

# 菲爾茲獎第二位女性得主 ——烏克蘭數學家維亞佐夫斯卡

邵紅能

數學是一門古老而又現代的系統學科。2022年7月5日，2022年菲爾茲獎在芬蘭首都赫爾辛基舉行的國際數學聯盟(IMU)頒獎典禮上揭曉。來自法國、美國、英國和烏克蘭的4位年輕數學家獲頒殊榮，他們的研究涵蓋了質數和8維球體等領域。其中，烏克蘭數學家維亞佐夫斯卡(Viazovska)時年37歲，表彰其證明E8格在8維中提供了相同球體的最密集堆積法，並對傅立葉分析中的相關極值問題和插值問題作出了進一步貢獻。其他三位獲獎者分別是英國牛津大學數字理論家詹姆斯·梅納德、美國普林斯頓大學組合數學專家許竣珥和位於巴黎附近的先進科學研究所研究統計物理學的專家雨果·迪米尼-科潘。維亞佐夫斯卡成爲第二位獲得菲爾茲獎的女性數學家(第一位是米爾紮哈尼)。2014年，37歲的伊朗數學家瑪麗亞姆·米爾紮哈尼獲得菲爾茲獎，成爲歷史上首位獲此殊榮的女性。2022年7月，維亞佐夫斯卡被任命爲克雷數學研究所高級學者。

瑪麗娜·維亞佐夫斯卡(Maryna Viazovska)，烏克蘭數學家，現爲瑞士洛桑聯邦理工學院教授、數論系主任，其主要研究方向是組合幾何。2013年，她獲得波恩大學馬普數學研究所的博士學位，導師是著名數學家唐·查吉爾教授。維亞佐夫斯卡於2016年解決了維度8中的球堆積問題，並與其他人合作解決了維度24中的球體堆積問題。她曾榮獲賽勒姆獎、克雷研究獎、拉馬努金獎、數學新視野獎、薩特獎、費馬獎、拉西斯國家獎等國際大獎。特別地，維亞佐夫斯卡是2018國際數學家大會特邀發言人，2022世界女數學家會議受邀報告人。2022年，她榮獲菲爾茲獎！菲爾茲獎每四年在國際數學家大會上頒發一次，表彰當下以及未來有可能取得傑出數學成就的40歲以下的數學家。

維亞佐夫斯卡最著名的成就是解決了八維空間中的球體堆積問題，她利用數字理論和八維對稱性理論得出的方法來解決這一問題。對於2022年菲爾茲獎四位獲得者，美國數學會當選主席、西北大學數學家布萊娜·克拉說：“所有獲獎者都是實至名歸，他們才華橫溢，展現了全球數學研究領域的勃勃生機。”

## 1、從小酷愛數學，曾兩次國際競賽第一名

維亞佐夫斯卡1984年12月2日出生於烏克蘭基輔。她出生在基輔，三姐妹中排行老

大。她的父親是一名化學家，在安東諾夫飛機製造廠工作，母親是一名工程師。她小時候就讀於基輔一所專門為優秀生開設的中學。在那裡，她遇到一位對她深有影響力的老師安德里·克尼亞祖克，在成為中學教師之前，安德里·克尼亞祖克曾是一名專業的研究型數學家。14歲時，維亞佐夫斯卡因在數學上的優異表現，她被選拔進入基輔一所專門培養自然科學人才的學校基輔自然科學文化宮。高中時，維亞佐夫斯卡就參加了國內的奧林匹亞數學競賽，此外，她2002年和2005年在國際大學生數學競賽均獲得第一名。

維亞佐夫斯卡本科畢業於基輔大學數學系，碩士畢業於德國凱澤斯勞滕工業大學，博士畢業於波恩大學馬普數學研究所。她於2016年解決了維度8中的球堆積問題，與他人合作解決了維度24中的球體堆積問題。此前，該問題僅解決了3維或更少的維度，並且3維版本的證明涉及複雜計算。相比之下，維亞佐夫斯卡對8維和24維的證明非常簡單。除了在球形堆積方面的貢獻外，她還因對球形設計的研究而聞名。

對於球堆積問題，為什麼強調8維和24維的證明非常重要？其實，在空間中把相同大小的球體堆在一起的最密集的方式，就是雜貨店裡常見的用來擺放柳丁的金字塔形。儘管這個問題看起來簡單，但它直到1998年才得以解決，即湯瑪斯·黑爾斯以250頁的數學論證結合龐大的電腦計算，最終證明了克卜勒的猜想。高維的球堆積很難想像，但非常實用，球體密堆積與手機、空間探測器和互聯網通過雜訊通道發送信號時使用的改錯碼密切相關。

在高維空間中尋找相同大小球體的最密堆積應該比黑爾斯解決的三維情形更複雜，因為每增加一個維度就意味著有更多可能的堆積方式要考慮。然而數學家們早就知道有兩個維數是特殊的：8維和24維，這兩個維數中分別存在著被稱為E8和利奇格的對稱球堆積，這兩種令人眼花繚亂的球堆積要好於在其他維數上已知的最密球堆積的候選者。

2010年，維亞佐夫斯卡獲烏克蘭國家科學院數學研究所副博士學位，2013年又獲得波恩大學博士學位。她的博士論文《模函數和特殊閉鏈》是關於解析數論，由唐·紮吉爾和維爾納·繆勒指導。她曾在柏林的數學學院和柏林洪堡大學做博士後研究，之後在普林斯頓大學做訪問學者。2018年以來她在洛桑聯邦理工學院做全職教授。

菲爾茲獎 (Fields Medal) 是依加拿大數學家約翰·查理斯·菲爾茲要求設立的國際性數學獎項，於1936年首次頒發。菲爾茲獎是數學領域的國際最高獎項之一。因諾貝爾獎未設置數學獎，故該獎被譽為「數學界的諾貝爾獎」。菲爾茲獎每四年頒發一次，每次授予2至4名有卓越貢獻的年輕數學家。獲獎者必須在該年元旦前未滿40歲。

## 2、數學界的「諾貝爾獎」，第二位女性獲獎者

菲爾茲獎自1936年開始頒發以來，至今共有64位獲得者。烏克蘭數學家維亞佐夫斯卡於2022年7月5日在國際數學家大會上摘得該獎，繼2014年伊朗數學家瑪麗亞姆·米爾紮哈尼之後，成為史上獲此榮譽的第二位女性學者。事實上，四年一次的國際數學家大會 (ICM)

原計劃 2022 年在俄羅斯聖彼得堡舉行，受俄烏衝突影響，大會轉至芬蘭首都赫爾辛基。菲爾茲獎是數學領域的國際最高獎項之一，與阿貝爾獎齊名，均被譽為“數學界的諾貝爾獎”。在頒獎典禮上，她表示這場衝突已經「永遠改變了」她的生活，但教學工作為她提供了一些安慰，幫助其「忘記恐懼和痛苦」。維亞佐夫斯卡指出：「尤利婭·茲達諾夫斯卡是充滿光明的人，她的偉大夢想是在烏克蘭教導孩子們數學。」

學好數學需要良好的邏輯思維、統籌思維和發散思維。這些思維可以通過訓練獲得。但真正成為數學家的條件是如何在平常生活中長期保持一種以數學為興趣的生活。在數學這個領域，我們可以應該接受研究人員的多樣性。研究人員的多樣性不應該是一個問題，而是一個優勢。即使在一個非常抽象的領域，不同背景的人也可能會有不同的工作習慣，或者不同的核心信念，這種信念與數學沒有直接關係，但會影響他們解決問題的方式。

維亞佐夫斯卡目前正在研究優化球體緊湊堆疊的世紀性問題。這個問題被稱為「橘子商人的問題」，自 16 世紀以來一直困擾著數學家，當時有人提出了炮彈的最密集堆放問題。當研究聚焦轉移到大於三維空間的數學維度時，這種堆疊變得更加複雜。而在維度 8 中，可以找到一種完美的對稱。

其實，數學中一個長期存在的問題是找到能夠在給定維度中，填裝相同球體的最稠密的方式。人們已經知道，圓的六邊形填裝是二維空間中最稠密的。1998 年，黑爾斯用電腦輔助證明了克卜勒猜想，即面心立方格的填裝是三維空間中最稠密的。其他任何維度上的最稠密填裝一直處於未知狀態，直到 2016 年，維亞佐夫斯卡證明了 E8 格在 8 維空間中具有最稠密的填裝。不久後，她與科恩 (Cohn)、庫馬爾 (Kumar)、米勒 (Miller) 和拉德琴科 (Radchenko) 一起，證明了利奇格在 24 維空間中具有最稠密填裝。維亞佐夫斯卡的方法是建立在科恩和埃爾基斯 (Elkies) 的工作基礎之上的，他們利用泊松求和公式給出了任意維度上球體填裝的可能密度的上界。

1611 年，克卜勒 (Johannes Kepler, 1571~1630) 寫了一篇題為《論六角形雪花》的文章。他說，雪花在飄落之初的形狀是小小的六角形，這肯定是有原因的。如果只是偶然，為什麼他們不是五角形或者七角形呢？只要所有雪花一直相互分離，只要他們沒有在飄落過程中受到擠壓，他們就會一直是六角形，這是為什麼呢？由於物質的基本特性，六角形脫穎而出，這種形狀不僅可以保證不留空隙，還有利於水蒸氣更加平穩地聚集並形成雪花。克卜勒猜想：「面心立方堆積是所有的堆積方式裡最密的。」面心立方堆積就是類似水果攤上堆水果的方式。這就是 3 維球堆積問題，也被稱為克卜勒猜想。按猜想中的堆積方式，填充密度是。這意味著，往一個盒子裡裝球，最多只能填滿盒子約 74% 的空間。1998 年，湯瑪斯·黑爾斯借助電腦給出了第一個證明。論文長達 120 頁，於 2005 年發表在《數學年刊》上。由此可見，球填充問題之難。維亞佐夫斯卡研究的問題相當於是 8 維、24 維的克卜勒猜想。

### 3、古老而自然的問題，高維球體填充

國際數學聯盟執行委員會將菲爾茲獎授予維亞佐夫斯卡，以表彰其在等球體緊湊堆疊方面的貢獻。維亞佐夫斯卡的研究源於 400 多年前數學家克卜勒的一個數學猜想，該猜想已困擾了數學家數百年，它從根本上涉及如何以最緊湊的方式將球體放入容器中。後來，數學家研究認為金字塔堆疊是等球體排列最密集的方式，但是將理論擴展到其他維度被證明是難以捉摸的。

維亞佐夫斯卡表示，他們的研究解決了一個「非常古老而自然的問題」，提供了一個神奇函數的明確公式，她花了 13 年的時間才發現。這實際上是一個非常有用的工具，可用於許多技術領域。據介紹，高維球體填充的研究可用於修復資訊傳輸干擾亂碼的糾錯技術中，或者在物理學和化學中，用來描述氣體的某些狀態。

維亞佐夫斯卡畢業於基輔塔拉斯舍甫琴科大學，之後在德國凱澤斯勞滕大學和波恩大學，以及巴黎附近的法國高等科學研究院深造。獲菲爾茲獎後，維亞佐夫斯卡接受了《自然》雜誌的採訪，講述了菲爾茲獎的意義，自己的研究成果，以及數學領域正在發生的變化。

為什麼對裝球問題感興趣？這是一個非常棒的幾何問題。要知道，只涉及一個簡單公式的問題，往往是最難解決的。關於裝球問題仍然存在許多未解之謎。最開始，是科恩和埃爾基斯的學術工作引起了維亞佐夫斯卡對 8 維和 24 維的裝球問題的興趣。他們設想出了解決方案，並且離實際解決這個問題已經非常接近了。維亞佐夫斯卡認為：「看起來，解決這個問題就像摘下一個唾手可得的果子。而且即便在現在，在這個問題被解決之後，我們仍然面臨著無限多的維度，這個問題仍然是開放的。我們並不能用以前的舊方法解決新的難題。還有很多領域等待我們探索。」

2016 年 3 月 14 日，維亞佐夫斯卡線上發佈了一篇論文，給出了 8 維情形缺少的函數。她的工作使用了模形式 (modular form) 的理論，模形式是一種強大的數學函數，當它被應用於某個問題時，似乎可以解鎖大量的資訊。在 8 維情形下，當時還是柏林數學學院和柏林洪堡大學博士後研究員的維亞佐夫斯卡找到正確的模式，只用 23 頁紙就證明了  $E_8$  是最密的 8 維堆積。普林斯頓大學和高等研究院的彼得·薩爾納克說：「就像所有偉大的事情一樣，這個證明非常簡單。剛開始讀論文時，你就知道它是對的。」一周之內，維亞佐夫斯卡、科恩和其他三位數學家成功地將她的方法推廣到了利奇格。

可見，她用 23 頁紙的簡潔證明震驚數學界。之後，她被這篇論文在球堆積研究人員中引發的興奮情緒所震驚。「我認為人們會對這個結果感興趣，但我不知道會有這麼多關注。」維亞佐夫斯卡說。那天晚上，科恩發郵件向她表示祝賀，在兩人郵件交流時，他問維亞佐夫斯卡是否有可能將自己的方法推廣到利奇格。「我當時覺得，我已經累了，應該休息一下。」維亞佐夫斯卡說，「但我還是想試著發揮作用。」他們兩人開始與庫馬爾、拉琴科以及羅格斯大學的斯蒂芬·米勒合作。得益於維亞佐夫斯卡早期的研究成果，他們很快為利奇格找到了一種構造正確輔助函數的方法。在維亞佐夫斯卡發佈她第一篇論文後僅一周，該團隊就在網上發佈了一篇 12 頁的論

文。

其實，維亞佐夫斯卡的工作解決了一個「非常古老和自然的問題」，即「包裝相同球體的最密集方式」。看到這個數學研究課題，可能很多人都一頭霧水。打個比方，即看到過蘋果像金字塔一樣堆疊在一起，這個場景應該都很熟悉吧？沒錯，這個維亞佐夫斯卡就是研究這個數學課題的。據說維亞佐夫斯卡把它帶到了另一個維度，確切地說是第 8 個和第 24 個維度，以一種得到頂級數學家廣泛讚譽的方式解決了這個問題。維亞佐夫斯卡在發言中說：「這實際上是一個非常有用的工具，用於許多技術領域。」

—本文作者任教中國上海市城市科技學校—