

# 從一道計數恆等式談起

連威翔

## 一、前言

在數學網站昌爸工作坊的作品 [1] 中, 作者介紹了底下的恆等式:

$$(2n + 1) + (2n + 3) + \cdots + [2n + (2n - 1)] = 3 \times [1 + 3 + \cdots + (2n - 1)] . \quad (1)$$

上式特別之處, 在於其左式的等差級數和可以寫成其右式另一個等差級數和的三倍。

在 [1] 中, 作者證明 (1) 式的過程如下:

$$\begin{aligned} (2n + 1) + (2n + 3) + \cdots + [2n + (2n - 1)] &= n \times 2n + [1 + 3 + \cdots + (2n - 1)] \\ &= 2n^2 + n^2 = 3n^2 = 3 \times [1 + 3 + \cdots + (2n - 1)]. \end{aligned} \quad (2)$$

不難看出, 其方法是把括號中的  $n$  個  $2n$  抽出來先加總, 再使用兩次底下的恆等式:

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2. \quad (3)$$

其中, 作者並未證明 (3) 式, 但它可透過等差級數求和公式證明。此外, 也可透過有名的L形方塊拼合法看出 (3) 式成立的其中梗概, 請參考與 [1] 同作者之作品 [2] 中的動畫。

作品 [1] 的標題提到了「圖解」兩字, 因此底下第二節中, 筆者將從 [1] 中的圖形出發並加以推廣, 以求給出 (1) 式的圖解證明。接著的兩節中, 筆者將介紹一些相關的探討結果。進入第五節後, 我們一起看幾個對於 (3) 式的另證。

## 二、對圖形的觀察

在 [1] 中, 作者給出三個附有算式說明的示意圖, 我們不妨於底下重新畫一次:

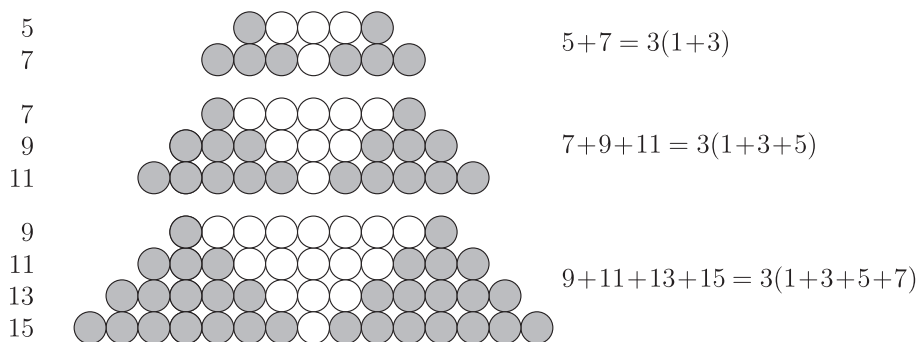


圖 1

注意上圖中，我們將原本 [1] 中所繪的橘色與黃色球，分別改為灰色與白色球。圖 1 的三個示意圖，都可以看作是以兩個灰色三角形與一個白色三角形排成一個較大的梯形。因為圖中灰色與白色三角形的球個數相同，所以任一三角形的球個數（底下簡稱三角形數）均佔梯形球個數（底下簡稱梯形數）的三分之一。

注意圖 1 中三個示意圖最上方那排白色球的個數分別為 3, 5, 7 個，均為奇數。因此，我們若將圖 1 一般化後，就得到下圖：

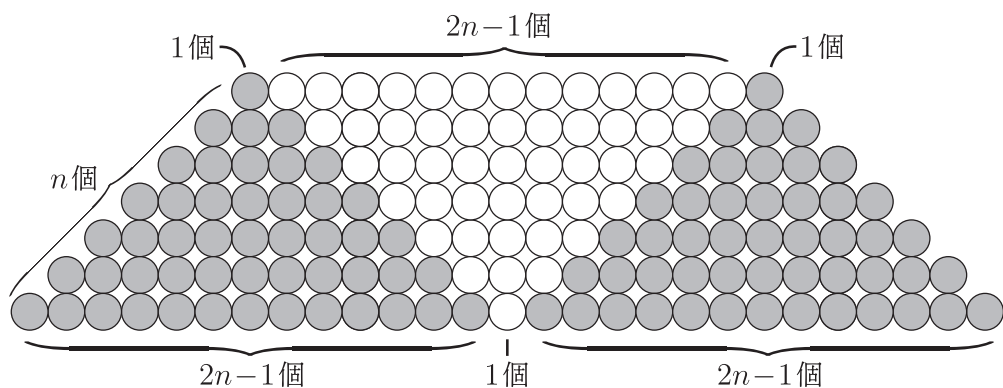


圖 2

其中  $n \geq 1$ 。原來，(1) 式的等號成立，是因為採用兩種方法計算圖 2 中球的總數。在 (1) 式的等號左側，是不區分球顏色的計數法，直接把圖 2 梯形內每一列球的個數相加得出總數；而 (1) 式等號右側的計數法則是要區分顏色，把圖 2 看成三個三角形，球的總數是三角形數的三倍。

只要將 (1) 式移項，就得到底下的結果：

$$\frac{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)}{(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) + \cdots + [2n + (2n - 1)]} = \frac{1}{3}. \quad (4)$$

此時只要將  $n = 1, 2, 3, \dots$  分別代入 (4) 式，即可得到 [1] 的文章標題，而圖 1 則是圖 2 取  $n = 2, 3, 4$  時的結果。

在此筆者想針對 (1) 式，給出一個相較於 (2) 式來說，會與圖 2 更有關聯性的證明。首先觀察 (1) 的左式：

$$(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) + \cdots + [2n + (2n - 1)].$$

上式的各項寫成一般項就是  $2n + k$ ，其中  $k = 1, 3, 5, \dots, 2n - 1$ 。對於一般項  $2n + k$ ，我們將其改寫為

$$2n + k = k + (2n - k) + k. \quad (5)$$

這個改寫方式是在前面先加一個  $k$ ，再把  $2n$  減去一個  $k$  變成  $2n - k$ ，所以總和不變。透過

(5) 式的手法，筆者對 (1) 式的證明如下：

$$\begin{aligned}
 & (2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + \cdots + [2n + (2n-1)] \\
 &= [1 + (2n-1) + 1] + [3 + (2n-3) + 3] + \cdots + \{(2n-1) + [2n - (2n-1)] + (2n-1)\} \\
 &= [1 + (2n-1) + 1] + [3 + (2n-3) + 3] + \cdots + [(2n-1) + 1 + (2n-1)] \\
 &= [1 + 3 + \cdots + (2n-1)] + [(2n-1) + (2n-3) + \cdots + 1] + [1 + 3 + \cdots + (2n-1)] \\
 &= 3 \times [1 + 3 + \cdots + (2n-1)]. \tag{6}
 \end{aligned}$$

這樣就證出了 (1) 式。

為何說 (6) 式與圖 2 更有關聯性呢？在 (2) 式的證明過程中，除了頭尾以外，其餘部份較不易看出與圖 2 的關聯。但只要觀察 (6) 式中各項改寫的過程，可知 (6) 式中第一個與第二個等號右側的一般項  $2k - 1 + [2n - (2k - 1)] + 2k - 1$  內所含的三項

$$(2k - 1), [2n - (2k - 1)], (2k - 1),$$

其實就是圖 2 中梯形從上算下來的第  $k$  列中，從左到右出現的灰色球、白色球、灰色球個數。而 (6) 式第三個等號右側，就是把這三項歸到各自所在的灰色或白色三角形去計數。因此 (6) 式的證明方式，是觀察圖 2 而得來的，所以與圖 2 更有關聯。

不過，若對圖 2 改以另一種方式著色的話，將可使所得的新圖與 (2) 式的計算方式產生較大關聯。下圖為將圖 2 左方的灰色三角形全部改塗白色後的結果：

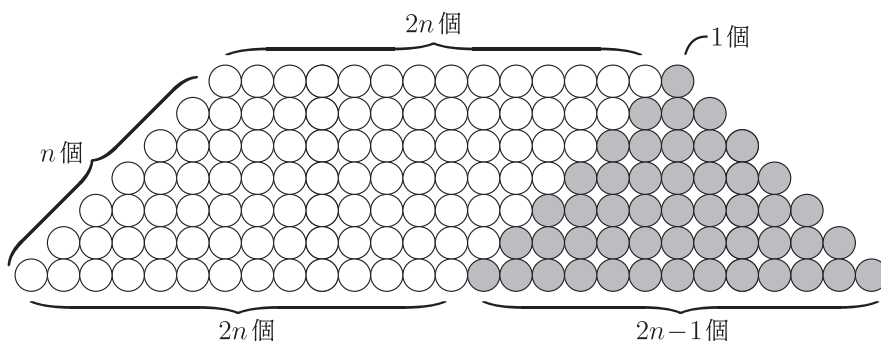


圖 3

不難看出，上圖中的白色球與灰色球個數剛好就是 (2) 式中第一個等號右側的  $n \times 2n$  與  $1 + 3 + \cdots + (2n - 1)$ 。

### 三、一個類似的例子

回顧第二節中的圖 2，不知讀者是否發現，圖 2 中排列球的方式其實並不是最密集的。底下的圖形，是比圖 2 更密集的排法 (各球之間的空隙更小)：

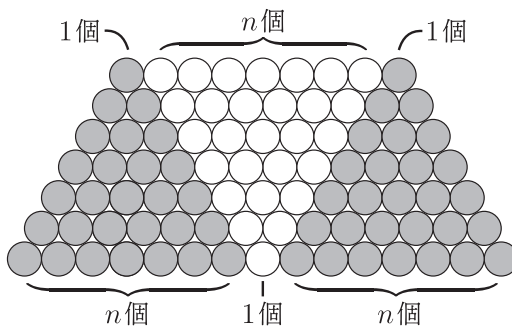


圖 4

仿照先前對圖 2 採兩種計數方式得出 (1) 式, 若同樣對圖 4 採用兩種計數法, 則可得如下恆等式:

$$(n+2) + (n+3) + (n+4) + \cdots + (2n+1) = 3 \times (1+2+\cdots+n). \quad (7)$$

仿照 (6) 式的證明過程, 我們也可用算式的改寫證明 (7) 式。首先, (7) 左式的各項寫成一般項就是  $n+1+k$ , 其中  $k=1, 2, 3, \dots, n$ 。對於一般項  $n+1+k$ , 我們將其改寫為

$$n+1+k = k + [n - (k-1)] + k. \quad (8)$$

這個改寫方式, 同樣是觀察圖 4 梯形內每列各色的球數而得。利用 (8) 式, 可證明 (7) 式如下:

$$\begin{aligned} & (n+2) + (n+3) + (n+4) + \cdots + (2n+1) \\ &= (n+1+1) + (n+1+2) + (n+1+3) + \cdots + (n+1+n) \\ &= (1+n+1) + [2+(n-1)+2] + \cdots + \{n+[n-(n-1)]+n\} \\ &= (1+n+1) + [2+(n-1)+2] + \cdots + (n+1+n) \\ &= (1+2+\cdots+n) + [n+(n-1)+\cdots+1] + (1+2+\cdots+n) \\ &= 3 \times (1+2+\cdots+n). \end{aligned}$$

觀察 (7) 式, 可發現它與 (1) 式類似, 皆把一個等差級數和寫成另一個等差級數和的三倍。仿照 [1] 的作者由 (1) 式得出 (4) 式, 由 (7) 式我們也可得

$$\frac{1+2+\cdots+n}{(n+2) + (n+3) + (n+4) + \cdots + (2n+1)} = \frac{1}{3}. \quad (9)$$

此時, 若分別將  $n=1, 2, 3, \dots$  代入 (9) 式, 即可得到

$$\frac{1}{3} = \frac{1+2}{4+5} = \frac{1+2+3}{5+6+7} = \cdots = \frac{1+2+\cdots+n}{(n+2) + (n+3) + \cdots + (2n+1)}.$$

上式就是與 [1] 標題類似的結果, 乍看之下很神奇, 其實各項都出自 (9) 式。而 (9) 式來自於 (7) 式, (7) 式來自於圖 4。

### 四、六角形數的計算

在第二節中，我們提到三角形數與梯形數。某次觀察圖 4 時，筆者發現可利用它來計算六角形數。此處先定義，所謂六角形數，即以圖 4 那樣的密集排列方式，將若干個球排成一個正六角形時所使用的球個數。接下來，筆者將介紹如何利用圖 4 計算六角形數。

注意圖 4 中梯形的兩腰皆有  $n$  個球，但上底有  $n + 2$  個。如果我們把圖 4 中落在兩腰處的那兩排個數為  $n$  的灰色球拿掉，便得下圖：

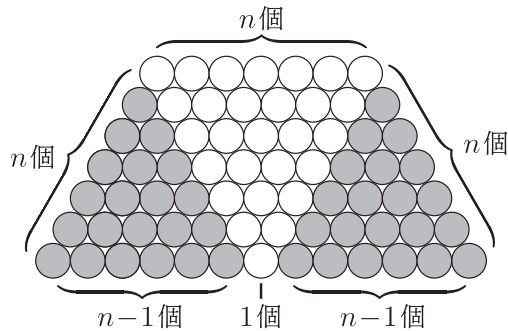


圖 5

這樣一來，圖 5 的上底就與兩腰一樣都有  $n$  個球。因此，圖 5 中的球個數為圖 4 的球個數減去  $2n$ ，即

$$3 \times (1 + 2 + \dots + n) - 2n = \frac{3n(n + 1)}{2} - 2n. \tag{10}$$

將圖 5 中的圖形複製一份，再將其上下翻轉後放入圖 5 下方，可得底下圖 6：

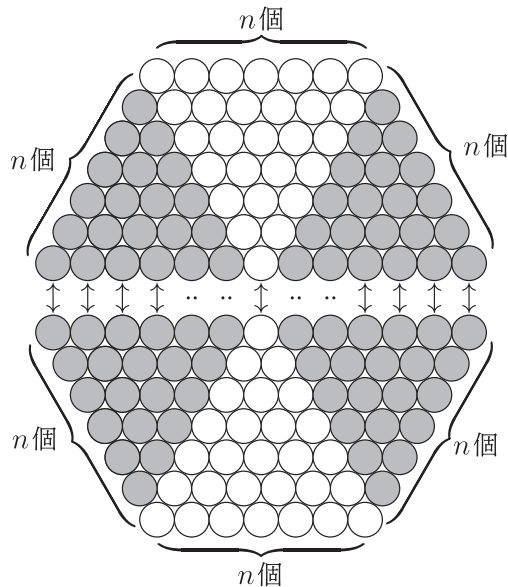


圖 6

若把圖 6 中以雙箭頭標示的每兩個球歸為一組，由圖 5 可知共有  $2n - 1$  組。讓每一組的兩個球疊合後，即得下圖：

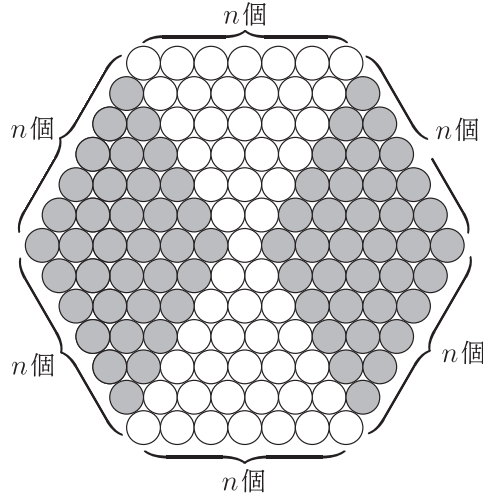


圖 7

上圖即為最外圍每邊有  $n$  個球的正六邊形。由圖 6 中兩部分拼合後成為圖 7 的過程，可知兩圖相差了  $2n - 1$  個球，此時利用 (10) 式，可求出圖 7 中的球個數為

$$2 \times \left[ \frac{3n(n+1)}{2} - 2n \right] - (2n - 1) = 3n^2 - 3n + 1.$$

此即對應於圖 7 的六角形數計數公式。

### 五、等式 $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ 的另證

在第一節中，筆者提到可透過等差級數求和公式證明 (3) 式。在本節中，我們不妨再多看幾個對於 (3) 式的另證。

第一個證明方式，觀察 (3) 式後，可知 (3) 左式的一般項為  $2k - 1$ 。因為  $2k - 1$  滿足

$$2k - 1 = k^2 - (k - 1)^2,$$

從而得

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + (2n - 1) &= \sum_{k=1}^n (2k - 1) = \sum_{k=1}^n [k^2 - (k - 1)^2] \\ &= [n^2 - (n - 1)^2] + [(n - 1)^2 - (n - 2)^2] + \dots + (2^2 - 1^2) + 1^2 \\ &= n^2. \end{aligned}$$

因此 (3) 式得證。

此外在作品 [2] 的動畫中, 第一個出現的圖形可視為  $1 \times 1$  的正方形, 之後每次添加一個  $L$  形塊, 都使得所得圖形成為邊長加 1 的正方形。像這樣每步驟完成後均保有同一特性的現象, 可考慮用數學歸納法進行證明, 證明如下:

**證明:** 令  $S_n = 1 + 3 + \cdots + (2n - 1)$ , 我們想證明  $S_n = n^2$ 。討論如下:

- (a) 當  $n = 1$  時,  $S_1 = 1 = 1^2$ 。
- (b) 當  $n = k$  時, 假設  $S_k = 1 + 3 + \cdots + (2k - 1) = k^2$ ; 當  $n = k + 1$  時, 有

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1 + 3 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = S_k + (2k + 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2. \end{aligned}$$

由數學歸納法原理, 可知 (3) 式成立。以上是對 (3) 式的第二個證明。

除了上面兩種證法外, 底下再介紹另一個透過圖解的證法, 希望可以呼應前面幾節內容的精神。請先參考下圖:

(1,1)	(1,2)	...	...	...	(1,n)
(2,1)	(2,2)	...	...	...	(2,n)
⋮	⋮	⋮			⋮
⋮	⋮		⋮		⋮
⋮	⋮			⋮	⋮
(n,1)	(n,2)	...	...	...	(n,n)

圖 8

上圖是一個由  $n^2$  個小正方形所組成的  $n \times n$  正方形, 圖中我們以類似矩陣足標的方式寫下  $n^2$  個座標  $(i, j)$ , 幫各個  $1 \times 1$  的小正方形進行定位。不難發現, 圖 8 中含有多個  $L$  形塊, 若我們把最左上角、只含  $(1, 1)$  小正方形的區域也視為一個退化的  $L$  形塊, 則圖 8 的  $n \times n$  個正方形一共由  $n$  個  $L$  形塊拼合而成。圖 8 中包含  $n^2$  個小正方形, 一個很自然的想法, 若以元素  $(i, j)$  代表位置在  $(i, j)$  的小正方形, 先定義集合

$$\begin{aligned} S_k &= \{(i, j) \mid i, j \in N, 1 \leq i, j \leq k\}, \\ L_k &= \{(i, j) \mid i, j \in N, i \leq j = k \text{ 或 } j \leq i = k\}, \end{aligned}$$

其中  $N$  為正整數集, 且  $1 \leq k \leq n$ , 則圖 8 的所有的小正方形可用以下含  $n^2$  個元素的集合

$S_n$  代表:

$$S_n = \{(i, j) \mid i, j \in N, 1 \leq i, j \leq n\}.$$

同時, 圖 8 從左上到右下出現的  $n$  個  $L$  形塊, 則可對應於下列  $n$  個集合:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(i, j) \mid i, j \in N, i \leq j = 1 \text{ 或 } j \leq i = 1\}, \\ L_2 &= \{(i, j) \mid i, j \in N, i \leq j = 2 \text{ 或 } j \leq i = 2\}, \\ &\vdots \\ L_n &= \{(i, j) \mid i, j \in N, i \leq j = n \text{ 或 } j \leq i = n\}, \end{aligned}$$

注意其中  $S_1 = L_1$ 。計算上述各集合的元素個數, 不難發現  $|S_n| = n^2$ , 且有

$$\begin{aligned} |L_k| &= |\{(1, k), (2, k), \dots, (k, k), (k, 1), (k, 2), \dots, (k, k-1)\}| \\ &= |\{(1, k), (2, k), \dots, (k, k)\}| + |\{(k, 1), (k, 2), \dots, (k, k-1)\}| \\ &= 2k - 1. \end{aligned}$$

對於滿足  $n \geq 2$  的正整數  $n$ , 可將  $S_n$  分割為互斥的集合  $S_{n-1}$  與  $L_n$ , 並寫下:

$$S_n = S_{n-1} \cup L_n.$$

如果  $S_{n-1}$  還能繼續進行類似上式的分割, 則可繼續改寫上式直到  $S_1$  出現為止, 過程如下:

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n-1} \cup L_n = S_{n-2} \cup L_{n-1} \cup L_n = \dots = S_1 \cup L_1 \cup \dots \cup L_{n-1} \cup L_n \\ &= L_1 \cup L_1 \cup \dots \cup L_{n-1} \cup L_n. \end{aligned}$$

計算上式頭尾兩集合的元素個數, 因為任兩個具  $L_k$  形式的相異集合間均為互斥, 可知

$$|S_n| = |L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_{n-1} \cup L_n| = |L_1| + |L_2| + \dots + |L_{n-1}| + |L_n|.$$

再將已求出的  $|S_n|$  與  $|L_k|$  之值代入上式, 可得

$$n^2 = 1 + 3 + \dots + (2n - 1).$$

這樣我們就再次證明了 (3) 式。

## 六、結語

看完了本文前半的介紹, 筆者認為或許大部份的式子都可以忘記, 只要記得圖 2 與圖 4 中球的塗色與排列方式即可, 因為 (1), (7) 兩式的寫出與證明, 都可從此兩圖形得出想法。而到



了本文後半部，我們先順勢研究了六角形數的計數公式，再以 (3) 式的證明為這趟數學之旅畫下句點。不難發現，旅程中除了算式之外，也常有圖形相伴。

筆者認為，[1] 的作者應該是先畫出圖 1，一般化為圖 2 後(雖然作者沒有畫出圖 2) 才想到 (1) 式的，就像筆者是先畫出圖 4，才寫下 (7) 式那樣。最後無論如何，筆者要感謝作者昌爸，若沒有其作品 [1] 與 [2]，相信也不會有本文的誕生。

## 參考資料

1. 圖解  $\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \dots = \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\dots+(4n-1)}$ ，昌爸工作坊(數學網站) <http://www.mathland.idv.tw/fun/03333.htm>.
2. 圖解  $1+3+5+7+9$ ，昌爸工作坊(數學網站) <http://www.mathland.idv.tw/fun/sum135.html>.

—本文作者投稿時任職統一速達公司(黑貓宅急便)—