1$$

所以：

$$f_n=1+n$$

即原 $n\times n$ 行列式值爲 $n+1$

例說 3：試計算下列 $n\times n$ 行列式之值

$$\begin{vmatrix} 1\ 1\ 0\ 0\ 0\cdots\cdots 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\cdots\cdots 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\cdots\cdots 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\cdots\cdots 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\cdots\cdots 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\cdots\cdots 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\cdots\cdots 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \end{vmatrix}$$

解：

設 f_n 爲所求的 n 階行列式之值。

仿照上例說，用降階法先將所求行列式以第一行展開，再將展式中的第二項 $(n-1)\times(n-1)$ 行列式依第一列展開得下列差分方程式：

$$\begin{cases} f_n=f_{n-1}-f_{n-2} \\ f_1=1\ ,\ f_2=0 \end{cases}$$

對應的特徵方程式爲：

$$\beta^2-\beta+1=0$$

其特徵根爲：

$$\beta_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\beta_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$$

故，解爲：

$$f_n=(1)^n\left(B_1\cos\frac{n\pi}{3}+B_2\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

利用邊界條件代入得：

$$\begin{cases} 1=\frac{1}{2}B_1+\frac{\sqrt{3}}{2}B_2 \\ 0=-\frac{1}{2}B_1+\frac{\sqrt{3}}{2}B_2 \end{cases}$$

所以：

$$B_1=1\ ,\ B_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

故得：

$$f_n=\cos\frac{n\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{n\pi}{3}$$（其中 $n\in N$）

事實上 f_n 的值均爲整數，且其前幾項爲：

$$1,0,-1,-1,0,1,1,0,\cdots\cdots$$

接下來，我們要介紹非齊次差分方程式的求解方法。由上面討論得知只需求出方程式的特解，即可得到一般解。然而特解的求得，一般是必須依靠經驗的，無規則可尋。現在提出一種以算子的計算方式來求得特解的方法，並列出幾個計算公式，依此公式，則較有清晰的脈絡可尋。

計算公式：

設 k，m，爲自然數且 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ 與 $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ 爲兩給予數列則

(1) $E^kE^m=E^{k+m}$

(2) $E^k(f_n\cdot g_n)=E^k\cdot f_n\cdot E^kg_n$

(3) $E\Delta=\Delta E$

(4) $E^k(\alpha^nf_n)=\alpha^n(\alpha E)^kf_n$　（其中 $\alpha\in R$）

(5) 若 E 之多項式爲 $P(E)=a_0E^k+a_1E^{k-1}+\cdots\cdots+a_{k-1}E+a_k$，其中 $a_0,a_1,\cdots\cdots,a_k$ 爲常數，則 $\frac{1}{P(E)}(\alpha^nf_n)=\alpha^n\times\frac{1}{P(\alpha E)}\times f_n$

證明：

(1) $\because E^kE^mf_n=E^k(E^mf_n)=E^kf_{n+m}$

$$=f_{n+(m+k)}=E^{m+k}f_n$$

$\therefore E^kE^m=E^{k+m}$

(2)，(3)：同理可證，故略。

(4) $\because E^k(\alpha^n f_n)=E^k\alpha^n\cdot E^k f_n$ (由公式(2))

即 $\qquad =\alpha^{n+k}\cdot E^k f_n$

$\therefore\ E^k(\alpha^n f_n)=\alpha^n(\alpha E)^k f_n$

(5) $\because P(E)=a_0E^k+a_1E^{k-1}+\cdots\cdots+a_{k-1}E+a_k$

$\therefore P(E)[\alpha^n f_n]=\alpha^n P(\alpha E)f_n$

故：

因 $P(E)[\alpha^n \dfrac{1}{P(\alpha E)} f_n]$

$=\alpha^n P(\alpha E)\dfrac{1}{P(\alpha E)} f_n=\alpha^n f_n$

所以得知：

$$\frac{1}{P(E)}(\alpha^n f_n)=\alpha^n\frac{1}{P(\alpha E)}f_n$$

特別的，下面公式在計算時比較便捷。

$$\frac{1}{P(E)}\alpha^n=\frac{1}{P(\alpha)}\alpha^n$$

例說 4：問在由數字 0，1，2 或 3 所組成的四元 n －序列中，含偶數個 0 的有多少？

解：設 f_n 表四元 n－ 序列中，含偶數個 0 的序列個數，則在 4^n 個四元 n－ 序中分最後一項數字不為 0 或為 0 兩類。第一類共有 $3f_{n-1}$ 個。第二類的，亦即它的前 $(n-1)$ 項中必有奇數個 0，這樣的序列共有 $4^{n-1}-f_{n-1}$ 個。故得：

$$f_n=3f_{n-1}+(4^{n-1}-f_{n-1})$$

顯易地知：$n=1$ 時，$f_1=3$

所以，f_n 滿足下列的差分方程式：

$$\begin{cases} f_{n+1}-2f_n=4^n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{①} \\ f_1=3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②} \end{cases}$$

方程式①寫成：

$$(E-2I)f_n=4^n$$

這是一個一階常係數線性差分方程式，且它的特解為：

$$\frac{1}{E-2I}(4^n)=\frac{1}{4-2}(4^n)=\frac{1}{2}4^n$$

同時其齊次方程式為：

$$(E-2I)f_n=0$$

得其齊次解：

$$c\cdot 2^n \quad (c\text{ 為常數})$$

因此，方程式之一般解有如下的形式：

$$f_n=c\cdot 2^n+\frac{1}{2}\cdot 4^n$$

由邊界條件 $f_1=1$ 得其解為：

$$f_n=\frac{1}{2}(4^n-2^n)$$

重要定理：

設 P_n 為所有定義在實數 $\boldsymbol{R}$ 上的 n 次多項式所成之集合，並設 Δ 為從 P_n 到 P_n 的一個函數。即：

$$\Delta : P_n \to P_n$$

即 $\qquad f \mapsto \Delta(f)=\Delta f$

滿足：$\forall x\in\boldsymbol{R}$，$(\Delta f)(x)=f(x+1)-f(x)$

及，$L_p\in P_n$（其中 $p=0,1,2,\cdots\cdots,n$）

$$\forall x\in\boldsymbol{R}\quad \begin{aligned} &L_0(x)=1,\\ &L_1(x)=x\\ &L_2(x)=x(x-1),\\ &L_3(x)=x(x-1)(x-2),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &L_p(x)=x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-p+1)\end{aligned}$$

則：

(1) Δ 為線性變換，

(2) $\beta=(L_0,L_1,\cdots\cdots,L_n)$ 為 P_n 的一個基底

(3) $\Delta L_p=pL_{p-1}$ $(p\geqslant 1)$

$$\Delta^k L_p=\frac{p!}{(p-k)}L_{p-k}$$

$$(\text{其中 }\Delta^k=\underbrace{\Delta\circ\Delta\circ\cdots\cdots\circ\Delta}_{k\text{ 個}})$$

$$\Delta^p L_p=p!\,L_0$$

$$\Delta^m L_p=0 \quad (\text{其中 } m>p)$$

(4) 函數 Δ 的核 $\ker(\Delta)=P_0$

(4)函數 Δ^2 的核 $\ker(\Delta^2)=P_1$

證明：

(1)令 $f,g\in P_n$，且 $\alpha,\beta\in \boldsymbol{R}$ 與 $u(x)=\alpha f(x)+\beta(x)$，則：

$$\begin{aligned}(\Delta u)(x)&=[\alpha f(x+1)+\beta g(x+1)]\\&\quad-[\alpha f(x)+\beta g(x)]\\&=\alpha[f(x+1)-f(x)]\\&\quad+\beta[g(x+1)-g(x)]\\&=\alpha(\Delta f)(x)+\beta(\Delta g)(x)\end{aligned}$$

故　Δ 爲 P_n 到 P_n 的線性變換。

(2)因爲：

$L_0(x)=1$ 爲 P_0 的一個基底，且 $L_1(x)=x\notin P_0$。

所以：

$L_0(x)$ 與 $L_1(x)$ 爲 P_1 的一個基底

設 $(L_0,L_1,\cdots\cdots,L_{p-1})$ 爲 P_{p-1} 的一個基底，則由於 $L_p\notin P_{p-1}$，故

$\beta=(L_0,L_1,\cdots\cdots,L_{p-1},L_p)$ 爲 P_p 的一個基底

(3) $p\geqslant 1$，

$$\begin{aligned}\Delta L_p(x)&=(x+1)(x)(x-1)\cdots\cdots\\&\quad(x-p+2)-x(x-1)\cdots\cdots\\&\quad(x-p+1)\\&=x(x-1)\cdots\cdots(x-p+2)[(\\&\quad x+1)-(x-p+1)]\\&=p\times(x-1)\cdots\cdots(x-p+2)\end{aligned}$$

故　$\Delta L_p=p\,L_{p-1}$

用數學歸納法證明公式 $\Delta^k L_p=\dfrac{p!}{(p-k)!}L_{p-k}$

成立

由上得知 $k=1$ 時公式成立

設公式對 $k-1$ 亦成立，即有：

$$\Delta^{k-1}L_p=\frac{p!}{(p-k+1)!}L_{p-k+1}$$

則

$$\begin{aligned}\Delta^k L_p&=\frac{p!}{(p-k+1)!}\,\Delta\,L_{p-k+1}\\&=\frac{p!(p-k+1)}{(p-k+1)!}L_{p-k}\end{aligned}$$

即得：

$$\Delta^k L_p=\frac{p!}{(p-k)!}L_{p-k}$$

故公式對 $k=1,2,3,\cdots\cdots,p$ 均恆成立。

特別地：

$$\Delta^p L_p=\frac{p!}{0!}L_0=p!\,L_0$$

且，當 $m>p$ 時；顯易得知　$\Delta^m L_p=0$

(3)設 $f=(a_0,a_1,\cdots\cdots,a_n)_\beta$ 爲 P_n 中的一元素，則

$\Delta f=(a_1,2a_2,\cdots\cdots,na_n,0)_\beta$，

且 $\Delta f\in P_{n-1}$

故：

$f\in\ker(\Delta)\Longleftrightarrow a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n=0$

即：　$\ker(\Delta)=p_0$

(4)因爲：

$$\Delta^2 f=\left(2a_2,\ \frac{3!}{1}a_3,\ \cdots\cdots,\ \frac{k!}{(k-2)!}a_k,\ \cdots\cdots,\ \frac{n!}{(n-2)!}a_n,0,0\right)_\beta$$

所以：

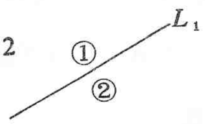
$$\ker(\Delta^2)=P_1$$

例說 5：平面的分割

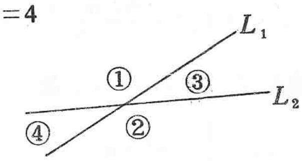
設有 n 條相異直線在同一平面上，若 n 條直線中無任二條相互平行，且無任三線共線，則這些 n 條直線將平面分割成多少塊區域？

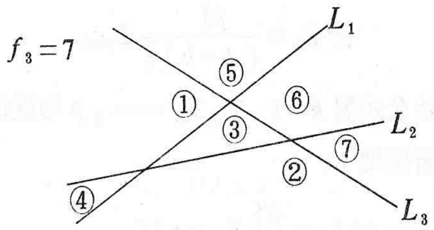
解：設 f_n　表 n 直線所分的平面區域個數，顯見：

$f_1=2$



且　$f_2=4$





現在設已有 n 條直線，且將平面分成 f_n 個區域，再有第 $n+1$ 條直線，該直線與原先的 n 條直線相交於 n 個點，換句話說，第 $n+1$ 條直線被原來的 n 條直線分成 $(n+1)$ 個區間，其中每一區間將它所在原有的一區間分成 2 個區域，而實增加 1 塊區域。故得：

$$f_{n+1}=f_n+n+1$$

即：

$$f_{n+1}-f_n=n+1$$

上式寫成：

$$(E-I)f_n=n+1$$

或：

$$\Delta f_n=(n+1)$$

上式是一階常係數線性差分方程式，它的特解是：

$$\frac{1}{\Delta}(n+1)=\Delta^{-1}(n+1)$$

其中：

$$n+1=L_1(n)+L_0(n)$$

故，依定理得特解：

$$\frac{n(n-1)}{2}+n$$

齊次方程式 $(E-I)f_n=0$ 的齊次解爲：

$$c(1)^n \quad (\text{其中 } c \text{ 爲常數})$$

因此，一般解爲：

$$f_n=c(1)^n+\frac{n(n-1)}{2}+n$$

由邊界條件 $f_1=2$ 得 $c=1$，故：

$$f_n=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

例說 6：空間之切割：

試求空間中相異 n 個平面切割空間最多之區域數。

解：設 f_n 表 n 個平面切割空間之區域數。

顯見：

$$f_1=2,\quad f_2=4$$

現在設已有 n 個平面切割空間成 f_n 個區域。新添加 1 平面在一般位置須與原先有的 n 個平面均相交而得 n 條一般位置的直線，因此，新添加的第 $n+1$ 個平面被分割成

$\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ 塊區域，故得：

$$f_{n+1}=f_n+\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

即：$f_{n+1}-f_n=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$

或 $(E-I)f_n=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$

或 $\Delta f_n=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$

上式是個一階常係數線性差分方程式，它的特解可由下列計算而得。

$$\frac{1}{2}(n^2+n+2)=\frac{n(n-1)}{2}+n+1$$

$$=\frac{1}{2}L_2(n)+L_1(n)+L_0(n)$$

依上定理易得特解：

$$\frac{1}{6}L_3(n)+\frac{1}{2}L_2(n)+L_1(n)$$

$$=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)+\frac{1}{2}n(n-1)+n$$

同時，齊次方程式 $(E-I)f_n=0$ 的解爲 $c(1)^n$（其中 c 爲常數）因此得其一般解。

$$f_n=c\cdot(1)^n+\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

$$+\frac{1}{2}n(n-1)+n$$

由邊界條件 $f_1=2$ 解得 $c=1$，故：

$$f_n=\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$$

例說 7：求差分方程式之特解

$$f_{n+2}-f_{n+1}-6f_n=(2n+1)3^n$$

解：

$$\because f_{n+2}-f_{n+1}-6f_n=(2n+1)3^n$$

即　$(E^2-E-6)f_n=(2n+1)3^n$

$$\therefore\quad f_n=\frac{1}{E^2-E-6}(2n+1)3^n$$

即　$f_n=3^n\dfrac{1}{(3E)^2-(3E)-6}(2n+1)$

$$=3^{n-1}\frac{1}{3E^2-E-6}(2n+1)$$

$$=3^{n-1}\frac{1}{(E-1)(3E+2)}(2n+1)$$

$$=3^{n-1}\frac{1}{\Delta(3\Delta+5)}(2n+1)$$

式中 $\dfrac{1}{\Delta(3\Delta+5)}=\dfrac{1}{\Delta}\cdot\dfrac{1}{3\Delta+5}$

$$=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{1}{5(1+\frac{3}{5}\Delta)}\right]$$

$$=\frac{1}{\Delta}(1-\frac{3}{5}\Delta)$$

故　$f_n=\dfrac{3^{n-1}}{5}\cdot\dfrac{1}{\Delta}(1-\dfrac{3}{5}\Delta)(2n+1)$

$$=\frac{3^{n-1}}{5}\cdot\frac{1}{\Delta}(1-\frac{3}{5}\Delta)(2L_1(n)+L_0(n))$$

$$=\frac{3^{n-1}}{5}\cdot\Delta^{-1}[2L_1(n)+L_0(n)-\frac{3}{5}\Delta(2L_1(n)+L_0(n))]$$

$$=\frac{3^{n-1}}{5}\cdot\Delta^{-1}[2L_1(n)-\frac{1}{5}L_0(n)]$$

故　$f_n=\dfrac{3^{n-1}}{5}\cdot[n(n-1)-\dfrac{1}{5}n]$

$$=\frac{3^n}{75}(5n^2-6n)$$

例說 8：牛頓招差公式

（註：這個牛頓招差公式，事實上早在紀元1303年，即由我國大數學家朱世傑提出。在世界數學史上，朱世傑首先完成整個招差理論）。

給定一個整值多項式 $f(x)$，若 $f(x)$ 的次數爲 n，且 $F_k(x)=\dfrac{1}{k!}L_k(x)$ 則：$f(x)$ 爲 $F_0(x)$，$F_1(x)$，……，$F_n(x)$ 的線性組合，且 $f(x)$ 表爲：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\Delta^k f(0)F_k(x)$$

解：

因爲 $f(x)$ 爲一 n 次整值多項式，所以 $f(x)$ 亦爲 P_n 的一個元素。

故可令

$$f=(a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)_\beta$$

其中：

$\beta=(L_0, L_1, L_2, \cdots\cdots, L_n)$ 爲其一組基底

即得：

$$f(x)=a_0L_0(x)+a_1L_1(x)+a_2L_2(x)+\cdots\cdots+a_nL_n(x)$$

故易知：

$$a_0=f(0)=I\,f(0)=\Delta^0 f(0)$$

由定理知：

$$\Delta f(x)=a_1L_0(x)+2a_2L_1(x)+\cdots\cdots+na_nL_{n-1}(x)$$

$$\Delta^2 f(x)=2a_2L_0(x)+6a_3L_1(x)+\cdots$$

$$\Delta^3 f(x)=6a_3L_0(x)+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^k f(x)=k!\,a_kL_0(x)+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$(k \leq n)$

故有：

$$\Delta^k f(0)=k!\,a_k \qquad (k \leq n)$$

所以：

$$f(x)=\Delta^0 f(0)\frac{L_0(x)}{0!}+\Delta^1 f(0)\frac{L_1(x)}{1!}$$

$$+\Delta^2 f(0)\frac{L_2(x)}{2!}+\cdots\cdots$$

$$+\Delta^n f(0)\frac{L_n(x)}{n!}$$

或

$$f(x)=\Delta^0 f(0)F_0(0)+\Delta^1 f(0)F_1(1)$$
$$+\Delta^2 f(0)F_2(x)+\cdots\cdots+\Delta^n f(0)F_n(x)$$

或改寫成：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\Delta^k f(0)F_k(x)$$

像上述這個式子，可以解決任意類型的高階等差級數求和問題。舉個例子：給 $f(n)=\sum_{i=1}^{n} i^4$，同樣令 $f(0)=0$，則由下列逐差表：

$0=f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)\cdots$	
$\Delta f(0)=1^4$	2^4	3^4	4^4	5^4	6^4	…….	
$\Delta^2 f(0)=15$	65	175	369	671	………		
$\Delta^3 f(0)=50$	110	194	302	………			
$\Delta^4 f(0)=60$	84	108	………				
$\Delta^5 f(0)=24$	24	………					
$\Delta^6 f(0)=0$	………						

可得：

$$\Delta f(0)=1,\quad \Delta^2 f(0)=15,\ \Delta^3 f(0)=50$$
$$\Delta^4 f(0)=60,\ \Delta^5 f(0)=24,\ \Delta^6 f(0)=0$$

因此，

$$\sum_{i=1}^{n} i^4=\sum_{i=0}^{n} i^4=f(n)$$

$$=aF_0(n)+1\cdot F_1(n)+15\cdot F_2(n)$$

$$+50\cdot F_3(n)+60\cdot F_4(n)+24\cdot F_5(n)$$
$$+0\cdot F_6(n)$$

$$=0+1\left[\frac{1}{1!}n\right]+15\left[\frac{1}{2!}n(n-1)\right]$$

$$+50\left[\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\right]$$

$$+60\left[\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\right]$$

$$+24\left[\frac{1}{5!}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\right]$$

$$=n\left[1+\frac{15}{2}(n-1)+\frac{50}{6}(n-1)(n-2)\right.$$

$$+\frac{60}{24}(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$\left.+\frac{24}{120}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\right]$$

$$=\frac{n}{30}\left[6n^4+15n^3+10n^2-1\right]$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

參考資料

1. 趙文敏：有限差分初步，徐氏基金會，民62.
2. 夏宗滙：組合數學中的生成函數，數學傳播（第一卷第三期），民65.
3. 林福來：組合數學，中央圖書出版社，民71.
4. 洪萬生：從內插法到招差術，科學月刊（第十二卷第一期），民70.
5. 李　儼：中國古代數學簡史，九章出版社。
6. Levy, H, & F. Lessman, Finite difference equations, Macmillian, 1961.
7. Liu, C.L, Elements of discrete mathematics，民67.