5201 解一（香港大學劉奇偉與黃毅英共同解答）

由於 $\sum_{K=1}^{\infty} a_K^2 < \infty$，有正數$M$使得 $|a_K| \leq M$，故

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{K=1}^{[\sqrt{n}]} a_K \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{K=1}^{[\sqrt{n}]} |a_K| \leq \frac{M[\sqrt{n}]}{n} \longrightarrow 0 \text{，當 } n \to \infty$$

此處[x]表小於 x 之最大整數。再者由科西準則（Cauchy cntenion）

$$\sum_{K=[\sqrt{n}]+1}^{n^2} a_K^2 \to 0 \qquad \text{當 } n \to \infty$$

故有，

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{K=1}^{n^2} a_K \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{K=1}^{[\sqrt{n}]} a_K + \sum_{K=[\sqrt{n}]+1}^{n^2} a_K \right|$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{K=1}^{[\sqrt{n}]} |a_K| + \frac{1}{n} \sum_{K=[\sqrt{n}]+1}^{n^2} a_K |$$

$$\leq \frac{M[\sqrt{n}]}{n} + \left(\sqrt{\sum_{K=[\sqrt{n}]+1}^{n^2} |a_K^2|} \right) \left(\frac{1}{n} \sqrt{\sum_{K=[\sqrt{n}]+1}^{n^2}} \right.$$

（科兩不等式）

$$\leq \frac{M[\sqrt{n}]}{n} + \sqrt{\sum_{K=[\sqrt{n}]+1}^{n^2}}$$

$$\to 0 \qquad \text{當 } n \to \infty$$

證畢。