組合專題

一一對應原理在組合學上的應用

王子俠

在組合學裡，有一些基本的原理，例如加法原理、乘法原理、鴿籠原理、反射原理、最小數原理等等，這些原理的內容，看起來非常淺顯，但用途非常廣，尤其在計數(counting)方面更是不可或缺的工具。在這篇短文裡，我們簡單地介紹其中的一個一一對應原理(The principle of one-to-one correspondence)。這個原理的內容如下：

一一對應原理：以A與B表兩個集合，若能找到一個由A至B的一一對應(one-to-one correspondence)；換言之，一個一對一(one-to-one)且映成(onto)的函數，則$|A|=|B|$。

下面我們分類介紹一些這個原理的應用。

§1 一一對應原理最淺顯的應用

我們先看幾個可以用一一對應立刻解決的問題。

例一：假定n名乒乓選手參加一項單打淘汰賽，每兩人賽一場，負者淘汰(無和局)，試問一共要比賽幾場，才能產生冠軍？

解：要淘汰一名選手，必須舉行一場比賽。反之，每一場比賽必定淘汰一名選手。換句話說，在比賽的場數與被淘汰的選手總數之間有一一對應的關係。要產生冠軍，必須淘汰$n-1$名選手，故需舉行$n-1$場比賽。

例二：將 a、b、c、d、e、f、g 這七個英文字母排成一直線，若 a 必須在 b 之左邊（不一定要相鄰），試問有幾種排法？

解：對任何一種滿足條件之排法，若將 a 與 b 之位置互換，則得到一種不滿足條件之排法，反之亦然。換言之，在所有滿足條件的排法與所有不滿足條件的排法之間有一一對應的關係。因所有排法的總數爲 $7!$，故所求之數爲 $(7!)/2=2520$。

例三：n 名網球選手參加一項比賽（$n\geq 2$），每名選手均與其他 $n-1$ 名選手比賽一場，（無和局）。若以 w_i 及 ℓ_i 分別表第 i 號選手獲勝及落敗之場數，試證恆有 $\sum_{i=1}^{n} w_i=\sum_{i=1}^{n}\ell_i$。

證：每一場比賽有一人獲勝，也有一人落敗，故在所有的獲勝場數和落敗場數之間有一一對應的關係，所以恆有 $\sum_{i=1}^{n} w_i=\sum_{i=1}^{n}\ell_i$。

註：事實上，$\sum_{i=1}^{n} w_i^2=\sum_{i=1}^{n}\ell_i^2$ 也恆成立，但證明就不是這麼簡單了。

§2 有限集合之子集合總數

任何唸過一點集合論的人都知道含 n 個元素的集合共有 2^n 個子集合。這個命題至少有四、五種不同的證法，繁簡程度相差不大。下面我們給兩個證明，它們都用到一一對應原理，我們以 S 表一含 n 個元素的集合，並以 $P(S)$ 表所有 S 之子集合所構成之集合，即 $P(S)=\{A\mid A\subset S\}$。

證明一：我們用歸納法，當 $n=0$ 時，$S=\phi$（空集合），故 $P(S)=\{\phi\}$，而 $|P(S)|=1=2^0$。假定對某個固定之 $n\geq 0$ 及所有 $|S|=n$ 之集合 S，$|P(S)|=2^n$ 均成立，而 T 爲滿足 $|T|=n+1$ 之一集合。固定 $x_0\in T$ 並考慮 $S=T\setminus\{x_0\}$。因 $|S|=n$，故 $|P(S)|=2^n$。將 $P(T)$ 分解成 $P(T)=F_1\cup F_2$，此處 $F_1=\{X\mid X\subset T$ 且 $x_0\notin X\}$，$F_2=\{Y\mid Y\subset T$ 且 $x_0\in Y\}$。則顯然 $F_1\cap F_2=\phi$。因 $F_1=P(S)$，故 $|F_1|=|P(S)|=2^n$。另一方面，我們定義函數 $f:F_2\to P(S)$ 爲 $f(Y)=Y\setminus\{x_0\}$（$Y\in F_2$），則 f 顯然爲一對一函數（因爲若 Y_1、$Y_2\in F_2$ 而 $f(Y_1)=f(Y_2)$，則 $x_0\in Y_1$，$x_0\in Y_2$ 且 $Y_1\setminus\{x_0\}=Y_2\setminus\{x_0\}$，故 $Y_1=Y_2$）又若 $Z\in P(S)$，令 $W=Z\cup\{x_0\}$，則 $W\in F_2$ 且 $f(W)=W\setminus\{x_0\}=Z$。故 f 爲映成函數。於是由一一對應原理得 $|F_2|=|P(S)|=2^n$，從而 $|P(T)|=|F_1|+|F_2|=2^n+2^n=2^{n+1}$，證明完畢。

證明二：以 F 表所有從 S 到集合 $\{0,1\}$ 之函數，即 $F=\{f\mid f:S\to\{0,1\}\}$ 顯然 $|F|=2^n$。故我們僅需找到一個 $P(S)$ 與 F 間的一一對應即可。對任意 $A\subset S$，我們定義 A 之特徵函數（Characteristic function）χ_A 如下：

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 \text{ 若 } x\in A\\ 0 \text{ 若 } x\notin A\end{cases};\ x\in S$$

因 $\chi_A:S\to\{0,1\}$，故 $\chi_A\in F$。

再定義函數 $\phi:P(S)\to F$ 如下：若 $A\subset S$，則 $\phi(A)=\chi_A$。現證明 ϕ 爲一一對應。若 A、$B\subset S$ 且 $\phi(A)=\phi(B)$，則 $\chi_A=\chi_B$。故 $x\in A\Leftrightarrow\chi_A(x)=1\Leftrightarrow\chi_B(x)=1\Leftrightarrow x\in B$，即 $A=B$。故 ϕ 爲一對一函數，若 $f\in F$，令 $A=\{x\mid x\in S$ 且 $f(x)=1\}$，則 $\chi_A(x)=1\Leftrightarrow x\in A\Rightarrow f(x)=1$，故 $\chi_A=f$，即 $\phi(A)=f$。故 ϕ 爲映成函數。換言之，ϕ 爲 $P(S)$ 與 F 間之一一對應，從而 $|P(S)|=|F|=2^n$，證明完畢。

練習題一：若 $|S|=n$，試問 S 有多少含偶數個元素之子集合？有多少個含奇數個元素之子集合？

練習題二：考慮集合 $S=\{1,2\cdots\cdots,n+1\}$。

(a)試證在 S 之子集合中，所含元素最大者爲 j 之子集合的數目爲 2^{j-1}。

(b)利用(a)導出恆等式 $1+2+2^2+\cdots\cdots+2^n=2^{n+1}-1$。

§3 與幾何圖形有關的一些計數問題

下面這個例子相信任何學過排列組合的人都曾看到過。

例四：在圓周上有 n 個點（$n \geq 3$）。將所有點兩兩相連，假定無三條連線在圓內共點，試問在圓內一共有多少交點？

解：每一個交點是某一個圓內接四邊形兩個對角線的交點。反之，任一個圓內接四邊形之兩根對角線必產生一交點。由假定，無三條連線在圓內共點，故在所有交點與所有圓內接四邊形之間有一一對應存在。但因任何四點決定一個內接四邊形，故所求之交點數目爲 $C(n, 4)$。

註：$C(n, k)=\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 係所謂之二項係數，又若 $n<k$，則定義 $C(n, k)=0$。

練習題三：在圓周上有 n 個點（$n\geq 3$）。將所有點兩兩相連。假定無三條線在圓內共點，試問由這些線段構成而三個頂點全在圓內部之三角形一共有多少？

練習題四：假設 L_1 與 L_2 爲兩條平行線，在 L_1 與 L_2 之上分別取定 n_1 及 n_2 個點。將 L_1 上之 n_1 個點與 L_2 上之 n_2 個點兩兩相連。假定這些線段在 L_1 與 L_2 所夾之區域 D 之內無三條共點，試問在 D 內共有多少交點？

§4 正整數的有序分割

所謂正整數的有序分割（ordered partitions）即將一個正整數 n 寫成一些正整數的和，但次序考慮在內。例如 $3=3=1+2=2+1=1+1+1$ 爲 3 的 4 種有序分割。決定 n 之有序分割的總數 $f(n)$ 非常簡單（雖然無序分割的數目相當難求）。我們現在用一種很通俗的方式來敍述這個問題。很顯然地，下面這個問題與決定 $f(n)$ 之値完全相等。

例五：小華有 n 塊完全相同的巧克力糖。假定他每天至少吃一塊吃完爲止，試問一共有幾種吃法？

解：顯然地，所求之數就是 $f(n)$。我們將巧克力糖用黑點 • 表示，排成一行。每兩點之間有一空位，故共有 $n-1$ 個空位。若在一些空位上加上一分割符號 |，則顯然得到一種吃糖的方法。（例如 ••|•••|•|•• 表示一種在四天之內吃八塊糖的方法：第一天兩塊，第二天三塊，第三天一塊，第四天兩塊）反之，任何一種滿足條件的吃糖的方法可以由這種點線圖代表。所以在所有滿足條件的吃糖方法與所有引進分割符號的方法中有一一對應的關係。但在每個空位可以引進或不引進分割符號，也就是說有兩種選擇，故所求之總數爲 $2\times 2\times\cdots\cdots\times 2(n-1\text{次})=2^{n-1}$。

註：若 n 塊巧克力糖全不相同，問題就複雜的多。一個等價的敍述方法是若有 n 個人參加賽跑，按結果排名次（同時抵達終點的，名次相同），試問一共有多少種可能的結果？這個問題可以用遞迴式（recurrence reletion）的方法解決。

§5 重複組合數

任何學過基本排列組合的人都知道若 S 爲含有 n 個元素的集合，而 $0\leq k\leq n$，則從 S 中選取 k 個相異元素一共有 $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

種方法。若是准許重複，情形就不太相同。我們先來看一個簡單的例子：假定$n=3$，$k=2$，$S=\{a,b,c\}$，則從S中選取兩個相異元素共有$\binom{3}{2}=3$ 種方法：即$\{a,b\}$、$\{a,c\}$及$\{b,c\}$。但若允許重複，則顯然還有$\{a,a\}$、$\{b,b\}$和$\{c,c\}$這三種方法，故共有六組解。那麼在一般情形下，一共有多少組解呢？很有趣地是這個問題的答案可以經由巧妙地運用一一對應原理而得到。

定理一：若准許重選，則從n個相異物件中選取k個物件的方法總數爲$C(n+k-1,k)$。

證明：以S表一含n個元素的集合。在不失一般性的假設下，可令$S=\{1,2,\cdots\cdots,n\}$。令$T=\{1,2,\cdots\cdots,n,n+1,\cdots\cdots,n+k-1\}$。以$\mathscr{A}$表所有從$S$中選取$k$個元素（准許重複）的方法的集合，而以$\mathscr{B}$表所有從$T$中選取$k$個元素（不准重複）的方法的集合，則顯然$|\mathscr{B}|=C(n+k-1,k)$，故我們只需證明$|\mathscr{A}|=|\mathscr{B}|$即可，換句話說，我們只要找到一個$\mathscr{A}$與$\mathscr{B}$之間的一一對應就可以了。爲方便計，我們將$\mathscr{A}$中的元素依不遞減的順序排列，也就是說如果$\{i_1,i_2,\cdots\cdots,i_k\}\in\mathscr{A}$，則有$1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\cdots\leq i_k\leq n$。類似地，我們將$\mathscr{B}$中的元素依漸增的順序排列，所以如果$\{j_1,j_2,\cdots\cdots,j_k\}\in\mathscr{B}$，則$1\leq j_1<j_2<\cdots\cdots<j_k\leq n+k-1$。我們定義函數$f:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$如下：$f(\{i_1,i_2,\cdots\cdots,i_k\})=\{i_1,i_2+1,i_3+2,\cdots\cdots,i_k+k-1\}$。若$1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\cdots\leq i_k\leq n$，則$1\leq i_1<i_2+1<i_3+2<\cdots\cdots<i_k+k-1\leq n+k-1$，故$f$的確是由$\mathscr{A}$至$\mathscr{B}$的一個函數。若$\{i_1^1,i_2^1,\cdots\cdots,i_k^1\}\in\mathscr{A}$而$f(\{i_1,i_2,\cdots\cdots,i_k\})=f(\{i_1^1,i_2^1,\cdots\cdots,i_k^1\})$，則$\{i_1,i_2+1,\cdots\cdots,i_k+k-1\}=\{i_1^1,i_2^1+1,\cdots\cdots,i_k^1+k-1\}$，故$\{i_1,i_2,\cdots\cdots,i_k\}=\{i_1^1,i_2^1,\cdots\cdots,i_k^1\}$，即$f$是一對一函數。若$\{j_1,j_2,\cdots\cdots,j_k\}\in\mathscr{B}$，則$1\leq j_1<j_2<\cdots\cdots<j_k\leq n-k+1$，故$1\leq j_1\leq j_2-1\leq\cdots\cdots\leq j_k-k+1\leq n$，即$\{j_1,j_2-1,\cdots\cdots,j_k-k+1\}\in\mathscr{A}$。但顯然地，$f(\{j_1,j_2-1,\cdots\cdots,j_k-k+1\})=\{j_1,j_2,\cdots\cdots,j_k\}$，故$f$爲映成函數所以結論$f$是$\mathscr{A}$與$\mathscr{B}$之間的一個一一對應，從而$|\mathscr{A}|=|\mathscr{B}|=C(n+k-1,k)$。

例六：假定某糕餅店有8種不同的蛋糕，每種至少有12個，試問有多少種不同的方法可以購買一打？

解：用上面的定理取$n=8$，$k=12$，便得總數$C(8+12-1,12)=\binom{19}{12}=50388$。

練習題五：若n粒相同的骰子一起投擲，試問可以出現多少種不同之結果？（當然，每種情況出現的或然率並不相同，但我們不予考慮。）

§6 物件的分配問題

在組合學中，物件的分配問題（distribution of objects）是一個相當基本而重要的問題，它所問的是「有多少種方法可以將n個物件分配到k個空盒內？」這個問題變化很多，答案不但要決定於物件是否相異，盒子是否相同，還要考慮其他可能的條件（例如每個盒子至少得放一個物件等等）。我們若用在§5中所得到的重複組合數公式，可以立刻得到下面這個定理。

定理二：將n個相同物品分到k個相異盒子中的方法總數爲$C(n+k-1,n)$。

證明：先將盒子編號，再將每個物品用它

所屬之盒子的號碼加以編號，則可以看出每種分配的方法相當於從 k 個盒子中，每次取一個，准許重複，共取 n 次，故由定理一得所求之總數爲 $C(k+n-1, n)$，亦即 $C(n+k-1, n)$。

例七：假定 7 顆相同的糖菓分給三兄弟，試問有多少種分法？又若最小的弟弟至少要得一顆，則有幾種分法？

解：用定理二，取 $n=7$，$k=3$，便得總數 $C(7+3-1, 7)=\binom{9}{7}=36$。若最小的弟弟至少要得一顆，只須先給他一顆（因糖菓全相同，故只有一種方法），再分配其他 6 顆。取 $n=6$，$k=3$，便得總數 $C(6+3-1, 6)=\binom{8}{6}=28$。

練習題六：將 n 個相同物品分到 k 個相異盒子中，若每個盒子必須至少裝 a 個物品（$ak \leq n$），試證一共有 $C(n-ak+k-1, k-1)$ 種方法。

§7 方程式 $X_1+X_2+\cdots\cdots+X_R=n$ 之

方程式 $x_1+x_2+x_3=4$ 有多少組非負整數解？例如 $(4,0,0)$，$(2,1,1)$ 及 $(1,1,2)$ 是三組不同的解。稍爲算一下，可以得到 15 組解。那麼一般情形如何呢？這個問題的答案可以用定理二立刻得到。

定理三：方程式 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_k=n$ 之非負整數解之總數爲 $C(n+k-1, n)$。

證明：因爲每一組非負整數解相當於將 n 個全同的 1 放到 k 個不同的盒子（位置）中的一種分配方法，故由一一對應原理及定理二，得知總數爲 $C(n+k-1, n)$。

系一：方程式 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_k=n$ 之正整數解之總數爲 $C(n-1, k-1)$。

證明：因要求對 $i=1, 2, \cdots\cdots, k$，$x_i \geq 1$，故相當於在每個位置先放一個 1，再分配其他的 $n-k$ 個 1。故總數爲 $C(n-k+k-1, n-k)=C(n-1, n-k)=C(n-1, k-1)$。

假定每個 x_i 均有一個下界的限制，換言之，若要求 $x_1 \geq a_i$，$i=1, 2, \cdots\cdots, k$，那麼求解之總數只需要用一個簡單的代換 $y_i=x_i-a_i$ 再用定理三即可。

練習題七：在方程式 $x+y+z=24$ 的正整數解中有多少組滿足 $x \geq 2$，$y \geq 3$ 及 $z \geq 4$ 的條件？

註：如果每個 x_i 有上界的限制，換言之，若要求 $x_i \leq b_i$，或者更一般地要求 $a_i \leq x_i \leq b_i$，$i=1, 2, \cdots\cdots, k$，那麼求整數解之總數需要用到所謂的容斥原理（The principle of Inclusion and Exclusion）或者生成函數（Generating Function）。有興趣的讀者可以參閱夏宗滙教授的「組合學中的生成函數」一文（本刊第一卷，第三期，pp. 51—58）

§8 在條件限制下的組合總數

從 $\{a, b, c, d\}$ 這個集合中在准許重複的假定下，要選取 24 個元素，但 a 與 b 必須出現偶數次，而 c 與 d 必須出現奇數次，試問一共有多少種方法？諸如此類的問題在組合學中比比皆是。一般而言，要用生成函數才能找到答案。但在某些例子，若巧妙地應用一一對應原理，可以很快地找到答案。我們最後來看看兩個這樣的例子，其中第一題是 1956 年

Willicm Lowell Putnam 數學競賽中的一條試題我們把它敍述成一條定理。

定理四：從 $\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ 中選出了相異的數，但不准包含任何相隣兩數，共有 $C(n-k+1, k)$ 種方法。（請和§5定理一之公式相比較）

證明：令 $S=\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$。假定 $a_1<a_2<\cdots\cdots<a_k$ 係 S 中滿足條件的 k 個數，則有 $a_1\geq 1$，$a_k\leq n$ 且 $a_{i+1}-a_i\geq 2$，$i=1, 2, \cdots\cdots, k-1$。考慮 $b_i=a_i-i+1$，$i=1, 2, \cdots\cdots, k$，則 $b_1=a_1\geq 1$，$b_k=a_k-k+1\leq n-k+1$，且 $b_{i+1}-b_i=(a_{i+1}-i)-(a_i-i+1)=a_{i+1}-a_i-1\geq 1$，$i=1, 2, \cdots\cdots, k-1$，故得 $1\leq b_1<b_2<\cdots\cdots<b_k\leq n-k+1$。換言之，$b_1, b_2, \cdots\cdots, b_k$ 爲 $\{1, 2, \cdots\cdots, n-k+1\}$ 中 k 個相異的數。反之，若 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_k$ 爲 $\{1, 2, \cdots\cdots, n-k+1\}$ 中 k 個相異的數，則極易驗證 $a_i=b_i+i-1$ 爲 S 中滿足所述條件的 k 個數。又函數 $f(a_i)=a_i-i+1$ 顯然爲一對一（參看定理一之證明），故在所有 S 中滿足所述條件之 k 個數與所有 $\{1, 2, \cdots\cdots, n-k+1\}$ 中相異的 k 個數之間有一一對應的關係存在。所以所求選取方法之總數爲 $C(n-k+1, k)$。

我們最後一個例子的證明可以稱得上「精彩」

例八：一個袋中裝有 n 個沒有區别的黑球和 n 個沒有區别的白球。今從袋中逐一取出所有的球，試問在取球過程中至少有一次留在袋裡的白球比黑球多的取球方法一共有幾種？

解：以 A 表所有滿足所述條件的取球方法之集合，又以 B 表所有從一裝有 $n+1$ 個黑球及 $n-1$ 個白球的袋中逐一取球之方法之集合。對於 A（或 B）中之任一元素，必然在某個第 $2k+1$ 次取球後，取出之黑球總數第一次超過取出之白球總數。今將第 $2k+2$ 次及以後所有取出之球之顏色由黑塗白，由白塗黑，則得到 B（或 A）中之一元素。這種對應的方法顯然是一對一且映成，於是 $|A|=|B|=C(2n, n+1)$。

上面我們概略地介紹了一些一一對應原理在組合學上應用的例子。類似的例子和問題相當多，可以說是不勝枚擧。只要多看，多作，慢慢就可以融會貫通，當然，要能夠熟練、巧妙地運用這個原理有時還需要一點「靈感」，但這也正是數學可愛及引人入勝的地方，有興趣的讀者不妨唸唸下面的參考資料中所列的幾本書。

參考資料

1. K.P. Bogrt, Introductory Combinatorics, Pitman.
2. R.A. Brualdi, Introductory Combinatorics, North-Holland.
3. D.I.A. Cohen, Basic Techniques in Combinatorial Theory, John Wiley & Sons.
4. R.P. Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathemetics, Addison-Wesley.
5. F.S. Roberts, Applied Combinatorics, Prentic-Hall.
6. A. Tucker, Applied Combinatorics, John Wiley & Sons.

——本文作者任教於加拿大Wilfrid Laurier大學數學系——