

微分幾何學—重力研究的好幫手

鄭日新

10/26/2019 院慶

Lorentz 變換—所有神奇的開始

西元 1903 年 Lorentz 在數學上找到了一個使電磁學中 Maxwell 方程不變的時空變換, 在 1 + 1 維時空中用中學代數可以寫下來如下:

$$(L) \quad x = (x' + vt')/\sqrt{1 - \beta^2}, \quad t = (t' + \frac{\beta}{c}x')/\sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

其中 c 表光速, v 表 S' 座標系對 S 座標系之相對速度 (同一事件: S 系 (e.g. 地面) 測量為 (x, t) , S' (e.g. 對地面以常速度 v 運動之火車) 系測量為 (x', t'))。兩事件 (x_1, t_1) , (x_2, t_2) 時差表為 $\Delta t = t_1 - t_2$, 空差表為 $\Delta x = x_1 - x_2$ 。上述 (L) 名為 Lorentz 變換, 有以下出名的結論 —

(一) 「同時」的觀念是相對的: 若兩事件時差 $\Delta t' = 0$ (但 $\Delta x' \neq 0$), i.e., 對 S' 系為同時, 則

$$\Delta t = \left(\frac{\beta}{c}\Delta x'\right) / \sqrt{1 - \beta^2} \neq 0, \text{ 即對 } S \text{ 系不為同時。}$$

所以邏輯上不能說「天涯共此時」。

(二) 孿生子佯謬 (twin paradox (似非而是)): 就是說有一對孿生兄弟甲和乙, 甲留在地球上, 乙乘飛船去旅行, 歸來後兩人相遇, 甲發現乙比自己年輕了許多, 怎會如此? 兩人不是「對稱分離再聚合」嗎? 不是的, 乙有一個改變速度折返的動作而甲沒有, 根據 Lorentz 變換的分析 (參考 [4]), 此事確實發生。

狹義相對論 (愛因斯坦, 1905)

然後西元 1905 年愛因斯坦給了 Lorentz 變換物理的解釋, 他假設:

(1) 相對性原理: 任何物理定律, 在所有彼此間以等速做相對運動之座標系 (慣性系), 皆有同一的形式。

(2) 光速在所有之慣性系中皆相同。(此假設為 Michelson-Morley, 1887 年的實驗所支持)

由假設 (2) 可導出 Lorentz 變換式(參考 [3]), 而 Maxwell 方程在 Lorentz 變換下不變, 所以滿足假設 (1)。

另一方面, 牛頓力學不在 Lorentz 變換下不變, 所以必須修正。物理量必須尊重 Lorentz 變換, 所以得用 (四維的)「張量」來表達物理量。

張量：描述質量分佈及重力場

張量在不同座標系的表達之間所做之變換由 Lorentz 變換推廣到更一般的相對加速度運動的座標系, 即所謂微分同胚 (diffeomorphisms) – 廣義的 Lorentz 變換。

質量分佈用 2 階張量 $T_{\alpha\beta}$ (叫 Stress 能動量張量) 描述。重力場用 2 階張量 $g_{\alpha\beta}$ (叫度規張量) 來描述。

尋找用度規張量描述的重力場 $g_{\alpha\beta}$ 的張量方程

首先愛因斯坦試著推廣古典理論對重力位能的 Poisson 方程到重力場 $g_{\alpha\beta}$ 的張量方程。第一個數學問題是對張量怎麼微分? 微分後還得是張量, 所以得尋找與座標無關的微分觀念: 即現代微分幾何中所謂「聯絡」(connection) 的觀念, 或其給出的協變微分的觀念, 後來在物理中叫「規範場」(gauge field) 的概念。



Grossmann



Ricci

爲了找出度規張量 $g_{\alpha\beta}$ 的 2 次 (協變) 微分, 愛因斯坦要求他的大學同學兼好友 Marcell Grossmann 幫忙於圖書館在微分幾何學家 Ricci 所寫的書中(有文獻記載 [1], 傳言 Grossmann 僅讀了前六章) 找到後來叫 Ricci 曲率張量 $R_{\alpha\beta}$ 的二階張量作爲後來愛因斯坦方程的主項 (見後面 (**))。

黎曼幾何：度規張量 $g_{\alpha\beta}$ 描述的時空

這裡簡介一下度規張量 $g_{\alpha\beta}$ 的幾何，後來叫黎曼幾何。這度規張量給出內在距離的觀念：就是說兩事件的時空距離與座標（或說觀察者）無關。從 (L) 容易驗兩事件時差 Δt ，空差 Δx 滿足下列變換式

$$(*) \quad -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 = -c^2(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2.$$

(*) 便是說平直時空中兩事件的時空距離 $-c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$ 與座標無關。

另一個要點是兩次(協變)微分後曲率的觀念—黎曼曲率張量 $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv 0 \Leftrightarrow \exists$ 座標使 $g_{\alpha\beta}$ 為平直時空的度規張量：就是說內在的曲率張量為零刻畫了平直(無質量)的時空。

還有此內在距離的短程線(常微分)方程：被用來描述重力場中，光走的路線或小質量像水星的運動軌跡。



黎曼 (Bernhard Riemann, 1826~1866)

愛因斯坦方程的變分描述

先是愛因斯坦和 Grossmann 在 1913 年找到了 Ricci 曲率張量作為下列重力場方程的主項：

$$(**) \quad R_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}.$$

當時即知 stress 能動量張量 $T_{\alpha\beta}$ 是滿足守恆律的，但 Ricci 曲率張量 $R_{\alpha\beta}$ 卻不滿足守恆律。所以「如果愛因斯坦和 Grossmann 信賴幾何的美，並試圖根據其內在一致性完成方程式，就不必等到 1915 年才寫下正確的方程式」(引自 [1], Ricci 曲率張量的守恆律是不是藏在 Ricci 書第六章以後，而讓 Grossmann 正好錯過?)。不過在沒有物質分佈 ($T_{\alpha\beta} = 0$) 時，上述愛因斯坦和 Grossmann 寫下的方程其實是正確的。

愛因斯坦曾想運用方程 (**) 來計算光經太陽的偏折角，及解釋水星近日點的進動 (procession)，但未能成功。

1915 年春愛因斯坦訪問哥廷根的大數學家 David Hilbert, Hilbert 建議找一作用量 $E(g_{\alpha\beta})$ 使方程為 $E(g_{\alpha\beta})$ 的第一變分 $= 0$ ，這是最小作用量原理，所有已知好的物理方程都有這樣的變分描述。隨後 Hilbert 和愛因斯坦各自先後找到了此作用量及後來以愛因斯坦命名的重力場方程：

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}. \quad (\text{愛因斯坦方程})$$



大衛·希爾伯特
David Hilbert, (1862~1943)

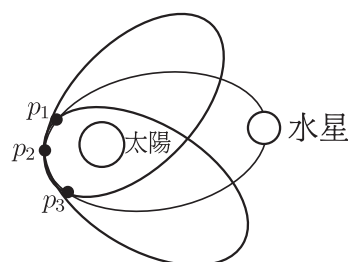
曾有爭論說誰是第一個找到重力場方程的人,但 Hilbert 並不居功,他說:「做出廣義相對論的是愛因斯坦,並非數學家。」David Hilbert 何許人也?他是德國大數學家,1900年巴黎第二屆數學家大會上發表著名的23個當時未解的數學難題。

愛因斯坦理論的實踐

愛因斯坦的廣義相對論為精密天文觀測或實驗所支持:

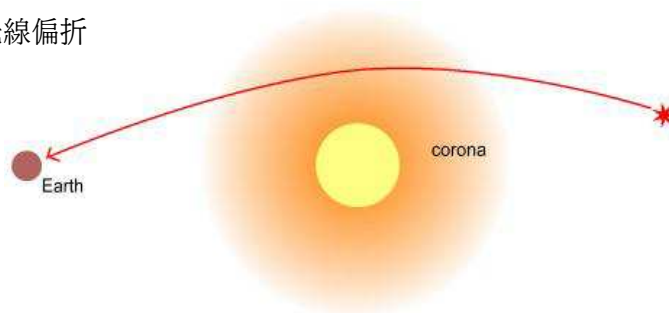
(一) 水星近日點的進動 (precession): 水星繞日的軌道並不是一個靜態的橢圓 (根據牛頓萬有引力定律的軌跡), 它的近日點會緩緩滑動 (稱為進動, 見下圖)

當只有太陽位於座標原點時, Schwarzschild 很快找到了一個愛因斯坦重力場方程簡單球對稱的度規解。愛因斯坦依據小質量沿 (度規的) 短程線運行的運動方程計算了水星近日點的進動值, 比由牛頓力學計算出的理論值每一百年多出 43 弧秒, 正好符合長久以來無法解釋的天文觀測值, 詳情可參考 [2]。



來源:「空間、時間和引力」- 王永久

引力場中的光線偏折



來源: <https://read01.com/gmMRy.html#.XZQOAEYzZPY>

(二) 光經太陽偏折角(見上圖): 愛因斯坦也依據光走短程線運行計算了光線經過太陽時的偏折角度是 1.7 弧秒。這與後來的天文觀測值相符合。另外依據廣義相對論高處 (例如塔頂) 時鐘必定走得快, 也在後來為精密的實驗所證實。

為何相信有重力波?

我們舉兩個其他情況的例子, 一個是電磁波存在的類比例子, 一個是 Aharonov - Bohm 效應所顯示的向量位能的物理意義。

(一) 電磁波的存在 (類比例): 電或磁偶極子輻射 - 加速電荷源製造出始初條件 (initial data) 使得 Maxwell 方程有解 $E, B \sim 1/r$ (距離分之一), 而有傳播到 ∞ 遠的輻射能力 (更多細節可參考 [5])。

(二) Aharonov-Bohm 效應 (信心例): 電子束分裂繞過一螺線管如下圖所示

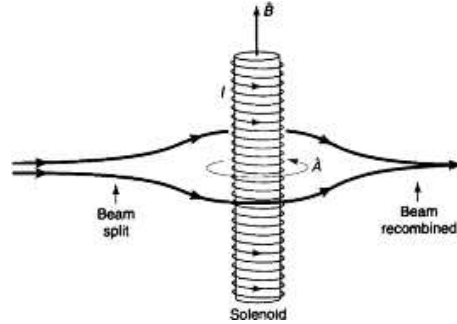


Figure 10.13: The Aharonov-Bohm effect: electron beam splits, with half passing either side of a long solenoid.

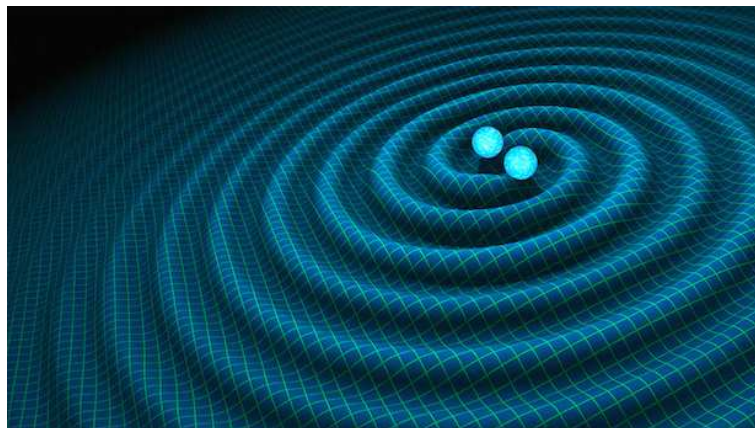
出處 : David J. Griffiths, Introduction to Quantum Mechanics

螺線管外無電磁場, 依據古典電磁學, 兩分裂電子束在另一邊會合時, 啥事也不會發生, 但事實不然, 電子束有相位移動且大小根據螺線管內磁場大小而定。此事的量子力學解釋顯示, 作為古典電磁學中輔助的數學量「向量位能」其實是有物理意義的; 向量位能是一種有幾何意義的規範場, 那是不是有幾何意義的輔助數學量常也有物理的意義?! (更多細節可參考 [6])

(三) 重力波的存在(由理論): 加速大質量源給出始初條件使得愛因斯坦方程有適當解, 且有傳播到 ∞ 遠的輻射能力, 此種解叫重力波。

真有重力波!

雙星 (兩黑洞) 碰撞提供的始初條件, 使愛因斯坦方程有「能傳播到 ∞ 遠能力」的解 (叫重力波):



「2015年9月14日, LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) 首次記錄到黑洞碰撞的重力波訊號。黑洞碰撞傳遞給我們的是宇宙大爆炸以來人類探測到的最強大單一事件, 重力波的強度大於太陽光度的 1021 倍。發生碰撞的這一對黑洞, 一個是太陽質量的二十九倍, 另一個是太陽質量的三十六倍。」

Kip Thorne, Rainer Weiss, Barry Barish 因探索重力波獲得 2017 年諾貝爾物理獎。

為何相信有黑洞?

Penrose 黑洞理論及霍金 - Penrose 奇異點定理 :

某些始初條件, 使愛因斯坦方程解在有限時間之後, 在空間某點會變成 ∞ , 即物質凝聚到非常稠密。由理論依據恆星質量大小, 將演化成白矮星, 中子星或坍縮為黑洞。而白矮星或中子星之前已發現。

由於對黑洞的探索與發現 2020 年兩知名國際獎項均頒發給相關研究團隊或領航人員 :

(一) 科學界知名的「突破獎基金會」(Breakthrough Prize) 2020 年度的「基礎物理獎」頒發給「事件視界望遠鏡合作計畫」(The EHT Collaboration) 的 347 位成員, 中央研究院天文及天文物理研究所是事件視界望遠鏡計畫重要成員, 在 347 位獲獎者中有 53 位為本院天文所格陵蘭望遠鏡計畫現職或前任同事, 比例超過 15%, 突顯出臺灣在此項成果中的分量。EHT 合作計畫團隊本次因獲取史上第一張黑洞影像 - M87 星系中心超大黑洞的影像 - 而獲獎。

(二) 特別值得一提的是數學物理學家 Roger Penrose 獲得 2020 年諾貝爾物理獎, 2020 年諾貝爾物理獎一半由牛津大學 Roger Penrose 獲得, 另一半由 Max Planck 研究院 /UC Berkeley 的 Reinhard Genzel 和 UCLA 的 Andrea Ghez 共同獲得。部分獲獎引言如下:

黑洞及銀河最暗黑處的秘密

三位得獎者因為他們關於宇宙最殊勝現象之一, 黑洞, 的發現而分享 2020 年的諾貝爾物理獎。Roger Penrose 在 1965 年初關於愛因斯坦方程奇異解的物理中演繹了黑洞的形成並描述其細節, 他證明了黑洞的形成是愛因斯坦廣義相對論的直接結果。Reinhard Genzel 和 Andrea Ghez 發現在我們銀河系中心一個不可見且極重的物體控制著附近星體運行的軌跡, 而極重黑洞是目前唯一已知的解釋。

懷想與讚嘆

黑洞的形成是廣義相對論所描述的古典重力場論最令人驚嘆的結論, 再來的重力場量子化, 將觸及時空更根本的性質。許多理論物理學家投入了大量關注。在中研院物理所的余海禮與成

大物理系的許祖斌寫的一篇介紹性文章 [7] 中提及時間起源自量子重力，宣稱由三維度規及其共軛動量構成的 Hamiltonian 在量子化過程中產生時間，並得到關於此 Hamiltonian 的薛丁格量子演化方程。

另一個自古以來一般人都會問的問題是「宇宙是有限或無限」？佛家典籍中記載佛陀不予解答的十四個問題（叫十四無記）中有四個跟此問題有關。一般天文學家相信我們的宇宙是 FRW (Friedmann-Robertson-Walker) 宇宙，即無限，無邊，保持膨脹。另一方面微分幾何中有所謂 Myers 型定理，即曲率夠大，則空間必定為緊緻的（幾何上的「緊緻」是描述「有限，無邊」的數學語言）。物理上是說：質量分佈在遠處仍然密度夠高，則宇宙空間是有限，但沒有邊界的。註：有限無邊（像三維球 S^3 ）也可以一直膨脹。

幾何學的相關數學是宇宙的「法身」，描述這真實世界背後的定律法則，以數學語言呈現。余海禮與許祖斌文中讚嘆「時間」由重力量子化產生時，引聖經說：「問，給你答案；尋找，你會找到；敲門，門會為你而開。」好像禪宗六祖惠能悟道時說的：

何期自性，能生萬法！

（怎麼會想到原來自性可以了解並創造宇宙的一切事物！）

參考資料

1. 丘成桐。時空幾何與廣義相對論中的質量。數學傳播季刊, 42(4), 15-26, 2018。
2. 張海潮。介紹愛因斯坦 1915 年 11 月 18 日的水星論文。數學傳播季刊, 42(3), 14-24, 2018。
3. 張海潮。熔伽利略與勞倫茲變換於一爐。數學傳播季刊, 43(4), 21-29, 2019。
4. 王永久。空間，時間和引力。新世紀物理研習叢書 14, 牛頓出版公司, 1996。
5. David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd edition Prentice Hall International, Inc. 1999.
6. David J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall International, Inc., 1994.
7. 余海禮，許祖斌。時間、廣義相對論及量子重力。相對論百年故事, 224-263, 中華民國重力學會主編, 大塊文化出版公司, 2015。

—本文作者任職中央研究院數學研究所—