

可減的魔術三角形

王湘君

傳統的魔術三角形是一群數，排列成三角形，使得每一邊的和都相等。圖 1 就是這樣的一個例子。

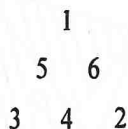


圖 1 每邊的和為 9

我們把 1, 2, 3, 4, 5 和 6，重新排在三角形的三邊上，使得每邊較大兩數的和減去最小的數，其差為定值。這是另一種形式的魔術三角形，稱為可減魔術三角形。圖 2 是兩個例子，更高階次的可減魔術三角形，可以同樣的方法做出。



$$\begin{aligned} d &= (5 + 3) - 1 & d &= (6 + 3) - 1 \\ &= (6 + 3) - 2 & &= (6 + 4) - 2 \\ &= (5 + 4) - 2 & &= (5 + 4) - 1 \\ &= 7 & &= 8 \end{aligned}$$

圖 2

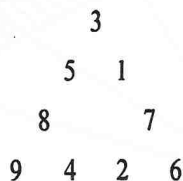
現在討論階次 $K \geq 3$ 的可減魔術三角形，我們從每邊的 K 個數中，可得兩個部分和，令 l 表較大的和，

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{若 } K \text{ 為奇數，則 } l \text{ 是 } \frac{K+1}{2} \text{ 個數的和} \\ \text{若 } K \text{ 為偶數，則 } l \text{ 是 } \frac{K}{2} \text{ 個數的和} \end{array} \right.$$

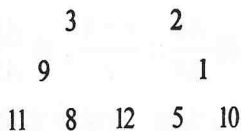
S 表較小的和。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{若 } K \text{ 是奇數，則 } S \text{ 是 } \frac{K-1}{2} \text{ 個數的和} \\ \text{若 } K \text{ 為偶數，則 } S \text{ 是 } \frac{K}{2} \text{ 個數的和} \end{array} \right.$$

令 d 表 l 與 S 的差，三邊都有相同的 d ，圖 3 列出 4 階及 5 階的兩個可減魔術三角形。



$$\begin{aligned} d &= (9 + 8) - (5 + 3) \\ &= (6 + 7) - (3 + 1) \\ &= (9 + 6) - (4 + 2) = 9 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} d &= (11 + 9 + 7) - (4 + 3) \\ &= (10 + 7 + 6) - (2 + 1) \\ &= (12 + 11 + 10) - (8 + 5) \\ &= 20 \end{aligned}$$

圖 3

這種觀點下的魔術三角形會引起一些問題來。

1. 除了上面列舉的可減魔術三角形外，是否

還有其他的？

2. 對每一個自然數 n 而言，是否可由前 $3n$ 個自然數做成可減魔術三角形？($n \geq 2$)
3. 把每一邊的每一元素增加一個定數 m ，那麼這個可減魔術三角形是否仍保持魔術性？
4. 又每一元素乘上一個定數 k ，其結果如何？(必須考慮這定數是正或負)
5. 在上面 3 和 4 問中，魔術差是多少？
6. 假設階次已知，那麼魔術差最大是多少？最小是多少？
7. 算術數列是否可以排成可減魔術三角形？

下面是這些問題的簡答：

1. 有。下面是另兩個可減魔術三角形

$$\begin{array}{cccc}
 & & & 7 \\
 & & & 4 \quad 9 \\
 & 6 & & 2 \quad 8 \\
 4 & 2 & & 6 \quad 5 \quad 1 \quad 3 \\
 5 & 1 & 3 & \\
 \end{array}$$

$d = 7$ $d = 7$

2. 當 $2 \leq n \leq 6$ 時，可以。但當 $n > 6$ 時，尚未確定。

3 階、4 階的可減魔術三角形，前面已列出，下面是 5 階、6 階和 7 階的魔術三角形。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 12 \\
 & & & & & & 2 \quad 9 \\
 & & & & & & 3 \quad 10 \\
 & & & & & & 5 \quad 11 \\
 & & & & & & 4 \quad 6 \quad 7 \quad 1 \quad 8 \\
 \end{array}$$

$d = 16$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 12 \\
 & & & & & & 2 \quad 13 \\
 & & & & & & 5 \quad 6 \\
 & & & & & & 10 \quad 14 \\
 & & & & & & 4 \quad 3 \\
 & & & & & & 8 \quad 9 \quad 7 \quad 1 \quad 15 \quad 11 \\
 \end{array}$$

$d = 19$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 13 \\
 & & & & & & 2 \quad 10 \\
 & & & & & & 3 \quad 16 \\
 & & & & & & 17 \quad 14 \\
 & & & & & & 4 \quad 15 \\
 & & & & & & 6 \quad 5 \\
 & & & & & & 7 \quad 8 \quad 12 \quad 1 \quad 18 \quad 11 \quad 9 \\
 \end{array}$$

$d = 34$

3. 是的。
4. 假如是偶階的，答案是肯定的。假如定數 k 是正的，那麼奇階可減魔術三角形仍保持魔術差的特性。
5. 假定我們討論的魔術三角形的階次為 n ，則

(a) 假如加一個定數 m ，那麼魔術差變為 $d + m$ 。

(b) 假如 n 為偶數或 n 為奇數但 K 是正的，則乘上 K 以後，魔術差變為 $d |K|$ 。若乘一個負數到奇階可減魔術三角形的每一元素，此時，這三角形可能不成為魔術三角形了。

6. 假設 n 是魔術三角形的階次，則

$$\frac{n^2}{4} \leq d \leq \frac{n}{4} (5n - 6) \quad \text{當 } n \text{ 為偶數}$$

及

$$\frac{(n+1)^2}{4} \leq d \leq \frac{5}{4} (n^2 - 1) \quad \text{當 } n \text{ 為奇數}$$

上二式左右兩邊的數，只是 d 的上、下限，並非最大下限與最小上限。

7. 可以。

(本文譯自：Sunday A. Ajose : Subtractive Magic Traiangles *Math. Teacher*, May 1983 , PP.346 ~ 347)