

有朋自遠方來——專訪

肥田晴三 (Haruzo Hida) 教授



策 劃：劉太平

訪 問：劉太平、謝銘倫、

Fabian Januszewski

時 間：民國 108 年 12 月 22、23 日

地 點：中央研究院數學研究所

整 理：編輯室

肥田晴三 (Haruzo Hida) 教授 1952 年 8 月 2 日出生於大阪。1980 年獲京都大學博士，1977~1987 年任職於北海道大學，1987 年起至今為 UCLA 特聘教授。肥田教授專長為數論，是 Galois 表現及模形式的 p 進形變理論的先驅者之一，自 80 年代開始發展的肥田理論 (Hida theory)，現已成為研究岩澤理論 (Iwasawa theory) 及自守表現的模性 (modularity) 中不可或缺的工具。他因在 Galois 表現及 p 進模形式的研究，特別是肥田理論對近三十年來數論發展的重大影響力，獲得 2019 美國數學學會 *Leroy P. Steele Prize for Seminal Contribution to Research* 的殊榮。在本訪談中，肥田教授對數論有深入見解，並對日本數學發展歷史提出有趣的看法。

劉太平 (以下簡稱「劉」): 你知道這一系列訪談的標題。

肥田晴三 (Haruzo Hida, 以下簡稱「H」): 是的，孔子論語：「有朋自遠方來」。多麼好，或是說：不是很好嗎？

劉: 那我就先問一個非正規的問題。我有這樣的印象，應該有些根據：日本人對數論做出許多貢

獻，似乎很喜歡數論，有谷山豐 (Taniyama)¹ 等人物。你認為這是文化使然嗎？

H: 我想是的。日本的數學起步得很早。早在 16、17 世紀，就在一些神社²舉行競賽，解些歐幾里得幾何問題或數論 Diophantine 問題。一旦勝出，會被記錄在一塊矩形木製匾額，即所謂的算額³ (日語發音: sangaku) 上，上頭寫著獲勝者的名字、證明的描述，可能還有幾何圖形。匾額將獻給神道諸神。日本許多神社都是如此。這是一種競賽。江戶時代⁴ (幕府時代) 的一些著名數學家，將此獲勝紀錄視為一種獎項。他們討論大量的數論問題、Diophantine 方程，及歐幾里得幾何問題，也計算諸如 π 等特殊數的數值。日本人似乎喜歡苦心思索，認為這是一種接近神道諸神的途徑，而這也是他們選擇在神社舉辦競賽的原因。這純粹是日本人的習慣，並非受到佛教影響，而是神道教的一部分。

劉: 是這樣。當我看日本料理時，感到極注重擺盤，講究的不單是食材；比如生魚片的擺設等等。對我這門外漢而言，這種似乎是很離散式的思維。例如，拉麵就不是典型的日式料理。

H: 拉麵來自中國。

劉: 是的，它不是典型的日本料理。日本食物的呈現方式非常離散，有模式、美感，譬如摺紙，非常的日本風。

H: 這是日本的傳統文化。日本諸島與大陸阻絕。尤其是在古早的年代，如十世紀時，日本與大陸相距甚遠，不像英國，無法游泳到大陸。因為水流湍急且距離遙遠，就算乘船，從日本到大陸也非常困難，這也就是何以我們能發展出獨特的日本體系。九、十、十一世紀時，日本貴族和皇帝舉辦花園詩會，名為「歌會」(日語發音為: kakai 或 uta-kai)。古日語也稱宴會為「Utage (うたげ)」，意思是「食物，伴著詩詞及歌曲」；此處的「うた」意思是「歌曲/詩詞」，而「げ」意指「食物」。花園詩會上，與會者交換詩歌，相互較量即興創作的詩品 (可能表面上讚賞時令花，卻隱含著對另一位參與者的浪漫情愫)。創作一首具有雙重或三重意涵的詩，並以美學的方式享用精緻美食和清酒，是另一種接近神道諸神的方式，這在當時的日本人心根深蒂固。例如，你提及的日本料理擺盤方式，也源自花園宴會，後來受到武士和日本商人的茶會影響；那是帶有武士氣息的貴族事物，不同於自英國傳入的拉麵和日式咖哩飯。據我的印度學生說，日式咖哩及印度咖哩截然不同；它現在已成為日式料理，呈現方式迥異於原來的印度咖哩。

謝銘倫 (以下簡稱「謝」): 味道不同。

¹ 谷山豐 (Yutaka Taniyama, 1927~1958)，日本數學家，對數論有決定性貢獻，1957 年提出 Taniyama 猜想 (或稱 Taniyama-Shimura conjecture)，不幸自殺身亡。

² 日本神道教舉行祭祀等活動的場所。

³ 日本江戶時代書寫在匾額上的數學問題及其解答，其意義為感謝神佛的恩賜、表示對教師的尊崇，或展示自己的研究成果。神社和寺廟是當時交流的主要場所，因此算額得到很高的關注，吸引志同道合者共同討論切磋。

⁴ 又稱德川時代 (1603~1867)。

H: 是的, 完全不一樣, 但有些可能不是源自這種貴族型態。在之後承平的幕府時代, 武士也有了審美素養。當然, 最初武士是指訓練有素的戰士, 但到了承平時期的, 他們就成為恪守原則且學識淵博的人物。他們從貴族傳統學了很多, 但更有紀律。所以這類武士料理與早期的料理稍有不同。相較於京都-大阪地區, 東京地區更為出色。出菜順序日益簡短, 但每種食物份量都變多一些, 生魚片料理就是如此。要做出優質的生魚片, 你需要一把非常鋒利的刀 (及心智), 這就來自武士文化。在十、十一世紀貴族時期, 無法馬上食用海裡捕獲的生魚, 所以主要吃魚乾。現今的生魚片和壽司是在武士時期的後期才發展出來。壽司師傅往往個性難搞, 非常自豪。而如果他很自豪, 通常會拿一把武士刀, 掛在壽司架後面的牆上, 並且不時驕傲地向顧客展示這把劍。由於我來自京都-大阪地區, 不很喜歡這種作風, 但對東京人而言, 這或許具有吸引力。

劉: 容我問一些數論方面的問題。我不是專家, 所以我的問題非常膚淺。Andrew Wiles⁵曾到史丹佛大學, 對費馬最後定理做公開演講。他從古代的畢氏三元數談起。演講結束時, 有些聽眾提問, 其中一個問題是: Hardy⁶ 是否曾對費馬最後定理的最終解決做出貢獻? Andrew Wiles 說沒有, 但拉馬努金 (Ramanujan)⁷有。你對此有何看法? 費馬最後定理終於得解, 誰是最至關緊要的? 我們都知道, 谷山豐居功厥偉。

H: 我認為, 當然, 其中一個關鍵是將橢圓曲線與模形式 (modular form) 聯繫起來, 這就是志村⁸ – 谷山猜想 (Shimura-Taniyama conjecture)。但更重要的也較少人說的是, Frey⁹發現費馬方程式各個整數解 (如果有的話) 的意義: 選取一個費馬方程的解 A、B、C, 他據此建構出具有非常有趣性質的橢圓曲線, 導致該解可能不存在。那麼, 要如何證明該解不存在呢? 谷山-志村猜想就派上用場了! 你可將給定的解, 聯繫上 Frey 所造的相關橢圓曲線的 Galois 表現, 進而聯繫上谷山-志村猜想給出的模形式, 之後 Ken Ribet¹⁰證明如此的模形式不存在。當然, Andrew 做出極其深刻的貢獻, 但一個原初的想法或許是 Frey 及 Ken Ribet 提出的。

劉: 了解。

H: Ken Ribet 自 Frey 的工作獲悉此事後, 1980 年代在巴黎給了一場演講, 我記憶猶新。演

⁵Andrew John Wiles (1953~), 英國數學家, 證明費馬最後定理, 1997 年及 2016 年分獲沃爾夫獎及阿貝爾獎。

⁶Godfrey Harold Hardy (1877~1947), 英國數學家, 對分析及解析數論有重大貢獻, 影響深遠。1913 年發掘拉馬努金 (Ramanujan) 的才華, 之後兩人展開合作。

⁷Srinivasa Ramanujan (1887~1920), 印度數學家, 未受過正規高等數學教育, 熱衷數論, 慣以直覺推導公式, 諸多理論由後人提出證明, 留下的公式引發大量研究。他的生平在 2015 年拍成電影《天才無限家》。

⁸志村五郎 (Goro Shimura, 1930~2019), 日本數學家, 1957 年與谷山豐提出谷山-志村猜想, 1960 年代構建志村簇。他對數論、算術幾何、自守形式有開創性貢獻。

⁹Gerhard Frey (1944~), 德國數學家。他在 1985 年建構的 Frey 曲線, 是費馬最後定理證明的一個關鍵。

¹⁰Kenneth Alan Ribet (1948~), 出生於美國, 任教於加州大學柏克萊分校, 研究代數數論與代數幾何。他在 1986 年證明 Serre 的 ϵ 猜想, 是費馬最後定理證明的一個關鍵。

講廳裡，我坐在井草準一¹¹ (Jun-ichi Igusa) 旁邊；他非常興奮地聽著 Ribet 的演講，說道：「喔，好！如果你能把這橢圓曲線與模形式關聯起來，就搞定了。」「喔，志村五郎和谷山豐真厲害。」我對他說：「你只是把一個困難的猜想轉化為另一個困難的猜想，為什麼會這麼開心？」他被我惹惱，說道：「數學家不應該持這種態度！」不論如何，我自昔至今都對解決別人提出的難題興趣不大，因此我當下覺得自己永遠不會嘗試它。但井草準一是另一種人，他被深深打動。

劉：谷山豐是否試圖將代數和分析的東西在隱晦的意義下聯繫起來？

H：沒錯。數論 (number theory) 是唯一名稱中有「理論 (theory)」的數學分支。實際上，它沒有理論，只是一堆難題的集合。為了解決這些問題，數論學家竭盡所能地利用可用的工具，未必是分析，也未必是代數。Langlands¹² 其中一項貢獻是將調和分析 (兼具表現理論的技巧) 引介到數論；而 Erdős¹³ 的貢獻或許是引入統計的思維方式。因此數論涵蓋了一切。換句話說，我們沒有自己的理論，須要融合他者。數論的主要任務是解決難題。

劉：谷山提出問題時還很年輕。在那之前，他就認識 André Weil¹⁴。我剛好有看過一篇文章¹⁵；我想你一定知道這篇文章。

H：是的，我知道日文版的。

劉：沒錯，最初是以日文發表。

H：這是非常早期發表於 Sugaku¹⁶ 的一篇文章¹⁷。

劉：就年輕人而言，能寫這樣的文章令人驚嘆。某種意義下，他實際上批評了 André Weil。早年志村曾描述過谷山；谷山非常年輕就融會貫通了許多數學知識，讓他十分訝異。你對谷山有何印象？

H：我熟識志村，但未曾見過谷山。他英年早逝，但我從志村那裡聽到一些故事。這兩位數學家有著完全不同的性格。谷山的數學很強，但總是活在夢想裡，有時拙於精確陳述事情。志村不太作夢，但一旦他得知了想法，就會持續推進。所以他們是很好的組合。這兩個人不僅是朋友，也是敵人。如你所知，一位數學家著實很強時，朋友往往也同時是敵人。顯然你不可能與這麼強的人始終好好相處。我的意思是，有時你會對他的夢想感到不悅，半信半疑但不

¹¹井草準一 (Jun-ichi Igusa, 1924~2013)，日本數學家，曾在約翰霍普金斯大學任教近四十年，對代數幾何與數論貢獻卓著，有以他的名字命名的 Igusa zeta 函數、Igusa 曲線、Igusa 簇。

¹²Robert Phelan Langlands (1936~)，現任普林斯頓高等研究院教授，1967 及 1970 年提出 Langlands 綱領，聯繫起數論、表現理論、調和分析等，1996 年及 2007 年分獲沃爾夫獎及阿貝爾獎。

¹³Paul Erdős (1913~1996)，匈牙利籍數學家，研究領域涵蓋組合數學、圖論、數論、古典分析、逼近理論、集合論和機率論。

¹⁴André Weil (1906~1998)，法國重要數學家，對數論和代數幾何有基礎性貢獻，創辦並領導 Bourbaki 團隊。

¹⁵參見 <https://www.ams.org/journals/bull/2009-46-04/S0273-0979-09-01270-1/S0273-0979-09-01270-1.pdf>

¹⁶日本數學會所發行之《數學》期刊。

¹⁷Sugaku, 1956 年 7 卷 4 號, 268-272, 問題 12。

想明說。那些想法或將沉浸在你的腦海深處，之後腦海迸現出一些東西，讓你想再次與他交談，而他自然很高興。他們就這樣成了朋友。志村和 André Weil 的關係或許也是如此。志村很尊敬 André Weil，但也時常公開批評他；Weil 對志村亦如是。在佛教和印度教，人們會輪迴轉世重生；有人問 Weil：「如果這是真的，你來世想成爲什麼？」Weil 說他想當中國人屋裡的貓。爲什麼呢？中國人的屋子裡有很多東西可以閱讀。Weil 會多種語言，諸如梵語、葡萄牙語；但或許他遺憾自己無法將中文運用自如。另一方面，志村能隨心所欲地閱讀中文（我也擅長於此）。他曾告訴我，普林斯頓大學的圖書館裡，收藏許多中國古典文學作品和大量的中文書籍。他問我：「你讀過一些嗎？」我回答：「我在普林斯頓時，差不多讀過一百本左右。」他說，一百本？接著他說，他幾乎讀了三遍了！或許他也同樣告訴 André Weil 這些，讓 André Weil 有些忌妒。當然這是我的揣測；我在 Weil 對志村的一些回應中感覺到某些批評，但這是我的猜測，我其實不知道。

劉：講得精采。有位從事數論的人告訴我，志村思考過某個特殊的東西，但不清楚爲什麼他要思考它。結果這東西至關緊要，像是志村簇 (Shimura variety) 之類的。你有這種印象嗎？爲什麼志村要探討這個特殊的東西呢？

H：志村說過，他意圖創建某樣東西時，就像射一枝箭；但顯然錯失了目標時，該如何是好？只好將靶做大，好讓箭正中靶心。我相信這就是志村所描述的志村簇。或許他打算解某個我不知道的問題，但起初與目標相距甚遠，所以他把東西做得更大，才好打中靶心。

謝：肥田教授，你何時開始對數學產生興趣？

H：我到大三才對數學產生興趣。在那之前，我對任何事物都沒什麼興趣。儘管如此，我著迷於閱讀日本、中國及各地經典。我很小就能讀日文、法文、德文和英文，因此大量閱讀。這很有趣，就像重活了別人的人生，但那並非人生的目的。不知怎地，我非常聰明，什麼入學考試都能通過，通常是勉強通過，但無論如何都會通過，幾乎沒失手過。雖然我未曾爲考試做準備，但已自然而然學了大量事物。我就讀京都大學的頭兩年，大學因爲共產主義學運而關閉；當時的京都大學十分激進。所以頭兩年我沒上過課，一點都沒有。那麼我做些什麼？我教許多高中生成功考取京都大學（奇怪的是，大學持續舉辦入學考試），因而獲得豐厚的報酬，十分富裕（而我的家庭也很富裕）。我很有錢，也大量花錢，沒有做任何有意義的事情。那時我主修化學，這意味你需要做很多實驗才能畢業。到了大三，學校突然開學（驅逐了激進的學生後）。學校決定奉送每位學生前兩年的學分，而我需要在兩年內以體面的方式畢業。我思忖：能做什麼？化學？沒辦法。此時，我有個朋友是數學迷，他參加一些研究生私下辦的研討會，其中之一在討論偏微分方程。他自己則想成爲拓樸學家。他建議我參加這個偏微分方程

討論會。他們在讀一本 Hörmander¹⁸的書，我一無所知，但我的朋友問我書中一些定理的涵義。我說：「你問我這個？我不懂數學。」他說：「嗯，你比我聰明許多，你可以的。」於是，我開始研究分析。幾週內，我反覆研習 L. Schwartz¹⁹的《Cours d'analyse》和一些 Bourbaki 的代數，於是乎 Hörmander 的書變得十分有趣，我也開始在討論會上推導一些證明。當時我念過的數學書籍只有 Bourbaki 的《Algèbre》和《Algèbre Commutative》，以及 Hörmander 線性偏微分方程的書，我就是這樣起步的。接著我認識了土井²⁰(Doi)，他非常有趣，最重要的，他是不可思議的數論人。當他發現一些數論上的東西時，會欣喜若狂，接著多半會開始喝清酒，而後整晚邊喝酒邊談數學。何其快樂啊！我從未見過這種人。我想：數學如此令人上癮，我不妨試試。這是我研究數論的開端。

謝：所以你跟著土井攻讀博士學位？或者？

H：不。志村可能沒有博士學位，谷山應該也沒有，這種狀況在當時的日本並不罕見。因為這兩人那般前衛，而日本教育體系如此僵化。當時他們與老派教授格格不入，似乎和兩位教授起過爭執。他倆或許都不見容於菁英教育體系，不得不在文理學院教些程度較低的大學課程（東京大學當時有兩個校區：一個專司文理學科；另一個從事高等研究），後來，志村不得不轉赴大阪大學。我雖沒抗爭過，但總像個局外人。我通常和土井約在酒吧討論，而非在數學系館。從此我大量喝酒。土井能喝下一大瓶日本清酒，我當年也毫不遜色。我們就這樣以非傳統的方式成為好友（不像教授和學生）。我進研究所時（再次勉強通過考試），他遠赴 Max Planck 研究院，在 Bonn 的數學所待了數年。此時我發現自己像個被孤立的局外漢，因為所有研究生都畢業於京都大學數學教室，曾主修數學。而我雖從京都大學畢業，但除了與森重文²¹(Mori) 聊過幾次外，很少和數學系的學生交談。之後吉田敬之²²(Hiroyuki Yoshida) 自普林斯頓返國擔任博士後；他曾是志村的學生，或許是當時唯一深入了解志村簇的人。當時我已大致念完志村在發表志村簇之前寫的文章，就去找吉田討論。修了兩年的碩士課程後，尚無博士學位，我就到北海道大學擔任博士後（在土井的幫忙下，他已自德國移居北海道）。如果你在大學畢業兩年後，早早得到了這樣一份工作，你會接受的，對吧？我意識到要有博士學位才能升等，所以和土井一起去詢問永田雅宜²³(Masayoshi Nagata)，他是京都大學代數組的負責人。他為我成立了博士學位委員會，由土方弘明²⁴(Hiroaki Hijikata) 教

¹⁸Las Hörmander (1931~2012)，瑞典數學家，1962 年、1988 年分獲菲爾茲獎、沃爾夫獎。他的著作《Analysis of Linear Partial Differential Operators, I - IV》被公認為線性偏微分算子領域的經典。

¹⁹Laurent Schwartz (1915~2002)，法國數學家，是分佈理論的奠基者，1950 年獲費爾茲獎。

²⁰土井公二 (Koji Doi)，立命館大學數學系教授，研究數論。

²¹森重文 (Shigefumi Mori, 1951~)，自 80 年代開始的三維代數簇方面的研究，確立了代數簇上的極小模型理論架構，影響了往後數十年代數幾何的發展。參見本刊第 33 卷第 4 期，「有朋自遠方來」專訪。

²²吉田敬之 (Hiroyuki Yoshida)，京都大學教授，研究數論及代數幾何。

²³永田雅宜 (Masayoshi Nagata, 1927~2008)，京都大學教授，研究數論及代數幾何。

²⁴土方弘明 (Hiroaki Hijikata)，京都大學教授，研究代數幾何。

授主持。當時我已發表了幾篇論文，因此拿到了博士學位。但我沒有指導教授。

謝：但你早期曾研究過伴隨 L 函數值 (adjoint L -values) 和同餘數 (congruence number)，而當時土井也在研究這些東西。

H：沒錯，但那不是我的博士論文。我的博士論文在探討志村曲線 (Shimura curves) 的 Jacobians 的 CM 因子分類。我的碩士論文也關乎 CM²⁵ 因子。大約在那時候，土井在數值上發現同餘質數，一如往常地非常興奮，問我：「一旦藉由質數，計算出頭幾個 Hecke 特徵值，發現同餘的數值，可以說所有 Hecke 特徵值都有此同餘性嗎？」當然，對於 weight 2 形式，正如 Ohta²⁶ 所證明，要確保所有特徵值的同餘性存在，可利用 Riemann-Roch 定理，找到第一特徵值所需個數的上下界。我告訴他，有個更容易的計算方式，可證明對所有 weight 都有效的同餘性存在，你只須將一些模形式寫成 Hecke 特徵形式的線性組合，找到起始形式的線性組合係數的分母，那就是同餘數，也就是對所有 Hecke 特徵值都有效的同餘性。他非常高興，接著又問我：「是否有辦法將分母移到某個值的分子？」我回答他：這個分母是伴隨 L 函數值 (或等價地，是起始形式的 self-Petersson 內積之代數部分)。這段談話讓他開始對我刮目相看。

謝：我明白了，但後來你持續研究伴隨 L 函數值迄今，伴隨 L 函數值似乎是你的一項主要研究主題。

H：這是因為我認為它是 L 函數值中最簡單的。

謝：因為你寫了許多關於這方面的文章，而且你在 1968 年的論文中，發現了大 Galois 表現 (big Galois representation) 的肥田族 (Hida family)。

H：1986 年。

謝：86，沒錯。在文章的最後，你將此 Galois 表現的 p -adic 族應用在伴隨值和同餘數。你是如何找出此大 Galois 表現的？你一開始如何得知此 Galois 表現 p -adic 族可以應用在這類問題上？

H：讓模形式和 Galois 表現形成一個族群？

謝：是的，你是如何想到要建構這個 Galois 表現族呢？因為當時並沒有這類...

H：1979 至 1981 年間，我待在普林斯頓高等研究院。話說大三那年的 12 月左右，我聽過志村的演講。美國數學學會 (AMS) 五月將發表我為志村寫的紀念文章，其中描述了我與他初次晤面的往事。當時我去東京教育大學 (現稱筑波大學) 聽志村演講。我對他的 CM 阿爾貝簇 (CM abelian variety) 的模早有深入的了解。演講結束後，博士班的學長被邀請到

²⁵即 Complex Multiplication。

²⁶太田雅己 (Masami Ohta)，日本東海大學教授，研究數論。

另一間小房間向他提問。雖然當時我還是個大學生，但也走進房間。志村儼然恪守原則的武士，望之生畏，房間裡的日本學生們更覺如此，因此一開始沒人提問。但我覺得這樣不大好，就開始提問，他也回答得很精采。接著又是一片尷尬的靜默。我決定再問一個問題，但這次問得不怎麼好，讓他有些激動（也許不是生氣）。他對我說：你的提問，是在嘗試為你的推測或白日夢獲取訊息，圖謀私利；這形同偷竊，道德上不圓滿。最後他說：「要做你自己的數學！」這讓我大為感動；天啊！要做自己的數學（我未曾以種方式看待數學）。因此我就開始做我自己的數學。其實志村對我的問題或許有點讚賞。幾年後，我的碩士論文對 Hilbert 模簇 (Hilbert modular varieties) 的中間 (intermediate) Jacobian 的 CM 因子進行了分類。這告訴我們一些週期關係，但這部分我沒有寫進論文。而志村當時正在處理更一般情況的週期關係。我寄給他我的結果，大概獲他賞識，因此贊助我赴普林斯頓高等研究院訪問，擔任研究院學者 (member)，儘管沒有博士學位。我就去了普林斯頓。

1979年我抵達普林斯頓時，志村對我說：「每星期來系館喝茶吧，我們聊聊 (chat)」。「聊聊」是什麼意思？他似乎沒教我什麼，我想或許這意味著我需要講些有趣的東西。喝茶時，他只是聽我報告，然後或許給些評論，或許告訴我他想到什麼，所以我需要創生出一些東西，或者說些什麼。有時會出現一些中國文學、日本文學或數學。我需要預先構想出新的想法，然後告訴他。當然他可能會說我的想法行不通，但無論如何，我需要每週都有產出。經由這些對談，我寫了三篇論文，包括81年關於同餘數的論文。第一年，我熬過這些會面。第二年，我得以展延訪問期限，因為那三篇論文在所裡深獲好評。

第二年過得辛苦。我開始對同餘數做更系統化的思考。我和 Langlands 談過。在他和 Harish-Chandra²⁷的理論中，提到 Hilbert 空間的自守形式 (automorphic forms) 的尖譜 (cuspidal spectrum) 是離散的；我問自己：何以是離散的？如果是離散的，你就無法從一處到另一處。如果想要有連續性，好從初始的自守形式得到其他自守形式的訊息，你就必須改變基底拓撲 (base topology)；這是我與 Langlands 交談後最早先的感想。更確切地說，何以阿基米德的情況為離散？因為我們的世界是弧連通的 (arcwise-connected)，內積的存在致使值譜 (spectrum) 離散，因此我認為基底拓撲必須為超度量 (ultra-metric)，才能得到連續值譜。於是我開始嘗試對給定的模形式做形變 (亦即，在超度量拓撲下連續移動模形式)。我曾和志村討論過這個想法，認為這可能會產生出類似岩澤理論 (Iwasawa theory) $GL(2)$ 型版本的東西。志村初次聽到時很高興。隔週，我告訴他類似的東西；他問我：「上週有做出其它東西嗎？」好吧，首先，這是個大工程，你無法在一週內做成，「這是當然，你無法一週內做成，但你應該有其他想法，而後會有各式各樣的想法，藉由這些，你能存活較久些。」這是他的做事方式：如果你射出的箭錯失了目標，那麼就把靶做大些；就是這樣的哲學。那是段艱辛的時期，但我逐漸發展出理論。

²⁷Harish-Chandra (1923~1983)，印度裔美國數學家，對表現理論中半簡單李群的調和分析有基礎性貢獻。

回日本後，我在 1981 年 12 月的證明了 1986 年發表的結果。我將初稿寄給志村，以及我在研究院認識的 Coates²⁸、Mazur²⁹ 等人，但似乎沒多少人相信我的結果，因為它是全然創新的。因此耗時四、五年才得以發表它。我們在巴黎舉辦了一場關於這個結果的研討會，與會者有我、Richard Taylor³⁰、Andrew Wiles 及 Coates 的一些年輕學生。我們實地閱讀了初稿。與會者或許有些是審察者，儘管我沒有任何實際證據。

謝：那是機密...

劉：但這故事應該記錄在案。

H：它就這麼出版了。1983 年到 1986 年間我待在巴黎，期間我們舉辦研討會，而這也是我受邀長期待在巴黎的主要目的及原因。某種意義下，志村的貢獻很大。他雖然未曾教我任何數學，但確實督促我有所作為。就如他最初所言：「要做你自己的數學。」這是他的原則，被他強加在我身上。

劉：他覺得你做得到，所以這麼考驗你，我想他不會對其他人這麼說。

H：在東京教育大學與他初結識時，如果我沒記錯的話，沒人問他嚴肅的問題，也許只有我這麼做。

謝：Mazur 的 Galois 形變理論是在你的論文之後發表的？

H：沒錯。我在巴黎時，大概是 1984 夏天，他到法國高等科學研究院³¹(IHÉS)，而我也剛從日本過去。我在 1983 年曾造訪巴黎，但後來回日本，1984 年再次造訪巴黎，待在法國高等科學研究院，直到 1986 年。那時是六月或七月，我記不清楚了。隔天一早，有人來敲我在法國高等科學研究院的公寓房門。「嗯？會是誰呢？」我開了門，Mazur 站在那裡。我告訴他：「我才剛到巴黎，隔天見。」次日，我到他辦公室聊天。我很暈，但他解說了他的形變理論。他說：「因為你的東西，我搞定了！」他非常興奮。我告訴他，對與初始 Galois 表現同餘的所有 Galois 表現，他賦予了它們一個自然排序。而後他取投影極限 (projective limit)，得到最廣 (universal) 的形變。我問他：「正確吧？」如果我沒記錯，他回答：「很大程度上」。結果這構造 (對後來的代數數論發展) 非常好用。那是段瘋狂歲月。

劉：他寫了一篇關於你的工作的論文，是吧？

²⁸John Henry Coates (1945~)，澳洲數學家，研究代數數論與算術幾何，致力引進 Iwasawa 理論到橢圓曲線，貢獻卓著。參見本刊第 26 卷第 2 期，「有朋自遠方來」專訪。

²⁹Barry Charles Mazur (1937~)，出生於美國，主要貢獻包括算術幾何中的 Mazur torsion 定理，幾何拓撲中的 Mazur swindle，及微分拓撲中的 Mazur 流形。

³⁰Richard Lawrence Taylor (1962~)，出生於英國，1995 年與 Andrew Wiles 協力解決費馬最後定理原先證明的疏失，之後對谷山志村猜想、一般線性群的局部 Langlands 猜想、Sato-Tate 猜想有卓越貢獻。

³¹1958 年由實業家兼數學家 Léon Motchane 創辦，為從事數學和理論物理尖端研究的機構，位於巴黎南郊。

謝: 好, 下一個問題關乎 p -adic 的模形式理論。 p -adic 的模形式理論是 Serre³²和 Katz³³在 70 年代初期發展的。在之後的 80 年代, 似乎並沒有太大的進展。看起來那段時期沒有人確實嘗試將 Katz 的想法推廣, 直到你發表關於凝聚上同調 (coherent cohomology) 的控制理論的論文。你何以決定藉由凝聚上同調來做這方面的研究呢? 我想在此之前你曾著手於拓樸的 Betti 上同調的控制定理?

H: 錯了, 順序相反。

謝: 喔! 較晚?

H: 拓樸方面的論文較早發表。Springer³⁴ 的出版速度比《*Annales Ecole Normale Scientifiques*》³⁵ 快, 所以你知道的這篇論文 1986 年發表在 Springer, 但 Ecole Normale 那篇處理凝聚上同調的論文較晚才發表, 雖然它較早被接受。Springer 那篇較快發表。順序正好相反。

謝: 在 80 年代, 並沒有太多人研究這種較高階群的 p -adic 模形式, 對吧? 我印象中是這樣, 但不太確定。

H: 我也不怎麼確定。

謝: 因為我只讀過你在 JIMJ³⁶ 發表的那篇論文。

H: 當然, 你知道, Serre 著手研究, 而 Katz 創建了理論。

謝: 是的, Gouvêa³⁷ 也是。

H: 沒錯, 他也是。對於較高階的群, 一旦給定初始資訊, 就不那麼棘手。那時我需要擴展我的理論, 讓它涵蓋那些具有志村簇的一般約化群 (reductive group), 而唯一的途徑要經由凝聚上同調, 因為 torsion 的出現使拓樸上同調群變得很難研究。所以唯一可行的方法是用 Katz 的策略。那並不難, 但沒有人像我一樣有動機這樣做, 顯然地, 我有動機且有足夠的才能去做。就這樣, 我後來寫了一本書。

謝: 你指的是黃皮書? 那本黃色書皮的書?

H: 第一本黃皮書。

³²Jean-Pierre Serre (1926~), 法國數學家, 對拓樸學、代數幾何及數論有重大貢獻。曾獲頒 1954 年的費爾茲獎及 2003 年的阿貝爾獎。

³³Nicholas Katz (1943~), 出生於美國, 任教於普林斯頓大學, 研究算術幾何、 p -adic 方法、模問題、Zeta 函數及各種 L -函數的零點。

³⁴總部位於德國的出版公司, 主要出版科學、技術、數學和醫學領域的教科書、學術參考書及評論性雜誌。

³⁵法國數學學會出版的法國數學科學雜誌。於 1864 年創辦, 主要發表與數學、物理、化學、生物學和地質學相關的文章。1900 年成爲一本純粹的數學期刊。

³⁶Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu.

³⁷Fernando Quadros Gouvêa (1957~), 巴西數學家, 任教於美國緬因州 Colby 學院, 研究數論、算術幾何及數學史。

謝：當時你有動機將東西推廣到較高階的群。那麼你是否也想過如何應用這些定理？

H：當時我建構了許多 p -adic L -函數。就像 Fabian³⁸ 目前在做的，一旦你能證明一個好的控制理論，或許就對更高階的群這麼做。但實際上我並沒有這麼做。沒往這個方向發展的首要原因，是我的多變數的 p -adic L -函數在當時很不受青睞，乏人問津。對於傳統岩澤 (Iwasawa) 理論而言，傳統的分圓 (cyclotomic) 變數已足夠。那是拜岩澤所賜。所以何苦增加變數呢？我感到很厭倦，後來不再構建 p -adic L -函數，但心力已付出。後來我發現自己可以證明其他的東西，譬如 q -展開 (q -expansion) 原理。這些事並非始料所及，因此我變得非常忙碌，沒再對 p -adic L -函數多做嘗試。現在一些年輕人著手於更大的約化群，試圖建構多變數的 p -adic L -函數 (遵循我曾經計畫過的途徑)。

謝：後來你發表了關於非零 L -函數值的論文。2004 年就有論文相關工作，2010 年發表在 *Annals*。在我看來，你改變了研究風格，著手於這些非零問題。

H：不。箇中關鍵是，1990 年代我與 J. Tilouine³⁹ 證明了反分圓的 (anticyclotomic) 單邊可除性，亦即將 Katz 反分圓的 L -函數值除以相對應的岩澤幕級數。而要證明反分圓的主要猜想，亦即等號成立，我需要 L -函數值非零。

謝：當時你證明了除了 μ -不變量之外成立的不等式。

H：我們證明 L -函數可整除特徵幕級數直至 p 次幕。至於反向的恆等式，我當時還無法處理。也因為 μ 的問題，我改變途徑，首先嘗試證明 $\mu = 0$ 。

謝：但那是 1993 年的事，約十年後你又重返這問題。

H：不。不。重點是我一直在研究自守式的此種完整性 (integrality)。如你所知，志村簇的整模型對此不可或缺。這是我寫那本黃皮書的原因；在書裡我提出了 p -adic 整理論，而不只建構了 p -adic L 函數，儘管這也是我寫書的目的之一。我確實做到了，儘管實際上很難決定 Katz p -adic L 的 μ -不變量。 μ 之所以為零是因深入使用了 Ribet 所證明的 q -展開原理，我在書中重證此事。這篇 μ -不變量的論文困難重重，耗時十年才得以發表。我犯了許多錯誤，翟敬立完善修正了一些，我也修正了其他一些，所以耗時良久才發表。其間的研究十分艱難。我寫的那篇探討非零模 (modulo) Hecke L 值之質數的論文，假設了這篇 μ -不變量論文的建構成立。這需要使用大量的算術幾何。敬立的協助不可或缺。

謝：我想我讀的是 2003 的版本，目前的版本與原始版本大有出入。

H：2001 年，我在新竹的數學研究所給了一場演講，敬立也在場。他指出一個錯誤，我們試著修正它。修正好之後，我又發現了其它錯誤，並進行了修正，耗時甚久。另一方面，早期的審稿

³⁸Fabian Januszewski, 本訪談的訪問者之一，任教於德國 Paderborn 大學。

³⁹Jacques Tilouine (1958~), 法國數學家，研究數論、自守式、岩澤理論。

者似乎毫無助益，其中一位甚至連文章的策略都不甚了解，因而曠日廢時。最後總算有了一位非常了解這篇論文的審稿者。

謝：起初或許沒有...

H：當時的編輯不是我以為的 Katz，而是 Andrew Wiles。Andrew 不很擅長這類型的算術幾何，所以沒能找到好的審稿者。後來 Andrew 對我說，他為此感到抱歉。其實沒有任何理由讓他向我道歉，因為我真是犯了大量錯誤。大多數錯誤並未被早期的審稿者察覺，都是敬立和我自己發現的。

謝：現在看來，你的結果和 Cornut⁴⁰-Vatsal⁴¹的結果是我們能證明 L -值非零的僅有例子。你認為你的方法能推廣到稍大一些的群嗎？還是依舊很困難？

H：我認為在 Hilbert 模簇的情況，Hilbert 模簇的維度等於反分圓 Katz p -adic L -函數的變數個數。此種巧合十分重要。一旦有了這種巧合，或許就能進一步推廣，涵蓋諸如一些具有特定符號的么正 (unitary) 群。

謝：喔！較高的正交群。

H：雙倍 (doubling) 法。志村簇 $U(n, n)$ 的維度為 n^2 ，而其對應的 p -adic L -函數會有 n 個變數，所以這或許行不通。但 $U(n, 1)$ 或許可行。我告訴許多 p -adic 分析學者這個想法，但他們似乎畏懼算術幾何。我也告訴很多算術幾何學家這個想法，但他們畏懼這麼巨大的群及 Langlands 理論。如果我的腦子足堪負荷 (我還有其他優先計畫)，我可以嘗試一下。

謝：所以沒有人真的著手於此。

H：據我所知是沒有。我可以做做看，但現在我痛恨耗時費力的工作，而它無疑是項艱鉅的工作。我喜歡 $GL(2)$ ，且我仍可為 $GL(2)$ 做很多事情。如果我能再活十年，或許會試試。但目前我還有很多事要做，所以不做它了。

謝： $U(n, 1)$ 可以一試。這也是明年會議的目標之一。這是非常重要的問題。

H：我認為 $U(n, 1)$ 是唯一的選擇。 $U(n, 1)$ 真是好。

謝：這顯然是非常重要的非零情況。現今大家建構許多與代數 cycle 有關的 p -adic L 函數，但卻沒有證明這些代數 cycle 非零，而這是證明它的唯一途徑。

H：那些相關的 0-cycle 是 CM 點的變種。但更高的上同調更為困難，沒有真正的已知方法可用。這也是研究分圓 μ -不變量的困難所在，亦即模符號的維度更高。因此這很困難。

謝：那是另一項難題了！

⁴⁰Christophe Cornut, 法國數學家, 任職於 CNRS, 研究數論、算術幾何。

⁴¹Vinayak Vatsal, 加拿大數學家, 任教於英屬哥倫比亞大學 (UBC), 以遍歷理論研究岩澤理論的橢圓曲線。

Fabian Januszewski (以下簡稱「J」): 據說 Poincaré⁴²每天僅花兩小時研究數學, 儘管他是位非常出色的數學家。

H: 沒錯。

J: 你寫了諸多重要文章, 還出版了七本教科書。我相信你還會有更多著作。你如何環繞著數學安排生活?

H: 我不知道, 但年輕時我可以像 Grothendieck⁴³那樣一天 24 小時做數學。一旦我覺得數學有趣, 就全然上癮, 會日以繼夜地做。但我並沒有寫很多論文, 因為我在日本的大學已有終身職。當時在日本任何一所大學, 升等基本上自動發生, 不需要有所產出, 所以我可以做許多有趣的事, 諸如詩歌等等, 也可以和土井一起喝清酒作樂。因此我的著作不多。後來我到加州大學洛杉磯分校 (UCLA), 發現大家競相寫論文。我想我當然也能如此, 於是就動手寫。當時我有庫藏充足的新結果。我之前在普林斯頓時, 開始鉅細靡遺地紀錄每一件感興趣的東西, 這是志村建議的。每週我與他會面時, 他不知何故都記得我一週前告訴他的每件事; 如果我持不同說詞 (有些不一致), 他就會指出來, 問我: 「你真的有做筆記嗎?」沒有, 我只是把它們從腦海中抓出來。他建議我將每個證明和所有細節都寫在筆記裡, 他說: 「有朝一日你會懂它的好。」因此我開始這樣做, 這些寫好的細節讓我輕易寫出論文, 非常快速。

J: 非常有效率的日本方式。

H: 志村另有值得一提之處。有人告訴我他有兩張桌子。他的辦公室確實是如此: 辦公室很大, 遠大於現在我們所在的這間, 前頭有一張大桌子, 後頭有另一張大桌子。他通常坐在後桌的後面; 有人造訪時, 他到前桌迎接客人, 而後桌之上放著他的手稿 (及一些著述)。因此, 訪客看不到他寫的任何東西 (如此他可保密)。我聽說他家裡也同樣有兩張大桌子; 我不知道是否屬實, 我從未進去過他家的辦公室。他的房子也很大。

他寫了許多艱深的論文, 用打字機在紙上打字。一旦手稿打好, 他將那厚厚的一疊紙扔到後面的桌子, 將它遺忘, 一年後再重新讀它。他以這種方式發現錯誤。再次閱讀時, 他發現自己多已忘記。這是他犯錯不多的主要原因。我自己並沒有這麼做, 寫完就發表, 所以犯了許多錯, 如果我能像志村那麼做, 就可以避免犯錯。他的紅皮書很厚一本, 其中只有一個錯誤, 而這無可避免, 因為他沒用概形理論 (scheme theory)。

J: 現在可以清楚地說他犯了個錯誤。近來, 但也不是太新近, 因為費馬最後定理的證明, 數論變得更受學生歡迎。你對年輕學子們是否有些建議?

⁴²Jules Henri Poincaré (1854~1912), 法國數學家, 對數學物理、天體力學有基礎性貢獻, 研究三體問題而發現混沌確定性系統。他也是拓樸學的奠基者, 提出 Poincaré 猜想。

⁴³Alexander Grothendieck (1928~2014), 法國數學家, 1966 年獲菲爾茲獎。他的工作拓展了代數幾何此一領域, 將交換代數、同調代數、層論以及範疇論的主要概念納入其基礎中。

H: 啊, 做你自己的數學吧! 如果學生做自己的數學, 拿到博士學位畢業, 指導教授會非常高興的。你不需要給他任何建議。

J: 沒錯, 我想你已經回答完這個問題了, 是吧? 回答好了。

謝: 是的, 已經完好了, 但我還有個額外的問題。現今在日本, 或這麼說, 在日本和台灣, 我知道剛畢業的博士很難找到工作, 數論方面更是如此。因此你對甫獲學位的博士是否有些建議? 該如何處理這種情況? 我認爲日本的情況或許更嚴重, 至少許多我認識的人是如此。他們最初甚至找不到博士後的工作, 需要撐過第一年的無薪狀況。你對此是否有些建議? 該如何面對這種狀況?

H: 我認爲這個問題無解。早年這些先進國家耗盡了世界資源。如果你的國家較早開發, 那麼就能存活久一些。這就是已開發國家現在相當富裕的原因。但局勢已變, 許多新國家進入了開發階段。過去已開發國家學生人數不多, 能提供工作給他們, 且人口較年輕, 因此教職數量持續增長。現在的情況恰好相反, 我的意思是, 那些已開發國家某種程度上剝削了開發中國家, 而這些開發中的國家現在也發展得很好; 另一方面, 這些先進國家自然會日漸衰敗, 因爲老人如此多。特別是日本, 如果你搭乘地鐵或巴士, 大多數人都像我這樣, 因此有許多提供給老人和婦女的博愛座, 我也可以坐; 有些人看起來年紀遠大於我。你知道的, 年輕人可能需要在開發中國家找工作, 是吧? 像是印度和中國之類的。現在中國大陸發展得非常好, 但似乎仍有許多工作機會。或許薪水低一些, 生活水平低一點, 但你需要付出代價才有收穫。我想這或許是唯一的辦法。以此方式, 開發中國家有較好的教師, 因而變得更好, 發展得更快。反觀已開發國家, 或將更往下坡走。

謝: 這和台灣的狀況類似, 很多做代數的人都在中國、甚至馬來西亞找到工作。

H: 沒錯。我造訪中國時, 遇到很多日本年輕人, 他們都在做博士後之類的, 這很好。

謝: 很長一段時間了。

H: 我認爲在日本之外的地方工作, 會讓日本人更具國際觀。日本人在精神上頗爲孤立, 毫無世界主義觀。這讓他們的文化非常獨特甚或有趣, 就如同我們訪談開始時所提。但這得付出代價; 他們太過日本化, 無法應付其他類型的人。因此我認爲離鄉背井或許對他們有益, 特別是有才華的人。我想他們也會因此而學會其他語言。

J: 的確。你是否同意這樣的觀點: 如果將科學視爲階層結構, 例如有學生、有研究生、有博士後、有助理教授、副教授和教授, 我的感想是, 這個畫面有個重大問題, 就是金字塔日益平坦。但我認爲它要陡峭些才較合理, 你明白我的意思吧?

H: 是的。但這階層結構基本上源自德國, 不是嗎?

謝: 德國的狀況最為嚴重。

H: 日本從德國引進這個系統, 所以有一個數論的正教授, 然後兩個助理/副教授, 接著或許是三或四個助理。

J: 但現在日本的狀況變了。

H: 沒錯, 沒有其他雇用年輕人的辦法。

J: 是的, 但問題是...

H: 正教授有龐大的辦公室。

J: 你認為我們需要的數學家數量, 會等同於現有的學生數量嗎?

謝: 那麼多數論學家...

H: 喔! 何其多...

J: 世界上有如此多博士生, 特別是數學方面, 比我們實際上的數學家還多。

H: 我認為諸如生化之類的東西, 學生數量... 當然, 他們有大量職缺。大部分純數或數論的博士生都知道自己無法賺大錢, 所以念博士與錢無關。因此我們仍占少數, 是吧?

J: 沒錯, 職場前景很差, 也沒有太多學生, 但和工作職缺相比仍算多。有許多教授, 數量龐大, 所以我印象中博士生人數仍持續增加。

謝: 的確, 台灣是這樣, 我就不清楚日本是如何了。

J: 教授人數幾乎沒什麼變化, 數論領域的教授甚或變少了, 因為數學本身較多元...

H: 因為年輕人的數量在減少, 因此必須限制教師的數量。日本無疑是如此, 所以無可奈何。或許繁榮的日子已不再。現在即使在中國, 年輕人口也因一胎化而下降, 而韓國平均每位婦女只有 0.9 個孩子...

謝: 台灣也一樣, 0.9。

H: 是的, 日本則差不多是 1.2。首先得處理這樣的問題, 對吧? 不然整個地球都成了老人世界。

謝、J: 好的, 非常感謝。

—本文訪問者劉太平、謝銘倫任職中央研究院數學研究所, Fabian Januszewski 任教德國 Paderborn 大學數學系—