

7103 級數問題 (周雲雄提供)

1. 證明對任意正整數 a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n k^a \right) / n^{a+1} = \frac{1}{a+1} \dots\dots\dots(1)$$

2. 更進一步，證明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^n k^a - \frac{n^{a+1}}{a+1} \right)}{n^a} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

(註：不訪先驗證 $a = 1, 2$ ，及 3 的情況)

3. (假使你懂微積分) 根據積分法則 (*integral test*)，易見(1)對任意正數 $a > 0$ 成立，證明(2)式對任意正數 $a > 1$ 亦成立。