

## 本期演練試題

# 模擬試題

葉東進 提供

### 說在前面

許多人都說聯考試題領導高中數學教學，真是如此嗎？我以為你願意被它領導當然便會被拖着走，如果你不願意，它又能奈何你？數學教育有其一定的目標與原則，並不因為試題型式的變化就跟着變化，除非像補習班的，只是在教人應付考試（其實它們並不應付得比學校高明）而不是教數學，否則以不變應萬變才是教學的正途。

記得六十三年聯考試題中出現了一題關於遞迴數列的，結果呢？自此以後不論是參考書或是各校的模擬試題都一窩蜂的競出類似題，甚至有至走火入魔者，可諷刺的是自此以後的五年期間，連類似題都未曾出現一次。教師們是否該得着教訓了。

我覺得學校內的週考、月考、期考試題採用選擇題式是最無聊了，許多人都在喊說聯考試題採用選擇題式的不當並痛指造成的弊端，那麼為何校內的測驗還要採用選擇題式呢？計算證明題不好嗎？申論題甚至作文題不是也可偶而用來啓發學生的思路，訓練他們對知識的整理嗎？甚至填空題都比選擇題強很多！有些學校走火入魔到從高一開始便採選擇題式，以為如此便能熟悉聯考題式將來聯考時更能佔着便利，事實如何呢？以近幾年的聯考試題來看，佔有利的還是那些老老實實按部就班學習數學的人吧！那些平時不求甚解只想投機學些猜題技巧，二分鐘速解的鐵是沒轍了。本來麼，數學無捷徑，數學教育應讓學生體驗到此點。

另外，很多學校從歷年聯考試題內容的統計中，膽敢刪除教材中的某些部分，並一再強調那些歷年試題中較常出現者。本來麼，利用一些統計預測來圖些經濟利益也是人之常情無可厚非，可是我們並不只是在教學生應付考試而已，我們是在從事教育啊，因此，刪掉那些可能影響教材的連貫性，或可能在高等數學中被用到者，使得教材支離破碎，斷龍去脈總是不當吧。我倒希望聯考能給高中數學中的畸型教學一個重大的教訓。

還有一種情形是：有些教師對於教材的來龍去脈，定理的背景與證明一概不提，一站到臺上便是一大堆的例題表演，一學期下來，學生的筆記上盡是相同的一千多個解題，對於什麼數學方法，數學精神，學生當然是「毋知樣」啦！

教訓還不夠嗎？為什麼自己要被聯考試題牽着走？

最長的路程往往是距離目標最近的，高中生應該記着這句話。

注意：第一部分為自然組與社會組的共同試題，第二部分試題分開。每空格一律 4 分。

#### 第一部分：

- I 平面上有自然座標系  $S_0 \equiv (O; \vec{i}_1, \vec{i}_2)$  其上一點  $A(4, 3)$  今欲尋求一座標系： $S \equiv (A; \vec{u}_1, \vec{u}_2)$  使得平面上兩點  $P(1, 1)$  及  $Q(-2, 3)$  關於  $S$  的座標分別是  $(0, 2)$  及

$(-1, 1)$ ，則所找之  $S$  的基底  $\vec{u}_1$  與  $\vec{u}_2$  應為何？又直線  $x + y = 1$  關於  $S$  的方程式為何？

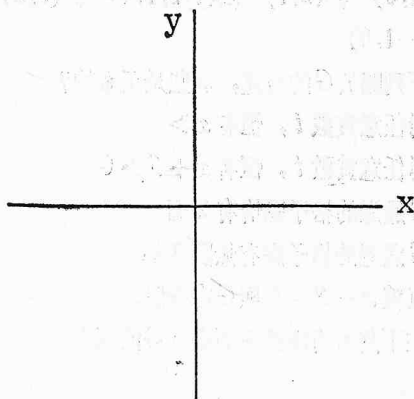
- II 以原點  $(0, 0)$  為中心的有心錐線，其方程式一般可寫為： $ax^2 + bxy + cy^2 + 1 = 0$  已知其圖形通過下列

三點:  $(-2, 3)$ ,  $(1, 4)$  及  $(2, 5)$ , 則它的方程式為何?

它的兩軸長分別是: \_\_\_\_\_。

它的離心率是: \_\_\_\_\_。

試在底下所附的座標平面上畫出它的圖形:



III 方程式  $x^2 + 2xy + 2y^2 + x + k = 0$  在座標平面上的圖形恰表一點時,  $k$  之值為何? 又此點的座標是: \_\_\_\_\_。

IV 今沿直線  $y = 2x$  的右上方方向作平行移動, 使得移動量(即長度)為 2 個單位, 則點  $P(2, -3)$  在此平移下, 移動到點  $Q$  時,  $Q$  之座標為: \_\_\_\_\_。

另外, 橢圓:  $(x-2)^2 + 2(y+3)^2 = 1$  則平移到另一橢圓, 該橢圓的方程式為: \_\_\_\_\_。

V 平面上兩條曲線

$$r_1: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$r_2: xy = 1$$

問: 是否存在一個圓, 而該圓通過  $r_1$  與  $r_2$  的所有交點?

不論你上述的回答為是抑或否, 你的理由是: \_\_\_\_\_

VI 已知一半圓  $C$ :

$$\begin{cases} x \leq y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad (\text{見附圖})$$

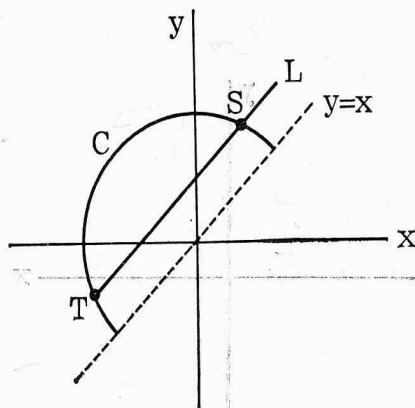
今有斜率為 1 的直線  $L$ , 令  $L$  截  $C$  得弦  $ST$ 。

假定要使弦長滿足:  $1 \leq \overline{ST} \leq 1.5$ , 那麼  $L$  的  $y$  截距  $k$  的取值範圍如何?

想法如下:

首先令  $L$  之  $y$  截距為  $k$ , 則以  $k$  表  $L$  的方程式是:

其次, 利用條件:  $1 \leq \overline{ST} \leq 1.5$  找出有關  $k$  的不等式, 解出不等式後, 便得到  $k$  的範圍是: \_\_\_\_\_。



VII 設實數  $x, y$  滿足條件  $x \geq 0, y \geq 0$  及  $x + 3y - 6 \geq 0$ , 在此條件下, 有函數  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ , 當  $x = x_0, y = y_0$  時有極小值  $Z_0$ , 則  $x_0 =$  \_\_\_\_\_,  $y_0 =$  \_\_\_\_\_,  $z_0 =$  \_\_\_\_\_。

第二部分: (社會組試題)

VIII 定義: 假定一直線  $l$  與曲線  $\gamma$  相交於點  $P$ , 過  $P$  所作  $\gamma$  的切線與直線  $l$  的夾角, 稱為  $l$  與  $\gamma$  在點  $P$  處的交角。

今有直線  $l: y = x$  與曲線  $\gamma: y = x^2$ , 知  $l$  與  $\gamma$  在第一象限有一個交點  $P$ , 則  $P$  的座標是: \_\_\_\_\_

又, 過  $P$  點的  $\gamma$  的切線方程式是: \_\_\_\_\_

令  $l$  與  $\gamma$  在點  $P$  處的交角為  $\theta (0 < \theta < 90^\circ)$ , 則  $\cos \theta =$  \_\_\_\_\_。

再考慮  $\theta$  的大小, 試由下列敘述中選出正確者:

- (A)  $\theta > 30^\circ$  (B)  $\theta > 45^\circ$  (C)  $\theta > 60^\circ$  (D)  $\theta > 75^\circ$
- (E)  $\theta < 30^\circ$

IX 考慮參數方程式

$$\begin{cases} x = 2^t \\ y = 2^{-t}, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

在座標平面上的圖形令為  $G$ , 問下列那些點是在  $G$  上? \_\_\_\_\_。

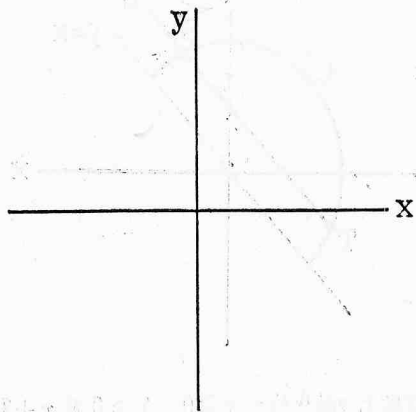
- (A)  $(1, 0)$  (B)  $(2, 1)$  (C)  $(1, 1)$  (D)  $(-1, -1)$

(E)  $(3, \frac{1}{3})$

又下列關於  $G$  的敘述, 那些是正確的?

- (A) 對於任意實數  $t$ , 恒有  $x > y$ 。
- (B) 對於任意實數  $t$ , 恒有  $x + y \geq 2$ 。
- (C)  $G$  通過的格子點 (座標為整數的點) 恰有 2 個
- (D)  $G$  通過的格子點有無限多個
- (E) 直線  $x = 0$  與  $G$  有交點

試在下列所附座標平面畫出  $G$  的圖形



X 寫出本學期的公式中你認為最重要者，並略述理由。

第二部分：（自然組試題）

VIII 定義：假定兩曲線  $\Gamma_1$  與  $\Gamma_2$  相交於點  $P$ ，過  $P$  所作的個別的兩切線的夾角，稱為  $\Gamma_1$  與  $\Gamma_2$  在點  $P$  處的交角。今有曲線  $\Gamma_1: x^2 + y^2 = 2$  與  $\Gamma_2: y = x^2$ ，知  $\Gamma_1$  與  $\Gamma_2$  在第一象限有一個交點  $P$ ，則  $P$  的座標是：\_\_\_\_\_。

又，過  $P$  點的  $\Gamma_1$  與  $\Gamma_2$  的兩切線方程式分別是：\_\_\_\_\_。

令  $\Gamma_1$  與  $\Gamma_2$  在點  $P$  處的交角為  $\theta$  ( $0 < \theta < 90^\circ$ )

則  $\cos\theta =$  \_\_\_\_\_。

再考慮  $\theta$  的大小，試由下列敘述中選出正確者

- (A)  $\theta > 30^\circ$  (B)  $\theta < 45^\circ$  (C)  $\theta < 60^\circ$  (D)  $\theta > 60^\circ$   
 (E)  $\theta > 75^\circ$

IX 考慮參數方程式

$$\begin{cases} x = \frac{10^t + 10^{-t}}{2} \\ y = \frac{10^t - 10^{-t}}{2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

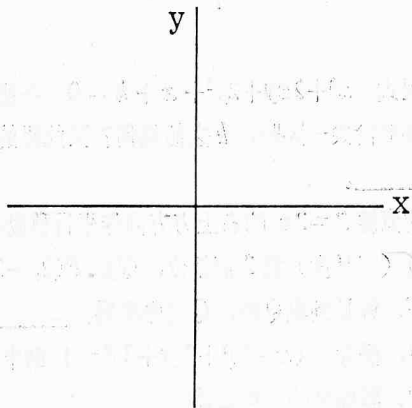
在座標平面上的圖形令為  $G$ ，問下列那些點是在  $G$  上？

- (A) (1, 0) (B) (2, 1) (C) (1/2, 1/4) (D) (0, 2)  
 (E) (-1, 0)

又下列關於  $G$  的敘述，那些是正確的？

- (A) 對任意實數  $t$ ，恒有  $x > y$   
 (B) 對任意實數  $t$ ，恒有  $x + y > 0$   
 (C)  $G$  通過的格子點恰有 2 個  
 (D)  $G$  通過的格子點有無限多個。  
 (E) 直線  $x - y = 0$  與  $G$  有交點。

試在下列所附座標平面畫出  $G$  的圖形。



X 寫出本學期所學的觀念中你認為最重要者，並略述理由。