數學傳播 43卷1期, pp. 89-98

對一道普特南數學競賽題的省思

鍾文體

1. 引入

普特南數學競賽是美國的大學生數學競賽, 全稱 William Lowell Putnam Mathematical Competition, 每年舉行一次。競賽後, 試題及解答刊載於美國數學月刊 (The American Mathematical Monthly)。一些試題非常新穎, 耐人尋味, 值得仔細揣摩。例如, 在 2000 年舉行的第 61 屆競賽中, 第一道試題如下:

Let A be a positive real number. What are the possible values of $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j^2$, given that $x_0, x_1, x_2, \ldots$ are positive numbers for which $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j = A$.

翻譯成中文, 就是:

設 A 是正實數, 給定正數 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ 且 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j = A$。問: $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j^2$ 的可能的值是什麼 ?

由比較判別法容易知道 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j^2$ 收斂, 這是教科書和習題集中經常出現的問題。但我們很少考慮 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j^2$ 可能取到哪些值。但這確實是一個有趣的問題, 值得認真思考。當筆者第一次見到這個問題時 (當時看專業書看得累了, 就看看這些題目作爲消遣), 就被它深深地吸引, 並且責備自己第一次學習級數時爲什麼沒有想到這樣的問題。(我現在覺得這個問題是很自然的, 既然 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j^2$ 收斂, 那它可能收斂到什麼值呢 ?)

首先, 容易知道 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j^2 < A^2$ (因爲 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j^2 < (\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j)^2$)。但是否一定能取到所有小於 A^2 的正數呢 ? 這就不是那麼容易回答了。

筆者思考了一段時間也無法解決這個問題, 索性去看答案 (這不是學習數學的正確方式, 但當時筆者還有其他更急迫的事情要做, 沒有這麼多的思考時間, 又很想知道問題的答案。所以看答案也屬無奈。)

解答很簡潔 (可見美國數學月刊 108 卷 (2001年) 841 ∼ 850 頁), 出乎筆者的意料。

先將解答敘述一遍。答案是: 小於 A^2 的所有正數。注意到 $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2$ 沒有最小正值。因爲和爲 A 的任何數列 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ 可被數列 $x_0/2, x_0/2, x_1/2, x_1/2, x_2/2, x_2/2, \ldots$ 代替。後者的和仍爲 A, 但它的平方和爲前者平方和的 $1/2$。另一方面, 給定任一和爲 A 的正數列 $\{x_j\}$, 考慮正數列 $\{y_j\}$, 其中$y_0 = tx_0 + (1-t)A$ 且對於 $j \geq 1$, $y_j = tx_j (0 < t < 1)$。顯然 $\sum_{j=0}^{\infty} y_j = A$, 且

$$\sum_{j=0}^{\infty} y_j^2 = t^2 \sum_{j=0}^{\infty} x_j^2 + 2t(1-t)x_0 A + (1-t)^2 A^2;$$

上式是 t 的連續函數。設它爲 $f_2(t)$, 則 $\lim_{t\to 0^+} f_2(t) = A^2$, $\lim_{t\to 1^-} f_2(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j^2$。由介值定理可知, 當 t 取遍 0 和 1 之間的所有值時, $f_2(t)$ 可取 $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2$ 和 A^2 之間的所有值。前面已說過 $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2$ 沒有最小正值, 於是我們可以下結論: 平方和的取值範圍至少包括 $(0, A^2)$。但由於 $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2 < A^2$, 故取值範圍恰好是 $(0, A^2)$。

讀完整個解答, 我非常激動, 并馬上意識到可以推廣到更一般的情形, 就是下面的結論。

性質 1: 設 A 是正實數, 給定正數 $x_0, x_1, x_2, \ldots$且 $\sum_{j=0}^{\infty} x_j = A$, 則 $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^{\alpha} (\alpha > 1)$ 的取值範圍是 $(0, A^{\alpha})$。

證明和上面的解答幾乎相同。先證 $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^{\alpha}$ 沒有最小正值 ($\alpha > 1$ 保證了這一點)。用數列 $x_0/2, x_0/2, x_1/2, x_1/2, x_2/2, x_2/2, \ldots$ 代替數列 $x_0, x_1, x_2, \ldots$, 則前者的和仍爲 A, 但它的 α 次方之和爲後者 α 次方之和的 $1/2^{\alpha-1}$ 倍。而 $1/2^{\alpha-1} < 1$, 故 $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^{\alpha}$ 沒有最小正值。

再考慮數列 $\{y_j\}$ (與上面的定義相同) 和連續函數

$$f_{\alpha}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j^{\alpha} = [tx_0 + (1-t)A]^{\alpha} + t^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} x_j^{\alpha},$$

由 $\lim_{t\to 0^+} f_{\alpha}(t) = A^{\alpha}$, $\lim_{t\to 1^-} f_{\alpha}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j^{\alpha}$ 即可證明此結論。

細心的讀者會發現我們還要證明 $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^{\alpha} < \left(\sum_{j=0}^{\infty} x_j\right)^{\alpha}$。如果 α 不是整數, 這似乎不太容易。我們再補充一下如何證明這一點。設 x, y 是正實數, 按照標準的微分法可證明 $x^{\alpha} + y^{\alpha} <$

$(x+y)^\alpha$。又由數學歸納法可證 $\sum\limits_{j=0}^{n} x_j^\alpha < \left(\sum\limits_{j=0}^{n} x_j\right)^\alpha$, 取極限得 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j^\alpha \le \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j\right)^\alpha$。這裏還要證明等號不成立。由 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j^\alpha \le \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j\right)^\alpha$ 得

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j^\alpha = x_0^\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} x_j^\alpha \le x_0^\alpha + \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\right)^\alpha < \left(x_0 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\right)\right)^\alpha = \left(\sum_{j=0}^{\infty} x_j\right)^\alpha,$$

這樣我們就完整地證明了性質 1。

我們知道, 當 $\alpha < 1$ 時, $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j$ 收斂到有限數不能保證 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j^\alpha$ 也收斂到有限數, 它有可能發散到 $+\infty$。但爲了擴充性質 1, 我們把這種情形也規定爲收斂, 叫做收斂到 $+\infty$, 再用 $(a,+\infty]$ 表示 $(a,+\infty)\bigcup +\infty$。

性質 2: 設 A 是正實數, 給定正數 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ 且 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j = A$, 則 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j^\alpha (\alpha < 1)$ 的取值範圍是 $(A^\alpha, +\infty]$。

性質 2 的證明與性質 1 類似, 先證 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j^\alpha$ 沒有最大值 ($\alpha < 1$ 保證了這一點)。與性質 1 不同的是, 當 $\alpha < 1$ 時, $x^\alpha + y^\alpha > (x+y)^\alpha (x, y > 0)$。與性質 1 類似的分析可得 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j^\alpha > \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j\right)^\alpha = A^\alpha$。具體的證明過程就不敘述了。

到這裏就結束了嗎？我意猶未盡。讓我們繼續探索。

2. $e^x - 1$

考慮 $e^x - 1$, 因 $e^x - 1 \sim x (x \to 0)$, 由比較判別法可知 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(e^{x_j} - 1)$ 收斂到有限數。我們同樣要問, $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(e^{x_j} - 1)$ 可取到哪些值？這看起來更難, 似乎無從下手。但可以肯定的是, $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(e^{x_j} - 1) > A$ (因 $e^x - 1 > x$, 故 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(e^{x_j} - 1) > \sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j = A$)。我們再給出它的上界。由性質 1, $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j^n < A^n$, 故

$$\sum_{j=0}^{\infty}(e^{x_j} - 1) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_j^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{\infty} x_j^n < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^n}{n!} = e^A - 1. \tag{1}$$

但它是否能取到區間 $(A, e^A - 1)$ 內的所有值呢？ 前面的經驗告訴我們, 答案應該是肯定的,

以下給出證明。

數列 $\{y_j\}$ 還是按上面的定義。考慮函數

$$F(t)=\sum_{j=0}^{\infty}(e^{y_j}-1)=e^{tx_0+(1-t)A}-1+\sum_{j=1}^{\infty}(e^{tx_j}-1)=\sum_{j=0}^{\infty}(e^{tx_j}-1)+e^{tx_0+(1-t)A}-e^{tx_0}$$

先證明它一致收斂。當 $t\in(0,1)$ 時, 由 (1) 有

$$\sum_{j=0}^{\infty}(e^{tx_j}-1)<\sum_{j=0}^{\infty}(e^{x_j}-1)<e^A-1.$$

由 Weierstrass M 判別法, $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(e^{tx_j}-1)$ 在 $(0,1)$ 上一致收斂, 從而連續。故 在 $(0,1)$ 上 $F(t)$ 是連續函數, 且 $\lim\limits_{t\to 0^+}F(t)=e^A-1$, $\lim\limits_{t\to 1^-}F(t)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}(e^{x_j}-1)$。於是, 當 t 取遍 0 和 1 之間的所有值時, $F(t)$ 可取 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(e^{x_j}-1)$ 和 e^A-1 之間的所有值。

爲了完成證明, 還要證明 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(e^{x_j}-1)$ 可充分接近 A。按照前面的思路, 我們先用數列 $x_0/2,x_0/2,x_1/2,x_1/2,x_2/2,x_2/2,\ldots$ 代替數列 $x_0,x_1,x_2,\ldots$。爲了方便, 以下用 $\{\widetilde{x_j}\}$ 表示這個新的數列 (即 $\widetilde{x_j}=x_{[j/2]}/2$), 則

$$\sum_{j=0}^{\infty}(e^{\widetilde{x_j}}-1)-A=\sum_{j=0}^{\infty}2(e^{x_j/2}-1)-\sum_{j=0}^{\infty}x_j=\sum_{j=0}^{\infty}[2(e^{x_j/2}-1)-x_j].$$

易知 $2(e^{x/2}-1)-x>0$, 若存在 $r\in(0,1)$, 使 $2(e^{x/2}-1)-x<r(e^x-1-x)$, 則

$$\sum_{j=0}^{\infty}(e^{\widetilde{x_j}}-1)-A<r\sum_{j=0}^{\infty}[(e^{x_j}-1)-x_j]=r\left[\sum_{j=0}^{\infty}(e^{x_j}-1)-A\right].$$

故 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(e^{x_j}-1)-A$ 沒有最小正值, 即 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(e^{x_j}-1)$ 可充分接近 A。以下證明這個 r 確實存在。

令

$$f(x)=\frac{2(e^{x/2}-1)-x}{e^x-1-x},$$

則

$$f'(x)=\frac{(x-e^{x/2}+1)(e^x-1)-x(e^{x/2}-1)}{(e^x-1-x)^2}.$$

從而

$$
\begin{aligned}
f'(x) < 0 &\Leftrightarrow (x - e^{x/2} + 1)(e^x - 1) - x(e^{x/2} - 1) < 0 \\
&\Leftrightarrow (x - e^{x/2} + 1)(e^x - 1) < x(e^{x/2} - 1) \\
&\Leftrightarrow x - e^{x/2} + 1 < \frac{x}{e^{x/2} + 1} \Leftrightarrow xe^{x/2} < e^x - 1.
\end{aligned}
$$

再令 $h(x) = e^x - 1 - xe^{x/2}$, 則 $h'(x) = e^x - (1 + x/2)e^{x/2} = e^{x/2}[e^{x/2} - 1 - x/2] > 0 (x \neq 0)$。於是 $x > 0$ 時, $h(x)$ 遞增, 從而 $h(x) > h(0) = 0$, 即 $f'(x) < 0$。故 $x > 0$ 時, $f(x)$ 遞減, 從而 $f(x) < \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1/2$。於是, $2(e^{x/2} - 1) - x < 1/2(e^x - 1 - x)$, 取 r 爲 $1/2$ 即可。這就證明了整個結論, 我們把它寫成下面的性質。

性質 3: 設 A 是正實數, 給定正數 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ 且 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j = A$, 則 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} (e^{x_j} - 1)$ 的取值範圍是 $(A, e^A - 1)$。

結論非常有趣, 這促使我研究其他例子, 以期發現一般化的結論。

3. $\sin x$

我們再來看看 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \sin x_j$ 的範圍。因爲 $\sin x \sim x (x \to 0)$, 所以 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \sin x_j$ 收斂到有限數。先給出它的上界。因 $\sin x < x (x > 0)$, 所以 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \sin x_j < \sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j = A$。對於下界, 不太容易給出。爲了方便討論, 先假設數列 $\{x_j\}$ 的和 A 滿足 $0 < A \leq 2\pi$。則 $\sum\limits_{j=0}^{n} x_j < 2\pi$ 且 $0 < x_j < 2\pi, j \in \mathbb{N}$。再給出以下引理。

引理 1: 設 $x, y \geq 0$, 且 $x + y \leq 2\pi$, 則 $\sin(x + y) \leq \sin x + \sin y$。

證明: 首先

$$
\sin(x + y) = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x + y}{2},
$$
$$
\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}.
$$

由 $\frac{x+y}{2} \in [0, \pi]$, 得 $\sin \frac{x+y}{2} \geq 0$。又因 x, y 對稱, 故可令 $x \geq y$, 於是 $\frac{x+y}{2} \geq \frac{x-y}{2}$。但 $\cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上爲減函數, 得 $\sin(x + y) \leq \sin x + \sin y$。

由引理 1 和數學歸納法可得 $\sin\left(\sum\limits_{j=0}^{n} x_j\right) \leq \sum\limits_{j=0}^{n} \sin x_j$, 再取極限, 令 $n \to +\infty$ 得

$\sin\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty}x_j\right)\le\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$。這裏還要說明等號不成立, 我們來證明這一點。

因 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}x_j$ 收斂到有限數, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=n}^{\infty}x_j=0$。於是存在 n_0 使得 $\sum\limits_{j=n_0}^{\infty}x_j\in(0,\pi/2)$. 又由 $x_j>0$ 得 $x_{n_0}\in(0,\pi/2)$, $\sum\limits_{j=n_0+1}^{\infty}x_j\in(0,\pi/2)$, 故 $\cos x_{n_0}<1$ 且 $\sin\left(\sum\limits_{j=n_0+1}^{\infty}x_j\right)\neq 0$。從而

$$\begin{aligned}\sin\left(\sum_{j=n_0}^{\infty}x_j\right)&=\sin\left(x_{n_0}+\sum_{j=n_0+1}^{\infty}x_j\right)\\&=\sin x_{n_0}\cos\left(\sum_{j=n_0+1}^{\infty}x_j\right)+\cos x_{n_0}\sin\left(\sum_{j=n_0+1}^{\infty}x_j\right)\\&<\sin x_{n_0}+\sin\left(\sum_{j=n_0+1}^{\infty}x_j\right)\le\sin x_{n_0}+\sum_{j=n_0+1}^{\infty}\sin x_j\\&=\sum_{j=n_0}^{\infty}\sin x_j.\end{aligned}$$

上式中有一個不等式嚴格成立, 所以, 實際上就是 $\sin\left(\sum\limits_{j=n_0}^{\infty}x_j\right)<\sum\limits_{j=n_0}^{\infty}\sin x_j$。於是

$$\begin{aligned}\sin\left(\sum_{j=0}^{\infty}x_j\right)&=\sin\left(\sum_{j=0}^{n_0-1}x_j+\sum_{j=n_0}^{\infty}x_j\right)\le\sum_{j=0}^{n_0-1}\sin x_j+\sin\left(\sum_{j=n_0}^{\infty}x_j\right)\\&<\sum_{j=0}^{n_0-1}\sin x_j+\sum_{j=n_0}^{\infty}\sin x_j=\sum_{j=0}^{\infty}\sin x_j.\end{aligned}$$

這就證明了我們的斷言。於是, 當 $0<A\le 2\pi$ 時, $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$ 只能在 $(\sin A, A)$ 內取值。以下證明 $(\sin A, A)$ 恰好是 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$ 的取值範圍 (在 $0<A\le 2\pi$ 的條件下)。

和上面一樣, 考慮數列 $\{y_j\}$ 和函數

$$G(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\sin y_j=\sum_{j=0}^{\infty}\sin tx_j+\sin(tx_0+(1-t)A)-\sin tx_0,$$

因 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\sin tx_j|\le\sum\limits_{j=0}^{\infty}|tx_j|\le\sum\limits_{j=0}^{\infty}x_j$, 故 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin tx_j$ 在 $(0,1)$ 上一致收斂。於是 $G(t)$ 在 $(0,1)$ 上連續, 且 $\lim\limits_{t\to 0^+}G(t)=\sin A$, $\lim\limits_{t\to 1^-}G(t)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$。從而當 t 取遍 0 和 1 之間的

所有值時, $G(t)$ 可取 $\sin A$ 和 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$ 之間的所有值。剩下的就是證明 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$ 可充分接近 A 了。

用數列 $\{\widetilde{x_j}\}$ 代替原來的數列 $\{x_j\}$, 則

$$A-\sum_{j=0}^{\infty}\sin\widetilde{x_j}=\sum_{j=0}^{\infty}x_j-\sum_{j=0}^{\infty}2\sin\frac{x_j}{2}=\sum_{j=0}^{\infty}(x_j-2\sin\frac{x_j}{2}),$$

按照第二節的思路, 若存在 $r\in(0,1)$, 使 $x-2\sin\frac{x}{2}<r(x-\sin x)$, 則證明就完成了。爲此, 考慮函數

$$g(x)=\frac{x-2\sin\frac{x}{2}}{x-\sin x}(x>0).$$

但我通過電腦繪圖, 發現 $g(x)$ 有大於 1 的值。所以, 不能照搬第二節的方法, 需要更細緻的分析。

易知 $g(x)>0(x>0)$ 且 $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=1/4$, 於是存在 $\delta>0$, 當 $x\in(0,\delta)$ 時, $0<g(x)<1/2$。我們不妨設數列 $\{x_j\}$ 滿足 $0<x_j<\delta, j\in\mathbb{N}$ (否則, 取 $N\in\mathbb{N}$ 使 $A/N<\delta$, 再用數列

$$\underbrace{x_0/N,\ldots,x_0/N}_{N},\underbrace{x_1/N,\ldots,x_1/N}_{N},\ldots\ldots\ldots\ldots$$

代替數列 $\{x_j\}$ 即可), 則 $g(x_j)<1/2$, 即 $x_j-2\sin\frac{x_j}{2}<\frac{1}{2}(x_j-\sin x_j)$, 從而

$$A-\sum_{j=0}^{\infty}\sin\widetilde{x_j}<\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}(x_j-\sin x_j)=\frac{1}{2}(A-\sum_{j=0}^{\infty}\sin x_j),$$

這樣就完成了整個證明。我們把這個結果寫成以下的性質。

性質 4: 設實數 A 滿足 $0<A\le2\pi$, 給定正數 $x_0,x_1,x_2,\ldots$, 且 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}x_j=A$, 則 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$ 的取值範圍是 $(\sin A,A)$。

由後半部分的分析, 還可得到以下性質。

性質 5: 設 A 是正實數, 給定正數 $x_0,x_1,x_2,\ldots$且 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}x_j=A$, 則 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$ 可取區間 $(\sin A,A)$ 內的所有值。

有趣的是, 若 $A>2\pi$, 則 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$ 可能會取到區間 $(\sin A,A)$ 外的值。例如, 取和爲 3π 的數列 $\{x_j\}$ 並且滿足 $x_0=3\pi/2, x_1=5\pi/4$, 則 $\sum\limits_{j=2}^{\infty}x_j=\pi/4$。由性質 4, $\sum\limits_{j=2}^{\infty}\sin x_j$

的取值範圍是 $(\sqrt{2}/2, \pi/4)$。故不妨設 $\sum\limits_{j=2}^{\infty}\sin x_j=\sqrt{2}/2+\varepsilon$ (ε 充分小)。於是 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j=\sin x_0+\sin x_1+\sum\limits_{j=2}^{\infty}\sin x_j=-1+\varepsilon$。只要 ε 充分小, 就有 $-1+\varepsilon\notin(\sin 3\pi, 3\pi)$。

性質 4 中 A 的範圍不能再放寬了, 可見後面的說明。若 A 取大一些, 性質 5 中的結論能否更加精確化呢 ? 以下, 我們就來做這個工作。

考慮正項數列 $\{y_j^{(n)}\}$, 滿足當 $0\le j\le n-1$ 時, $y_j^{(n)}=tx_j+(1-t)A/n$, 當 $j\ge n$ 時, $y_j^{(n)}=tx_j$, 其中 $t\in(0,1)$, 則 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}y_j^{(n)}=A$。令

$$G_n(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\sin y_j^{(n)}=\sum_{j=n}^{\infty}\sin tx_j+\sum_{j=0}^{n-1}\sin(tx_j+(1-t)A/n).$$

類似前面的分析, $\lim\limits_{t\to0^+}G_n(t)=n\sin\frac{A}{n}$, $\lim\limits_{t\to1^-}G_n(t)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$。從而當 t 取遍 0 和 1 之間的所有值時, $G_n(t)$ 可取 $n\sin\frac{A}{n}$ 和 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$ 之間的所有值。又因 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$ 可充分接近 A, 故 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$ 可取區間 $(n\sin\frac{A}{n}, A)$ 內的所有值。再取所有 $n\sin\frac{A}{n}$ 的下確界, 得到以下結論。

性質 6: 設 A 是正實數, 給定正數 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ 且 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}x_j=A$, 則 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$ 可取區間 $(\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}n\sin\frac{A}{n}, A)$ 內的所有值。

以下用性質 6 來說明性質 4 中 A 的範圍確實不能再放寬了。取 $A=2\pi+\varepsilon(\varepsilon\in(0,2\pi))$, 則易知 $2\sin\frac{A}{2}=-2\sin\frac{\varepsilon}{2}<\sin\varepsilon=\sin A$, 故 $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}n\sin\frac{A}{n}<\sin A$, 於是, 根據性質 6, $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$ 可取區間 $(\sin A, A)$ 外的值。

接下來的疑問是性質 6 中的下界是否是最好的呢 ? 我們可證明下面的結論。

性質 7: 設 A 是正實數, 給定正數 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ 且 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}x_j=A$。若函數

$$F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n$$

在約束條件

$$x_1\ge0, x_2\ge0, \cdots, x_n\ge0, x_1+x_2+\cdots+x_n=L \tag{2}$$

下的最小值是 $\psi_n(L)$, 且 $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\psi_n(L)=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}n\sin\frac{L}{n}$, 則 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$ 的取值範圍是 $(\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}n\sin\frac{A}{n}, A)$。

先證明兩個引理。

引理 2: 函數 $\varphi(x)=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} n\sin\frac{x}{n}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是連續的。

證明: 由微分法容易證明當 $x\in(0,\pi]$ 時, $\sin x<n\sin\frac{x}{n}(n>1)$。故 $x\in(0,\pi]$ 時, $\varphi(x)=\sin x$, 從而在 $x\in(0,\pi]$ 上連續。再設 $x\in[k\pi,2k\pi](k\in\mathbb{N}^*)$, 則 $k\sin\frac{x}{k}\le 0$, 且 $n>2k$ 時, $n\sin\frac{x}{n}>0$, 故 $\varphi(x)=\min\limits_{n\le 2k} n\sin\frac{x}{n}$。於是 $\varphi(x)$ 在 $x\in[k\pi,2k\pi]$ 上連續。從而在 $(0,+\infty)$ 上連續。

引理 3: $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$ 的取值範圍是開集。

證明: 假設存在和爲 A 的正數列 $\{x_j^{(0)}\}$ 使得 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j^{(0)}=a$, 我們證明存在和爲 A 的數列 $\{x_j\}$ 使得 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$ 可取 a 的某一鄰域內的任一點。

因 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}x_j^{(0)}$ 收斂到有限數, 故存在整數 N, 使 $n>N$ 時, $x_n^{(0)}<\pi$。又因 $n>N$ 時, $x_n^{(0)}$ 不能全相等 (否則, 和爲無窮大), 故存在 $n_0>N$, 使得 $x_{n_0}^{(0)}\ne x_{n_0+1}^{(0)}$。爲方便敘述, 不妨將這兩項拿出來放在原數列的前面。故可設 $x_0^{(0)},x_1^{(0)}<\pi$ 且 $x_0^{(0)}\ne x_1^{(0)}$, 不妨再設 $x_0^{(0)}>x_1^{(0)}$, 我們堅持這些假設直到證明結束。

考慮正數列 $\{x_j^{(t)}\}$, 其中 $x_0^{(t)}=t(x_0^{(0)}-x_1^{(0)})+x_0^{(0)},x_1^{(t)}=t(x_1^{(0)}-x_0^{(0)})+x_1^{(0)}$ 且 $j>1$ 時, $x_j^{(t)}=x_j^{(0)}$ ($\frac{x_0^{(0)}}{x_1^{(0)}-x_0^{(0)}}<t<\frac{x_1^{(0)}}{x_0^{(0)}-x_1^{(0)}}$)。數列 $\{x_j^{(t)}\}$ 的和仍爲 A。引入函數

$$H(t)=\sin x_0^{(t)}+\sin x_1^{(t)},t\in I=\left(\frac{x_0^{(0)}}{x_1^{(0)}-x_0^{(0)}},\frac{x_1^{(0)}}{x_0^{(0)}-x_1^{(0)}}\right)$$

因 $0\in I$ 且 $H(0)=\sin x_0^{(0)}+\sin x_1^{(0)}$, 故只需證明存在 $H(0)$ 的某一鄰域, 使 $H(t)$ 可取到這一鄰域內的任一點即可。而這又只需證明 $H(0)$ 不是 $H(t)$ 的極值即可。以下證明這一點。

$$H(t)=2\sin\frac{x_0^{(t)}+x_1^{(t)}}{2}\cos\frac{x_0^{(t)}-x_1^{(t)}}{2}=2\sin\frac{x_0^{(0)}+x_1^{(0)}}{2}\cos\left(t(x_0^{(0)}-x_1^{(0)})+\frac{x_0^{(0)}-x_1^{(0)}}{2}\right)$$

由 $\frac{x_0^{(0)}+x_1^{(0)}}{2}\in(0,\pi)$ 可知 $\sin\frac{x_0^{(0)}+x_1^{(0)}}{2}\ne 0$。又由 $\frac{x_0^{(0)}-x_1^{(0)}}{2}\in(0,\pi/2)$ 可知 $H(0)$ 不是 $H(t)$ 的極值。

性質 7 的證明: 先證 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$ 不能取區間 $[\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} n\sin\frac{A}{n},A)$ 外的值。前面已經說明了 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j<$

A, 故只需再證 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j$ 不能取小於 $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} n\sin\frac{A}{n}$ 的值即可。

假設存在 $\{x_j\}$ 使得 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sin x_j=a<\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} n\sin\frac{A}{n}$。

對於 $\varepsilon<\frac{\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} n\sin\frac{A}{n}-a}{2}$, 存在 N_1, 使 $n>N_1$ 時, $\Big|\sum\limits_{j=0}^{n}\sin x_j-a\Big|<\varepsilon$, 所以 $\sum\limits_{j=0}^{n}\sin x_j<a+\varepsilon=\frac{\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} n\sin\frac{A}{n}+a}{2}$。

因爲 $\varphi(x)$ 是連續的, 故存在 $\delta>0$, 使 $|A_1-A|<\delta$ 時, $\Big|\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} n\sin\frac{A_1}{n}-\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} n\sin\frac{A}{n}\Big|<\varepsilon$, 所以 $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} n\sin\frac{A_1}{n}>\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} n\sin\frac{A}{n}-\varepsilon=\frac{\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} n\sin\frac{A}{n}+a}{2}$。

又因 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}x_j=A$, 所以存在 N_2, 使 $n>N_2$ 時, $\Big|\sum\limits_{j=0}^{n}x_j-A\Big|<\delta$, 於是 $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} n\sin\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}x_j}{n}>\frac{\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} n\sin\frac{A}{n}+a}{2}$。

於是, 取 $n>\max\{N_1,N_2\}$, 由性質 7 的假設, 有

$$\frac{\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} n\sin\frac{A}{n}+a}{2}>\sum_{j=0}^{n}\sin x_j=F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geq\inf_{n\in\mathbb{N}} n\sin\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}x_j}{n}>\frac{\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} n\sin\frac{A}{n}+a}{2}$$

得到矛盾。再由引理 3 知結論證完。

至於性質 7 中的假設是否成立, 一般情況下很難判斷。可以用 Lagrange 乘子法找到 F_n 的極值點, 結合 Sylverster 準則還可找到極小值點, 但很難確定最小值, 我們把這個困難留給有興趣和毅力的讀者。

當然, 我們還可以考慮其他的例子, 如 $1-\cos x$, $\frac{1-\cos x}{x}$, $\log(1+x)$ 等等。上面的方法包含了證明一般情形的思想與技巧。關於一般情形, 筆者有機會再另文探討。

致謝

感謝審稿人提出的寶貴意見, 使得本文有了很大的改進。引理 1 的巧妙簡潔的證明是審稿人提供的, 筆者原來的證明是轉化爲求多元函數在約束條件下的最值, 討論起來較繁瑣。特別感謝汪立民老師一直以來對作者的幫助。

—本文作者投稿時就讀於中國華南師範大學, 現爲北京師範大學研究生—