數學傳播　42卷1期, pp. 80-84

一道面積比公式的另證

連威翔

一、前言

在數學傳播 30 卷 2 期「換個觀點看三角形的四心」一文中 (見[1]), 作者證明了底下的面積比公式:

公式1: 設 H 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 則

$$\begin{aligned}&\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH\\&\quad=(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4):(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4):(b^4-c^4+2c^2a^2-a^4)\end{aligned}$$

隨後, 作者並利用公式 1 計算了三個例題。

但筆者發現, 作者使用公式 1 計算其中第三個例題時, 解題的過程較長些, 這促使筆者想找出是否有另外的方法來處理該例題。經過一番嘗試之後, 筆者也以另外一個方法得到相同的解。

此外, 筆者也透過與求解該例題同樣的手法證明了公式 1。以下, 筆者將分享自己的解題與證明過程, 希望可做爲 [1] 文的補充與對照。

二、例題的另解

在 [1] 中, 作者使用公式 1 所解的第三個例題如下:

例: 設 H 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 且 $\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH=1:2:3$, 求 $\triangle ABC$ 三邊長的比例值, 即 $a:b:c=$?

解: 請參考下圖

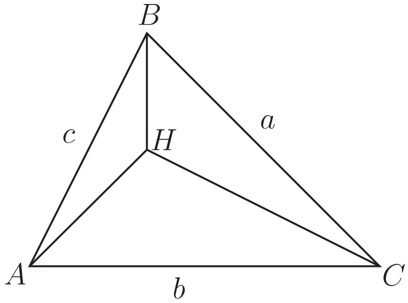

圖1

在上圖中, 因爲垂心 H 是三高的交會點, 我們可以將圖 1 中的三高還原如下圖：

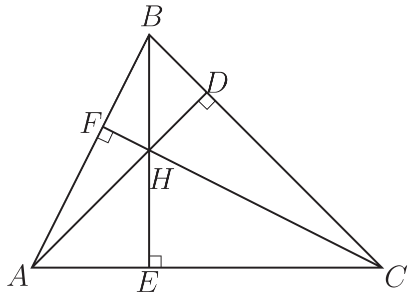

圖2

注意圖 2 中 $\triangle ABH$ 與 $\triangle ACH$ 共用底邊 $\overline{AH}$, 因此可得底下的面積關係 (面積比=高的比):

$$\triangle ABH : \triangle ACH = \overline{BD} : \overline{CD}$$

因此

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\triangle ABH}{\triangle ACH} = \frac{1}{3}$$

同理可知

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{3}{2}, \quad \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{2}{1}$$

因此可令

$$\overline{BD} = s, \quad \overline{CD} = 3s, \quad \overline{AF} = 3u, \quad \overline{BF} = 2u, \quad \overline{CE} = 2t, \quad \overline{AE} = t$$

則 $\overline{AB} = 5u$, $\overline{BC} = 4s$, $\overline{CA} = 3t$。由圖 2 知

$$\begin{aligned}
\overline{AD}^2 &= \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 \\
&\Rightarrow 25u^2 - s^2 = 9t^2 - 9s^2 \\
&\Rightarrow 8s^2 - 9t^2 + 25u^2 = 0 \qquad (1)
\end{aligned}$$

此外由圖 2 也有

$$\begin{aligned}
\overline{BE}^2 &= \overline{AB}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CE}^2 \\
&\Rightarrow 25u^2 - t^2 = 16s^2 - 4t^2 \\
&\Rightarrow 16s^2 - 3t^2 - 25u^2 = 0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

由 (1), (2) 可解得

$$\begin{aligned}
&s^2 : t^2 : u^2 = 5 : 10 : 2 \\
&\Rightarrow s : t : u = \sqrt{5} : \sqrt{10} : \sqrt{2} \\
&\Rightarrow \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 5u : 4s : 3t = 5\sqrt{2} : 4\sqrt{5} : 3\sqrt{10} = \sqrt{5} : \sqrt{8} : 3
\end{aligned}$$

或者寫成 $a:b:c=\sqrt{8}:3:\sqrt{5}$, 這與 [1] 中第三個例題的解答相同。

三、公式的另證

本節中, 筆者將以第二節例題的解題手法來證明公式 1, 證明如下:

證明: 請先參考下圖

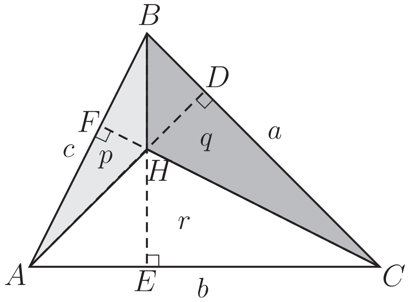

圖3

我們先假設

$$\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH=p:q:r$$

依照與第二節例題相同的原理, 可知 $\overline{BD}:\overline{CD}=p:r$, 因此可令

$$\overline{BD}=\frac{p}{p+r}\overline{BC}=\frac{pa}{p+r}$$
$$\overline{CD}=\frac{r}{p+r}\overline{BC}=\frac{ra}{p+r}$$

同理也可得

$$\overline{AF}=\frac{rc}{q+r},\quad \overline{BF}=\frac{qc}{q+r},\quad \overline{CE}=\frac{qb}{p+q},\quad \overline{AE}=\frac{pb}{p+q}$$

由圖 3 可知

$$\begin{aligned}
\overline{AD}^2 &= \overline{AB}^2-\overline{BD}^2=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2\\
&\Rightarrow c^2-\left(\frac{pa}{p+r}\right)^2=b^2-\left(\frac{ra}{p+r}\right)^2\\
&\Rightarrow c^2-a^2\left(1-\frac{r}{p+r}\right)^2=b^2-a^2\left(\frac{r}{p+r}\right)^2\\
&\Rightarrow c^2-a^2\left(1-\frac{2r}{p+r}\right)=b^2\\
&\Rightarrow c^2-a^2\left(\frac{p-r}{p+r}\right)=b^2\\
&\Rightarrow \frac{p-r}{p+r}=\frac{c^2-b^2}{a^2}
\end{aligned}\tag{3}$$

若 $b \neq c$, 由 (3) 我們可令 $p-r=(c^2-b^2)d$, $p+r=a^2d$, 其中 $d \neq 0$, 因此

$$\begin{aligned} p:r &= 2p:2r = [(p+r)+(p-r)]:[(p+r)-(p-r)] \\ &= [(c^2+a^2-b^2)d]:[(a^2+b^2-c^2)d] \\ &= (c^2+a^2-b^2):(a^2+b^2-c^2) \end{aligned} \tag{4}$$

若 $b=c$, 由 (3) 可知 $p=r$, 因此有

$$p:r=1:1=a^2:a^2=(c^2+a^2-b^2):(a^2+b^2-c^2)$$

此時 $p:r$ 同樣符合 (4) 式。

由圖 3 同理可知

$$\begin{aligned} &\overline{CF}^2=\overline{AC}^2-\overline{AF}^2=\overline{BC}^2-\overline{BF}^2 \\ &\quad \Rightarrow \frac{r-q}{r+q}=\frac{b^2-a^2}{c^2} \\ &\quad \Rightarrow q:r=(c^2+a^2-b^2):(b^2+c^2-a^2) \end{aligned} \tag{5}$$

將 (4), (5) 兩式分別改寫為

$$p:r=(c^2+a^2-b^2)(b^2+c^2-a^2):(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2) \tag{6}$$

$$q:r=(a^2+b^2-c^2)(c^2+a^2-b^2):(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2) \tag{7}$$

將上兩式合起來看, 就有

$$p:q:r=[c^4-(a^2-b^2)^2]:[a^4-(b^2-c^2)^2]:[b^4-(c^2-a^2)^2]$$

這樣就得到了公式 1 中的面積比, 即

$$\begin{aligned} &\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH \\ &\quad =(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4):(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4):(b^4-c^4+2c^2a^2-a^4). \end{aligned} \tag{8}$$

四、結語

重新看一次公式1的結論, 即 (8) 式, 我們可能會覺得奇怪的地方是, $\triangle ABH$、$\triangle BCH$、$\triangle CAH$ 三塊面積的因次是「長度的平方」, 但為何在 (8) 的右式出現的三項, 都是「長度的 4 次方」呢? 其實, 這是因為我們分別對 (4), (5) 進行擴分而得 (6), (7) 兩式時, 把 (4), (5) 這兩個 (因次) 原為長度平方的比改寫成了長度 4 次方比的緣故。想進一步了解因次概念的讀者, 不妨參考 [2]。

最後值得一提的是, 在第二節例題的解題過程中, 因為沒有用上公式 1, 對於較不偏好套用公式的讀者而言, 或許不失為一較直接的解法。

參考文獻

1. 劉俊傑。換個觀點看三角形的四心。數學傳播, 30(2), 28-39, 2006。
   Available from: http://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d302/30203.pdf.
2. 林琦焜。從量綱看世界。數學傳播, 33(3), 13-27, 2009。
   Available from: http://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d333/33302.pdf.

—本文作者投稿時任職於麥當勞竹南民權中心—

2017 全國技專院校「文以載數創作獎」作品選集

圓周率 文 / 方千豪

那千古的未解之謎,
去探究其幽深的邊際。
就連廣袤的蒼穹亦無法,
遮蔽它浩瀚無窮的原初之理。
自視甚高的數學家們前仆後繼,
皆徬徨於首尾相連的永劫迴廊裡。
趨之若鶩的賢者至今仍在追尋奇蹟,
僅為了觸及存在無窮之徑中的可能性。

僅為了觸及存在無窮之徑中的可能性,
趨之若鶩的賢者至今仍在追尋奇蹟。
皆徬徨於首尾相連的永劫迴廊裡,
自視甚高的數學家們前仆後繼,
遮蔽它浩瀚無窮的原初之理。
就連廣袤的蒼穹亦無法,
去探究其幽深的邊際。
那千古的未解之謎!

—本文作者就讀南臺科技大學應用日語系—