組合專題

從農夫到數學家

康明昌

一、Steiner的生平

Jakob Steiner（斯坦納，1796 ～ 1863）的父親是瑞士鄉下的農夫，家裏同時還經營一家小店。小Steiner沒有受過多少正規教育，他到十四歲才會寫字。Steiner從小就要下田耕種，並且幫忙照料小店的生意。

1814 年十八歲的Steiner抑制不了強烈的求知慾望，終於違抗父親的意願，離家到Pestalozzi 創辦的學校，在那裏當學生，也當Pestalozzi 的助手。

著名的教育家Johann Heinrich Pestalozzi（1746～1827）於1805年在瑞士的Yverdon 創辦一所學校。他認爲，正確的思考習慣來自日常生活對實物的正確觀察，只有和具體的事物相互聯繫，言語與概念才

有意義。因此，美術、音樂、寫字、集體誦書、遠足、素描、地圖繪製、採集標本，成爲這所學校的基本課程。Pestalozzi 主張分段教學、能力分組，並且容許個別學生之間的差異。歐洲許多知名人士陸續來這裏參觀，Pestalozzi 的學校在很短的時間內就贏得極高的名譽（註一）。

Steiner 在 Pestalozzi 的學校接受初步的數學教育。日後他把他的高度的直觀能力歸功於這裏的訓練。Pestalozzi 認爲，任何知識的獲得應該由學生自己去發掘、尋找和追求，教師的責任只是在學生進行獨立思考時予以適當的導引而已。Steiner在 1826 年的一封信說：「Pestalozzi 的學校把數學定理看做獨立思考的產物，這使得我甚至在學生時代就證明許多有原創性的定理。」（註二）

1818 年秋天，由於財務困難，Pestalozzi的學校只好宣告關閉。Steiner因此來到海德堡繼續他的求知生涯。他在海德堡以擔任家庭教師維生，同時在海德堡大學修習許多數學課程，如：組合數學、代數、微積分、力學。

1821年復活節 Steiner 終於來到柏林——當時德意志新興的政治與文化中心。在這裏他認識年輕的數學家Niels H. Abel（1802～1829）與C. G. J. Jacobi（1804～1851），同時也認識August L. Crelle（1780～1855）。

Crelle 是普魯士第一條鐵路的建造者，他對數學具有濃厚的興趣。在德意志統一運動的洪流下，許多德國人把法國大革命當做他們的老師。例如，1810 年成立的柏林大學就是以法國大革命時期創立的巴黎工藝學校爲模型（註三）。當時法國的數學期刊，除了巴黎科學院出版的「Comptes Rendus」之外，就算J. Gergonne 私人創辦的「Annales de Mathématiques Pures et Appliqués」（1810～1832）最有名了。Crelle想在德國也創辦一份像Gergonne那樣的雜誌。

1826年，由於Abel、Steiner與Jacobi 的支持，Crelle的雜誌「Journal für reine und angewandte Mathematik」出版。Gergonne 的雜誌只有 22 年的壽命，Crelle的雜誌到今天仍然繼續出版，是當代第一流數學期刊之一（註四）。Crelle 雜誌的出刊把一股清新的潮流注入德國數學界，Steiner便是這股潮流的領導人物之一。

由於Steiner在幾何的卓越成就，Königsberg 大學在 1833 年頒給他榮譽博士學位，1834 年被選入柏林科學院，同一年成爲柏林大學教授。Dirichlet，Jacobi 和 Steiner在柏林大學任教使得柏林大學成爲當時數學研究的重鎭之一（註五）。

Steiner一生沒有結婚。1863 年去世的時候遺留下約九萬瑞士法郎的財產，他把其中三分之一贈給柏林科學院作爲「Steiner獎」的基金。第一屆的Steiner 獎在 1868年頒給 L. Cremona 與R. Sturm。

二、Steiner的數學貢獻

十九世紀是幾何學英雄輩出的時代（註六）。研究射影幾何的學者壁壘分明的分成兩大陣營，綜合幾何（pure geometry，或 synthetic geometry）與解析幾何（analytic geometry）。在法國，射影幾何的創建者Poncelet 擁護綜合幾何，Gergonne則推崇解析幾何。在德國，Steiner是綜合幾何的領導者，Plücker在解析幾何有許多創見，而Möbius 卻依違於兩者之間（註七）。英國的Cayley 與Sylvester是很明顯的解析幾何學家，稍晚一點的 von Staudt（德國）與Chasles （法國）是綜合幾何學家。

Steiner認爲學習幾何的方法是「全神貫注的思考」，他不認爲在黑板上畫個圖有助幾

何直觀，當然，他更不會使用幾何模型（註八）。他說，幾何激發思考，而計算只會摧毀思考。Steiner教書時，總是向學生提出各種問題，引導他們進行思考，這種方法使他的教學極為成功。

在數學研究方面，他主張要尋找一些簡單的原則來組織當時紛冗複雜的各種幾何定理。Steiner的原則，用今天的術語來說，就是，射影變換、對偶原理和保角變換。Steiner從一些簡單而直觀的幾何性質出發，經過適當的幾何變換，得到複雜而漂亮的幾何定理。以下我們列舉幾個 Steiner 的結果。

(1)如圖1，任給三角形ABC，Steiner可以作三個圓，使其互相外切，並使每個圓與三角形的兩邊相切。將以上結果推廣，把三角形的三邊改成三個圓，結果仍然成立（如圖2）。

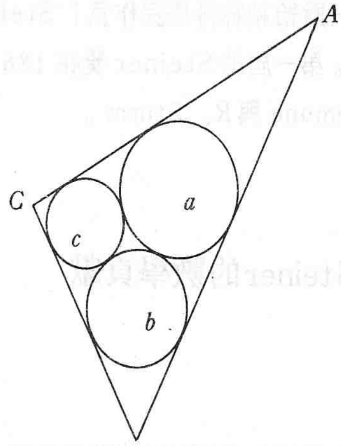

圖1

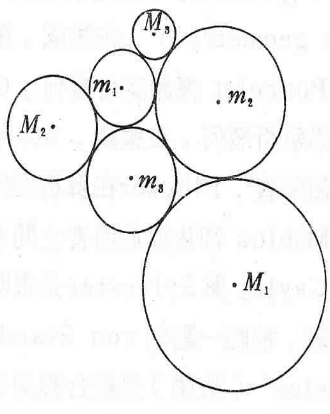

圖2

(2)極值問題。給定△ABC，若其三個內角都不大於 $\frac{2\pi}{3}$，求點 P 使得 $PA+PB+PC$ 為最小（請看「參考資料 13」）。他還解決等周問題，在具有共同周長的平面封閉區域，求面積最大的區域；他並沒有證明最大面積區域的存在性。

(3) 1853年Steiner 研究平面四次曲線的雙重切線時，遇到了「Steiner 三元系」的存在問題。有關平面四次曲線的雙重切線，請看本文附錄1；有關Steiner三元系與Mathieu群，請看「參考資料 13 」與本文附錄 2 。

(4)平滑的三次曲面恰有27 條直線，這是英國數學家Arthur Cayley（1821～1895）在1849年發現的。Steiner用綜合幾何的方法也可以證明這件事，他甚至可以證明任一條直線恰與其他直線中的10 條直線相交。可是Steiner卻故意不提Cayley的名字，他似乎有意要讓別人以為他是第一個發見三次曲面特殊幾何性質的人（1856）。有關三次曲面請看「參考資料7，第485頁」或本文附錄 1 。

(5) Steiner利用平面上線束的概念（pencils of lines）重新定義圓錐曲線。這種方法及其推廣就是我們現在叫做Steiner construction 的方法（見「參考資料7，第528頁」）。利用這種方法研究三次與四次曲面，Steiner在 1844 年造出一種特殊的四次曲面，這就是我們現在叫做Steiner surface 的一種（見「參考資料7，第629頁」）。

附錄1：三次曲面與四次曲線

若 P 與 Q 是曲線 C 的相異兩點，L是通過 P 和 Q 的直線，如果 L 在 P 點與 Q 點都和 C 相切並且除了 P，Q之外不再和 C 相切，則 L 叫做 C 的二重切線（bitangent）。平滑的二次

或三次曲線不會有二重切線。利用對偶原理，曲線C的二重切線對應於其對偶曲線（dual curve）的正則二重點（ordinary double point）。

利用Plücker公式，不難證明：平滑的平面四次曲線恰有 28 條雙重切線或超拐線（hyperflex）。（請看「參考資料7,第281頁。）這 28 條特殊直線又可從以下三次曲面的投影得到。

在複射影平面取六個點，並令這六個點不在一個二次曲線，且任三點不共線。把複射影平面在此六點吹脹（blow up），得到三次曲面及其 27 條直線。

如果把三次曲面適當的投影在複射影平面，這種投影的分歧曲線（branched locus）恰爲平面上的四次曲線。而三次曲面上這27條直線與投影點的切平面正好投射到 28 條雙重切線與超拐線。請看「參考資料7，第 549 頁」。

三次曲面與四次曲線的各種幾何性質，請看「參考資料7」，這是用近世代數幾何的手法處理的。比較舊一點的處理方法，請看Dickson 在「參考資料1，第 19 章」寫的部分。

三次曲面的 27 條直線中，任一直線與其他 10 條直線相交（也就是，選定兩條相交直線，恰有一直線與這兩直線相交），因此形成 $45\left(=\frac{5.27}{3}\right)$個三角形。法國數學家Camille Jordan（1838～1922）在 1870 年考慮這 27 條直線的對稱群。令G是把這27條直線對應到其本身且把這 45 個三角形也對應到其本身的變換群。G可以看做對稱群S_{27}的子群。Jordan計算出G恰有 51,840 個元素；並且G與交錯群A_{27}的交集有 25,920 個元素，這個交集是個有限單群，並且與$PS_{P_4}(F_3)$同構。請看「參考資料5，第 14 章」。

附錄2：Mathieu 群與 Steiner 系

在早期置換群的研究，A. L. Cauchy（1789～1857）強調多重可遷群（multiply transitive group）的重要性。由於Cauchy 的影響，法國數學家Émile L. Mathieu（1835～1890）發現 5 個新的多重可遷群，這些群既不是對稱群S_n，也不是交錯群A_n，它們就是我們現在叫做Mathieu 群的M_{11}，M_{12}，M_{22}，M_{23}，M_{24}，它們是最早被找到的離散單群（註九）。

M_{11}是由兩個置換（1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11）與（5，6，4，10）（11，8，3，7）生成的置換群。M_{12}是由M_{11}與另一個置換（1，12）（2，11）（3，6）（4，8）（5，9）（7，10）生成的。M_{23} 也是由兩個置換（1，2，3，…，22，23）與（3，17，10，7，9）（5，4，13，14，19）（11，12，23，8，18）（21，16，15，20，22）生成。M_{24}由M_{23}與另一個置換（1，24）（2，23）（3，12）（4，16）（5，18）（6，10）（7，20）（8，14）（9，21）（11，17）（13，22）（19，15）生成。M_{22} 由三個置換（1，2，…，10，11）（12，13，…，21，22），（1，4，5，9，3）（2，8，10，7，6）（12，15，16，20，14）（13，19，21，18，17）與（11，22）（1，21）（2，10，8，6）（12，14，16，20）（4，17，3，13）（5，19，9，18）生成。

Mathieu在 1861 年造出M_{11}，M_{12}，M_{22}，M_{23}，並且聲稱M_{24} 的存在性。但是直到 1873年他才造出M_{24}。以下是這些群的基本性質：

群	可遷性	秩（order）
M_{11}	4重	8・9・10・11
M_{12}	5重	8・9・10・11・12
M_{22}	3重	48・20・21・22
M_{23}	4重	48・20・21・22・23
M_{24}	5重	48・20・21・22・23・24

美國數學家F. N. Cole（1861～1926）在1894年注意到M_{11}是單群，G. A. Miller（1863～1951）在1900年證明其他四個Mathieu群也是單群（註十）。事實上M_{21}與PSL_3（F_4）同構；M_{21}的秩與A_8一樣都是20,160，但是兩者並不同構。從有限單群的分類可知，四重可遷單群除了交錯群A_n（$n\geq 6$）之外，就只有M_{11}，M_{12}，M_{23}，M_{24}；因此，六重置換只能是對稱群S_n（$n\geq 6$）或交錯群A_n（$n\geq 8$）。（請看「參考資料4與6」。）

1938年德國數學家E. Witt發現一種造可遷群的方法（transitive extension），同時他還發現Mathieu群與Steiner系的關係（見「參考資料11，12，8與3」）。

令V是具有v個元素的集合。$S(s,k,v)$叫做V上的（廣義）Steiner三元系，如果$S(s,k,v)$是$\binom{v}{s}/\binom{k}{s}$個$V$的$k$－子集，並且對於$V$中任意$s$個相異元素，恰好有一個$S(s,k,v)$的$k$－子集包含它們。（請比較「參考資料13」中的Steiner三元系。）

Witt發現，只有一種$S(4,7,23)$與$S(5,8,24)$的設計，他也能設計$S(4,5,11)$，$S(5,6,12)$與$S(3,6,22)$。並且這些設計的對稱群恰好與Mathieu群有密切關係，也就是$Aut(S(4,5,11))=M_{11}$，$Aut(S(5,6,12))=M_{12}$，$Aut(S(4,7,23))=M_{23}$，$Aut(S(5,8,24))=M_{24}$，$Aut(S(3,6,22))=Aut(M_{22})$。

註 釋

註一：第一個創辦幼稚園的德國教育家Friedrich W. A. Fröbel（福祿貝爾，1782～1852）也曾到Pestalozzi的學校觀摩。普魯士哲學家Johann G. Fichte（費希特，1762～1814）甚至認爲，只有嚴格遵循Pestalozzi教育原則的國民教育才能使德意志復興。

註二：Felix Klein並不相信這套現身說法（見「參考資料9」）。可是要注意，Klein對Steiner不會有好感，因爲Steiner是Plücker的死對頭，而Plücker是Klein的老師。

註三：關於巴黎工藝學校，請參考：高木貞治，「近世數學史談」。「參考資料14」有簡略的描述。

註四：有趣的是，由於Gergonne雜誌的停刊，1836年法國數學家Liouville反過來模仿Crelle，創辦「Journal des Mathématique Pures et Appliquées」。

註五：此後柏林大學的著名數學家還有，Weierstrass、Kummer、Kronecker和Frobenius。

註六：請參考「參考資料2」。

註七：Steiner的支持者甚至說，Steiner是自Appolonius以後最偉大的幾何學家。據說，Steiner曾向Crelle表示，如果Crelle雜誌繼續刊登Plücker的論文，Steiner就不再支持這份雜誌。可能是這個原因使得Plücker的幾何研究中斷十七年之久，轉而研究實驗物理，直到Steiner死後，Plücker才又重操舊業。對於綜合幾何，Klein有一段極精闢的見解，請看「參考資料9，第105頁，第二段」。

註八：「參考資料2」說，Steiner上課時故意把教室弄得一片漆黑，使學生不得不在自己的腦海裏重塑各種幾何圖形，而培養其直觀能力。「參考資料9」則把這種極端的作法歸於另一個人。

註九：Mathieu在十八個月內完成巴黎工藝學院的課程。他的博士論文是可遷群的研究。但是不久他就轉而研究數學物理。數學物理在Poisson與Cauchy 的時代曾經非常流行，但是從1860年前後在法國已不太熱門了。

註十：Cole是Felix Klein的學生，他曾列舉秩為6,000 以下的單群。Miller受Cole 很深的影響，他曾在巴黎聽過Jordan的課。

參考資料

1. H. F. Blichfeldt, G. A. Miller and L. E. Dickson, " *Theory and applications of finite groups* ", G. E. Stechert & Co., 1938, New York.
2. C. B. Boyer, " *A history of mathematics* ", John Wiley & Sons, 1968, New York.
3. P. J. Cameron, " *Parallelisms of Complete designs*, " London Mathematical Society Lecture Note Series 23, Cambridge University Press, 1976, Combridge.
4. P. J. Cameron, Finite permutation groups and finite simple groups, *Bull. London Math. Soc.* 13 (1981) 1～22.
5. L. E. Dickson, " *Linear groups* ", Teubner, 1901, Leipzig.
6. D. Gorenstein, " *Finite simple groups* ", Plenum Press, 1982, New York.
7. P. Griffiths and J. Harris, " *Principles of algebraic geometry* ", John Wiley & Sons, 1978, New York.
8. B. Huppert and N. Blackburn, " *Finite groups, vol.3* ", Springer-Verlag, 1982, Berlin.
9. F. Klein, " *Development of mathematics in the 19th century* ",「凡異出版社」翻印本。
10. R. Silvestri, Simple groups of finite order in the nineteenth century, *Arch. History Exact Sci.* 20 (1979) 313～356.
11. E. Witt, Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu, *Abh. Math. Sem Uniu. Hamburg* 12 (1938) 256～264.
12. E. Witt, Über Steinersche Systeme, *Abh. Math. Sem Univ. Hamburg* 12 (1938) 265～275.
13. 黃光明，斯坦納二重奏：斯坦納系和斯坦納樹，「數學傳播季刊」10卷1期，1986，第2頁～第8頁。
14. 康明昌，介紹兩本數學史，「數學傳播季刊」7卷2期，1983，第62～72頁。

—本文作者任教於國立台灣大學數學系—