數學傳播 40卷4期, pp. 63-70

回響: 兩個幾何問題的另解

連威翔

一、前言

在數學傳播第 28 卷第 3 期的文章「梯形內一塊四邊形面積的探討」中 (見[1]), 作者研究了底下的問題:

問題 1: 梯形 $ABCD$ 面積爲 1, 兩底之比 $\overline{BC}:\overline{AD}=1:2$, $\overline{AK}=\overline{KC}$, 求四邊形 $BCKL$面積爲何?

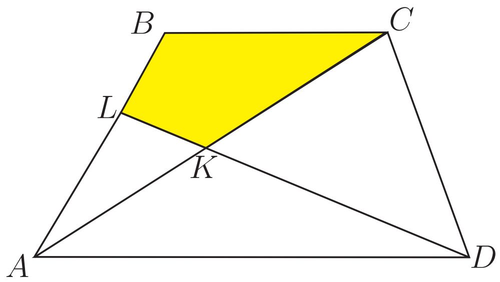

圖1

作者分別以平面幾何與解析法解出問題 1 後, 另透過動態幾何軟體 GSP, 仿照上述圖 1 畫出滿足 $\overline{BC}//\overline{AD}$, $\overline{BC}:\overline{AD}=1:2$ 且 $\overline{AK}=\overline{KC}$ 的動態圖形, 也畫出 $\triangle ABC$、$\triangle AKD$、$\triangle DKC$ 重心 G_1, G_2, G_3 所連成的 $\triangle G_1G_2G_3$, 如下圖:

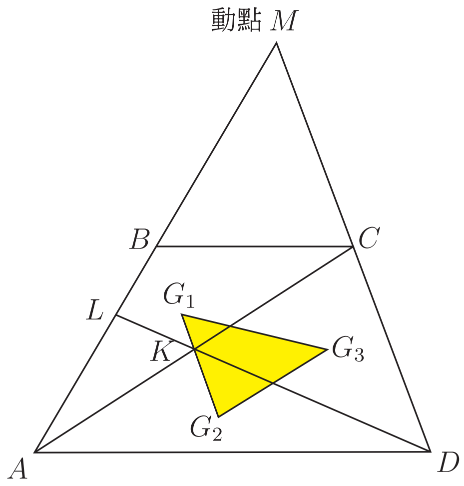

圖2

從該軟體計算面積功能的操作與對上圖的動態觀察當中, 作者發現兩個有趣的現象, 並在其後對此兩現象加以證明, 而成爲底下的兩個性質:

性質 1: $\overline{AC}$ 的中點 K 一定會在 $\overline{G_1G_2}$ 上。

性質 2: $\triangle G_1G_2G_3$ 之面積等於梯形 $ABCD$ 的 $\dfrac{1}{9}$。

此外, 作者也將問題 1 加以推廣, 成爲底下的問題 2:

問題 2: 梯形 $ABCD$, 上底 $\overline{BC}$ 和下底 $\overline{AD}$ 的比爲 $1:t$, $\overline{AK}:\overline{KC}=m:n$, L 爲直線 DK 和 $\overline{AB}$ 的交點, 則四邊形 $BCKL$ 的面積和原來梯形 $ABCD$ 的面積有何關係?

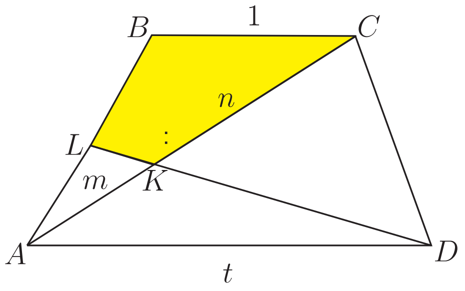

圖 3

作者採取與問題 1 相同的手法解出了問題 2。而文章的最後, 作者針對由圖 1 推廣而來的圖 3, 同樣取 $\triangle ABC$、$\triangle AKD$、$\triangle DKC$ 的重心 G_1, G_2, G_3 連成的 $\triangle G_1G_2G_3$, 如下圖:

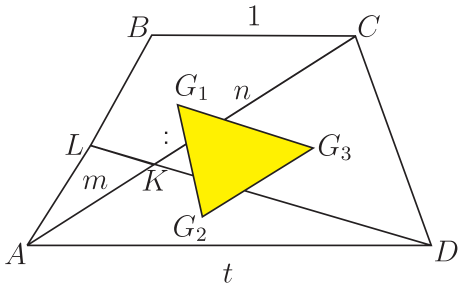

圖 4

作者也證明了圖 4 的 $\triangle G_1G_2G_3$ 滿足性質 2, 目的應該是要告訴讀者性質 2 並非只成立於圖 2 的情形, 也成立於圖 4 這種一般情形。

筆者以其他方法計算上述問題 1 與問題 2 後, 發現雖能算出, 但不如原作者所用的方法那樣簡潔。雖然如此, 筆者在證明圖 2 所滿足的性質1 以及一般情形的圖 4 所滿足的性質 2 時, 發現自己的方法與原作者的方法頗異其趣, 底下將分享這兩部份的解法, 也許可帶給大家不同的感受。

二、筆者的證明

第一部份: 在證明圖 2 滿足 [性質 1] 之前, 我們先將圖 2 中的 $\overline{G_1G_2}$ 抹除, 使其如下圖 5:

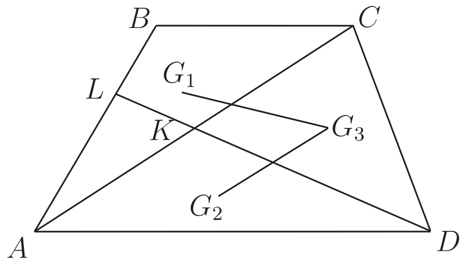

圖 5

我們想證明圖 5 中 G_1, K, G_2 共線。觀察 $\triangle ABC$, 使用三角形重心 G_1 的向量表示公式, 可知

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} \tag{1}$$

其中用到 $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AK}$ 的條件。同理, 觀察 $\triangle ADK$ 也可得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG_2} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK}\\ &= \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK}\\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AK}\end{aligned} \tag{2}$$

其中用到 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ 的條件。由 (1)×2+(2) 可得

$$\begin{aligned}&2\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{AG_2} = 3\overrightarrow{AK}\\ &\Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AG_2}\end{aligned} \tag{3}$$

因爲 (3) 式右側兩係數非負且和爲 1 (這是 K 在 $\overline{G_1G_2}$ 上的充要條件), 可知 G_1, K, G_2 共線 (且 $\overline{G_1K} : \overline{KG_2} = 1 : 2$), 至此第一部份的證明完畢。

第二部份: 我們給出兩個證明:

證 1: 在證明圖 4 滿足 [性質 2] 之前, 我們先畫出圖 4 中 $\triangle ABC$、$\triangle AKD$、$\triangle DKC$ 的中線 $\overline{BE}$, $\overline{DF}$, $\overline{DH}$, 如下圖 6:

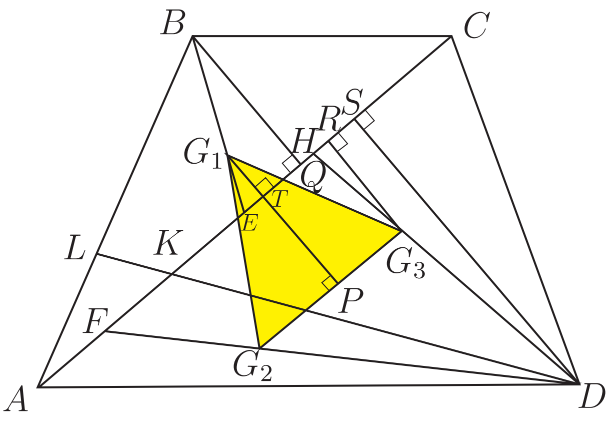

圖6

根據重心的定義, G_1, G_2, G_3 會分別落在 $\overline{BE}$, $\overline{DF}$, $\overline{DH}$ 上。此時, 作 $\overline{G_1P}\perp\overline{G_2G_3}$ 於 P 並設 $\overline{G_1P}$ 交 $\overline{AC}$ 於 T, 再作 $\overline{BQ}\perp\overline{AC}$ 於 Q、$\overline{G_3R}\perp\overline{AC}$ 於 R、$\overline{DS}\perp\overline{AC}$ 於 S。

在 $\triangle DFH$ 中, 因爲 $\overline{DG_2}:\overline{DF}=\overline{DG_3}:\overline{DH}=2:3$, 可知 $\overline{G_2G_3}//\overline{FH}$ 且 $\overline{G_2G_3}=\frac{2}{3}\overline{FH}$, 又 $\overline{FH}=\overline{FK}+\overline{KH}=\frac{1}{2}\overline{AK}+\frac{1}{2}\overline{CK}=\frac{1}{2}\overline{AC}$, 可知 $\overline{G_2G_3}=\frac{1}{3}\overline{AC}$。而由 $\overline{G_2G_3}//\overline{AC}$ 與 $\overline{G_1P}\perp\overline{G_2G_3}$, 可知 $\overline{G_1P}\perp\overline{AC}$ 於 T。

在 $\triangle BEQ$ 中, 因 $\overline{G_1T}//\overline{BQ}$ 且 $\overline{EG_1}:\overline{EB}=1:3$, 可知 $\overline{G_1T}:\overline{BQ}=1:3$, 因此 $\overline{G_1T}=\frac{1}{3}\overline{BQ}$; 同理可知 $\overline{G_3R}=\frac{1}{3}\overline{DS}$。注意 TPG_3R 是矩形, 因此 $\overline{TP}=\overline{G_3R}=\frac{1}{3}\overline{SD}$, 這樣就有 $\overline{G_1P}=\overline{G_1T}+\overline{TP}=\frac{1}{3}(\overline{BQ}+\overline{DS})$。至此可計算出

$$\begin{aligned}\triangle G_1G_2G_3\text{面積}&=\frac{1}{2}\overline{G_1P}\times\overline{G_2G_3}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}(\overline{BQ}+\overline{DS})\times\frac{1}{3}\overline{AC}\\&=\frac{1}{9}\Big(\frac{1}{2}\overline{BQ}\times\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{DS}\times\overline{AC}\Big)\\&=\frac{1}{9}\times(\triangle ABC\text{面積}+\triangle ACD\text{面積})\\&=\frac{1}{9}ABCD\text{面積}\end{aligned}$$

這樣就證明了第二部分的結果。至此, 不知讀者是否有發現, 其實我們在上述證明過程中, 完全沒有用到圖 4 與圖 6 中 $ABCD$ 爲梯形的條件。而在筆者對其它類型的 $ABCD$ 做了一些觀察與檢驗之後, 發現性質2的結果依然成立, 甚至在 $ABCD$ 爲凹四邊形時也不例外, 有興趣的讀者不妨自行檢驗看看。

證 2: 除了透過圖 6 的方法證明 [性質 2] 外, 也可透過兩向量外積取絕對值計算面積的方式來加以證明。先將圖 4 的 $\overline{LK}$ 抹去, 使成下圖:

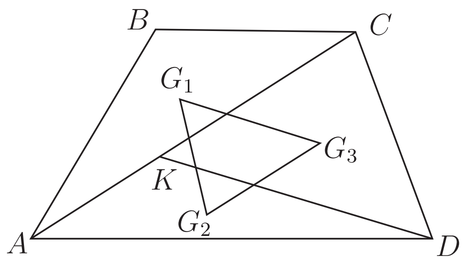

圖7

注意第一個解法結束後的討論中, 筆者提出圖 6 不一定要是凸四邊形, 也可以是凹四邊形, 此解法也可能出現 $ABCD$ 爲凹四邊形的情形。注意有

$$\angle BAD+\angle BCD<\angle BAD+\angle BCD+\angle ABC+\angle ADC=360^\circ$$

因此 $\angle BAD, \angle BCD$ (此處是指圖 7 在四邊形 $ABCD$ 內部的那兩個角) 兩者不會同時大於或等於 180°。不失一般性, 假設 $\angle BAD<180^\circ$, 此時圖 7 有 $\angle BAC<180^\circ$ 且 $\angle CAD<180^\circ$, 根據向量外積的右手定則 (見註1), 可知 $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AC}$ 方向相同 (兩者均垂直且突出紙面)。由向量的三角不等式 $|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|\geq|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$ 等號成立的條件 ($\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 至少有一個爲零或兩者同向), 可知

$$|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AC}|$$

再由向量外積的分配律, 與外積兩向量交換順序即變號的性質, 可知

$$\begin{aligned}ABCD\text{面積}&=\triangle ABC\text{面積}+\triangle ACD\text{面積}\\&=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AC}|)\\&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AC}|\\&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}|\\&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})|\\&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}|\end{aligned}\tag{4}$$

由於 G_1, G_2, G_3 分別爲 $\triangle ABC$、$\triangle ADK$、$\triangle CDK$ 的重心, 因此由圖 7 知

$$\overrightarrow{DG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DK}),\qquad \overrightarrow{DG_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DK}),$$
$$\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),\qquad \overrightarrow{AG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AD}),$$

由上述四式可得

$$\overrightarrow{G_2G_3}=\overrightarrow{DG_3}-\overrightarrow{DG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \tag{5}$$
$$\overrightarrow{G_2G_1}=\overrightarrow{AG_1}-\overrightarrow{AG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AK})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{KC}) \tag{6}$$

利用 (5), (6) 可知

$$\begin{aligned}\triangle G_1G_2G_3\text{面積}&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{G_2G_3}\times\overrightarrow{G_2G_1}|\\&=\frac{1}{2}\Big|\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}\times(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{KC})\Big|\\&=\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{KC}|\\&=\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}|\end{aligned} \tag{7}$$

注意上面過程中的最後一個等號, 因為 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KC}$ 同向, 故其外積為零向量。此時由 (4), (7) 兩式, 即再度證明

$$\triangle G_1G_2G_3\text{面積}=\frac{1}{9}ABCD\text{面積}$$

以上就是第二種證法, 而當圖 7 中 $\angle BCD>180^\circ$ 時, $ABCD$ 即為一種可能的凹四邊形。對上述證法使用到的外積性質, 讀者若想要有更清楚了解, 不妨參考 [2] 中的介紹。

三、結語

上述的解法中的第一部份, 筆者引入高中數學才會介紹的平面向量重心公式與判斷三點是否共線的條件來加以證明, 而原作者在 [1] 中則使用國中生就能看懂的平面幾何手法。有趣的是, 原作者在 [1] 中計算圖 4 的 $\triangle G_1G_2G_3$ 面積時, 使用了國中教材中並未介紹的行列式計算, 而筆者在第二部份中卻使用了國中教材有涵蓋的平面幾何技巧。不但如此, 我們也可再度透過向量工具, 先增加圖 7 中垂直紙面的這個維度, 再使用 (空間中) 向量外積表示面積的方法證明第二部份的結論。

以上就是筆者想分享的一點研究結果, 除了希望可以發揮和 [1] 彼此對照、補充的作用, 更希望能增添數學世界中的一些色彩。最後, 筆者要感謝審稿人對本文提出的修改建議, 尤其是增加第二部份透過向量方法加以證明的建議。

註1: 所謂外積的右手定則, 可透過底下方法理解。請先參考下圖：

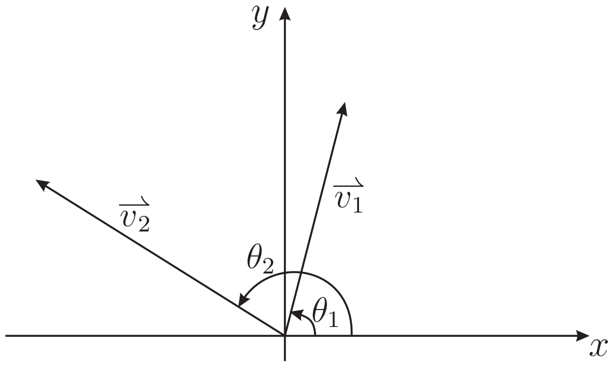

圖 8

其中設 $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ 的長度爲 $r_1, r_2 > 0$。賦予上圖第三個維度, 讓 z 軸的正向突出紙面, 則上圖中兩向量爲

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_1} &= (r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1, 0),\\ \overrightarrow{v_2} &= (r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2, 0),\end{aligned}$$

兩者的外積 $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ 爲

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} &= \left(\begin{vmatrix} r_1\sin\theta_1 & 0 \\ r_2\sin\theta_2 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & r_1\cos\theta_1 \\ 0 & r_2\cos\theta_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r_1\cos\theta_1 & r_1\sin\theta_1 \\ r_2\cos\theta_2 & r_2\sin\theta_2\end{vmatrix},\right)\\ &= (0, 0, r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)) \qquad (8)\end{aligned}$$

當外積 $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ 不爲零時, 關於 $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ 可簡單分成底下兩種情形:

(a) 當 $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi$ 時, 得 $r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1) > 0$, 由 (8) 可知 $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ 突出紙面。此時可參考圖 8, 讓右手掌四隻手指先與手掌面平行, 再將手指從 $\overrightarrow{v_1}$ 方向逆時針轉 $\theta_2 - \theta_1$ 這個小於 π 的角到 $\overrightarrow{v_2}$ 方向, 而拇指向上表示外積 $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ 突出紙面。注意此時以 $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ 所在的射線爲終邊的廣義角分別爲 θ_1, θ_2 (底下簡稱爲 $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_2}$ 所對應的廣義角), θ_2 領先 (大於) θ_1 但領先程度小於 π。

(b) 當 $\pi < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$, 得 $r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1) < 0$, 由 (8) 可知 $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ 鑽入紙面。此時有

$$-2\pi < \theta_1 - \theta_2 < -\pi \;\Rightarrow\; 0 < (\theta_1 + 2\pi) - \theta_2 < \pi$$

我們改透過下圖 9 來理解:

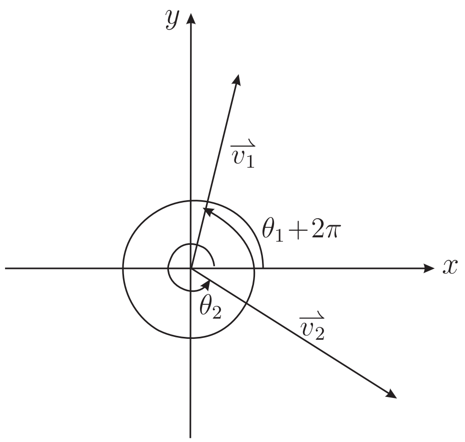

圖9

注意此時 $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ 所對應的廣義角分別爲 $\theta_1+2\pi$, θ_2, 而由上一式的結果可知 $\theta_1+2\pi$ 領先 (大於) θ_2 但領先程度小於 π。此時右手的四隻手指從 $\overrightarrow{v_1}$ 方向順時針轉 $(\theta_1+2\pi)-\theta_2$ 這個小於 π 的角到 $\overrightarrow{v_2}$ 方向, 而拇指向下表示外積 $\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$ 鑽入紙面。

由以上 (a), (b) 的討論, 我們知道當 $\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$ 不爲零, 使用右手定則判斷 $\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$ 方向時, 總是要將右手四隻手指從 $\overrightarrow{v_1}$ 方向轉一個「小於 180° 的角」到 $\overrightarrow{v_2}$ 方向 (順時針或逆時針轉均有可能), 而右手拇指則決定了 $\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$ 的方向。

參考資料

1. 梁勇能, 梯形內一塊四邊形面積的探討, 數學傳播第 28 卷第 3 期 (111), 2004年9月。Available from: `http://w3.math.sinica.edu.tw/math_media/d283/28304.pdf`.
2. 張海潮, 內外積取代正餘弦律, 數學放大鏡 — 暢談高中數學, 三民書局, 2013, 36-44。

—本文作者任職麥當勞竹南民權中心—