

# 教與學

## 談數學測驗

王湘君 師大附中

目前各中學測驗很多，幾乎每天都有測驗，其意似謂：「以測驗代替練習作業」，這些測驗對學生的學習是否有幫助？其實，測驗過多，不但沒有益處，反而害處不淺，原因是一——學生每天只為應付考試，沒有想到真正學習數學的事情——必須徹悟原理。學生為了應付考試，不得不硬記一大堆題目及解答，根本沒時間去思考，確實把自己潛在的能力發揮出來。所以，經常測驗，只會令學生疲勞，思考遲鈍。同時，校內的測驗，大都是定型的題目，在市售的參考書上都找得到。命題老師未曾下工夫去經心設計，只是拿本參考書東抄一題，西抄一題，學生只要背背參考書上的解答，便能應付考試。長此下去，學生只學會了投機取巧，答題成了機械反應，如果遇到未曾見過的，就會產生害怕心理，因此，很多學生對數學失去了興趣，甚至放棄數學。還有一些老師，專找外國入學試題，把解法「精彩巧妙」的題目抄下來考學生，不但學生不會作答，甚至也難倒其他老師，這位命題先生，會沾沾自喜，以為高人一等，他可以藉機大大表演一下「玄妙」的解題絕招，學生聽得不知其然，更不知其所以然，引致學生對他盲目的崇拜，成為補習班和家長競相爭取的名師。其實，只要基本原理和方法理解清楚，任何一道題，都能平淡無奇地解出。

命題工作誠然不是一件易事。台大黃武雄教授，曾在中央日報上發表一篇「高中數學的測驗問題」。他說：「能夠使讀好書的學生考好試，考好試的學生讀好書，這樣的測驗才是健全的測驗。」鼓勵「大器晚成」的踏實作法，不要在高一時，就讓學生做到了綜合性的難題，以致打亂了學生學習的陣腳。目前校內數學測驗的通病是模仿聯考試題之難度，廣度，深度。數學試題要達到理想的要求，必須達到「數學教育」的重要目的，即在測出學生的三種能力。第一是「一般演算」，第二是「問題

分析」，第三是「組織能力」。希望校內的測驗，能配合學生的學習和程度，着重於評量學生對課程的了解和督促他們的學習。學校應是一個堡壘，保護學生不要太早受到聯考的壓力，讓他們能夠循着正常的方法學習數學。

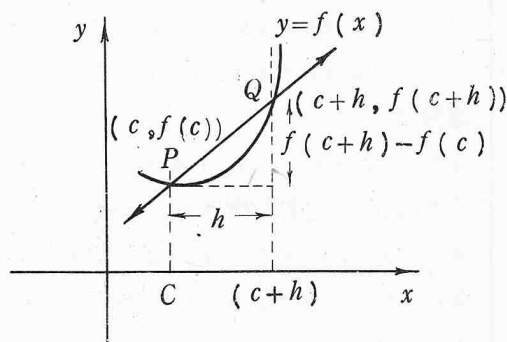
本校（師大附中）自六十七學年度起，試辦科學教育實驗班至今，於高一新生中，甄選科學資賦優異的同學編為實驗班。在數學及自然學科的教學方面，加強思考、推理、創造等能力的訓練，並培養研究科學的方法、態度和興趣，以為國家社會科技人才的培育作奠基的工作。第一次甄選是由新生自由報名，甄試的項目是科學性向測驗（本校自編）並配合他們入學考試的英數兩科成績以及智力測驗，選出較優的同學編成兩班。高一結束後，由於經過了一年教學活動之試探，在升入高二之前，實驗班學生應予調整，凡缺乏長期從事科學研究之興趣、性向、耐力或有志於從事其他方面發展之學生應予轉出，其所遺缺額另行甄選其他班級具有科學研究興趣及潛力之學生遞補之。於是舉行第二次甄選，原實驗班的同學除自願轉出者外，均須參加甄試，其他班級學生數學資賦特優（由任課教師推薦），或數學成績為全班前三名，均可報名參加甄試，甄試項目是：數學及自然學科（生物）能力測驗。

下面是本校科學實驗班第二次甄試數學試題，其特徵是「閱讀測驗」。閱讀測驗有一系列的問題，可以一步步引導學生閱讀與思想，可以測驗學生整體的能力，可以測驗學生讀書的態度，減少學生偏用記憶的習慣，可以考出學生的「程度」，而不是單純的「反應」或「記憶」。此次測驗的結果，發現原實驗班的同學，考的比其他班的好。顯示一年來數學教學，引導同學主動學習，主動探索，加

強思考，推理，創造等能力訓練的成效。另外發現一些平時考得好的學生，這次反而考得很差，可能是他們學習時，只着重於背誦的錯誤方法。茲將此試題提供出來，就教於數學先進，並希望校內測驗也能出現類似的「閱讀測驗」。命題如能不斷地改進！相信學生讀書的態度也會逐漸的糾正。

本測驗分三個題組，每個題組中有若干個問題請你仔細地看清楚每個敘述再作答。並請詳細地列出解題過程，否則不予計分。測驗時間為八十分鐘。

(一)在代數中，我們有極限的概念，比方說，無窮數列  $\langle 1/n \rangle$ ，當  $n$  越大時， $1/n$  與  $0$  無限地接近。(要多麼近，就有多麼近)於是我們說數列  $\langle 1/n \rangle$  的極限是  $0$ 。在幾何中我們也有極限的概念。例如指數函數  $y=2^x$  當  $x$  越小時， $2^x$  也越小。所以圖形向左就越接近  $x$  軸。但  $y=2^x \neq 0$  所以圖形只會無限地逼近  $x$  軸，但不會與  $x$  軸相交，這時  $x$  軸是  $y=2^x$  圖形的一條漸近線。現在我們以極限的概念來定義函數  $y=f(x)$  圖形的切線。說明如下：將函數  $y=f(x)$  圖解， $P$ 、 $Q$  為  $y=f(x)$  圖形上相異兩點  $(f(c+h)-f(c))/h$  ( $y$  對  $x$  的變化率) 表示割線  $\overrightarrow{PQ}$  的斜率，令  $h \rightarrow 0$  表  $Q$  點漸趨近於  $P$  點則割線  $\overrightarrow{PQ}$  漸趨近於過點  $P$  的切線。因此若  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(c+h)-f(c))/h$  存在的話，此極限值就代表過  $P$  點切線的斜率。



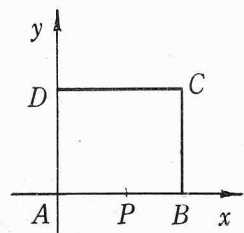
根據以上的敘述，請回答下列的問題。

- (1) 圖形之切線能不能定義為“與圖形僅交於一點的直線”？如果不能請舉反例說明之。
- (2) 根據上文敘述的方法，求函數  $f(x)=x^2+2x-2$  過  $(1, 1)$  點之切線的斜率。

(二)有一邊長為 30 公尺的正方形菜園  $ABCD$ ，農夫以每秒 3 公尺的速度從  $A$  點出發，逆時針的方向

沿著菜園的周圍巡視。現在將正方形  $ABCD$  安放在單位長為 1 公尺的直角座標系上(如圖所示)

若  $t$  秒後農夫的位置在點  $P(x, y)$  則  $P$  點的橫坐標，縱坐標及  $AP$  的長度與  $t$  之間是一種函數關係，分別以  $X(t)$ ， $Y(t)$ ， $d(t)$  表之。例如 10 秒後



農夫的位置在點  $B'$ ，所以  $P$  點的坐標為  $(30, 0)$  即  $X(10)=30$ ， $P(10)=0$ ， $d(10)=30$  請你先以直觀的幾何觀點對  $X(t)$ ， $Y(t)$ ， $d(t)$  之變化作一個認識，然後嘗試用代數的方法求此三個函數。請回答下列的問題。

- (1) 試求  $X(t)$ ， $Y(t)$ ， $d(t)$  及其定義域，值域(提示：以  $X$ ， $Y$  表  $d$ )
- (2)  $X$ ， $Y$ ， $d$  三個函數何者為遞增？遞減？映射  $(1-1)$ ？連續函數？
- (3) 若一函數  $f: A \rightarrow B$  ( $A, B \subset \mathbb{R}$ ) 存在一最小正數  $t$ ，使得  $f(x+t)=f(x)$ ， $\forall x \in A$  則吾人稱  $f$  為週期函數其週期為  $t$ 。利用上述的定義判斷  $X$ ， $Y$ ， $d$  何者為週期函數，若是並求其週期。

(三)將自然數排列如下表，則

- (1) 第七列，第四行的數是什麼？
- (2) 若將自然數分組如下：
  - (1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10) ... 第  $n$  組恰有  $n$  個數，試將上述分組方法與右表的排列比較一下，兩者有何類似之處？
- (3) 100 是屬於第幾列？第幾行？
- (4) 第  $m$  列第  $n$  行是什麼數？

1	2	4	7	11	16	22
3	5	8	12	17	23	
6	9	13	18	24		
10	14	19	25			
15	20	26				
21	27					
28						