

數學和古典詩詞的意境

張奠宙

蘇意雯教授的「詩情畫意談數學」(《數學傳播》總151期)一文,將古代的一些中國數學詩收集起來欣賞,增加了今人學習數學的興趣,讀後受益良多。最近,筆者也注意到在現代數學和中國古詩文之間,可以在意境上有所溝通。

數字嵌入詩詞,早已有之。鄭板橋有詠雪詩:

一片二片三四片,五片六片七八片;
千片萬片無數片,飛入梅花總不見。

詩句抒發了詩人對漫天雪舞的感受。不過,詩中儘管嵌入了數字,卻實在和數學沒有什麼關係。

數學和古典人文的連接,貴在意境。早年講到數列極限,總會用「一尺之棰,日取其半,萬世不竭」(莊子《天下篇》)與之相聯繫。後來徐利治先生將之發展到用古詩來描述連續變數的極限。記得是1993年,在無錫鼇頭渚開過一次數學方法論的研討會。有一天下午,徐先生作報告。他說了一個故事。

「我在《數學分析》課堂上,先在黑板上寫了李白的名詩:

故人西辭黃鶴樓,煙花三月下揚州。
孤帆遠影碧空盡,唯見長江天際流。

然後問同學們哪一句可以和極限概念相通?大家的共同回答是「孤帆遠影碧空盡」,這說明數學和詩詞是可以溝通的」。徐先生的演講觸動了我的心弦,我似乎看到了數學和人文意境互相溝通的隧道,於是陸續收集了一些例子。

(一)《道德經》與自然數公理

老子《道德經》裏有名句:

「道生一,一生二,二生三,三生萬物。」

這 13 個字，簡直是一組中國化的自然數公理。它透露以下的資訊：

- 自然數是一個接一個地「生」出來的；
- 1「加 1」，就能生出 2；2 再「加 1」就能生出 3；不斷地「加 1」就能生出萬；
- 自然數裏有 1, 2, ... 等等，多得不得了，沒完沒了；
- 1 前面還有一個「道」，在數學上用 0 代表。

一年級小學生，不妨把它背下來。這既不困難，也不囉嗦。其中有熟悉的一、二、三、萬等數字，又有「生」這個極為生動傳神的動詞，容易領會。

(二) 《道德經》與數學歸納法

衆所周知，數學歸納法原理是和自然數公理等價的。一生二，二生三，相當於數學歸納法中 $n = 1, 2$ 時，命題成立的要求。關鍵是要獲得「三生萬物」的結果。然而，要「生」出萬物（自然數全體）來，必須要每個與 n 有關的命題都能「生」出與 $n + 1$ 有關的命題。這是數學歸納法原理的精髓。

現在中學數學課堂裏常用多米諾骨牌來比喻數學歸納法。但多米諾骨牌畢竟是有限的。到頭來就是因為總有第 n 塊倒下卻不能讓第 $n + 1$ 塊倒下，因而不得不終止。說白了，就是 n 命題「生」不出 $n + 1$ 命題來。

因此，爲了要三生萬物，就必須生生不息，即保證每個 n 命題不僅自己成立，還必須會「生」，保證能夠生出 $n + 1$ 命題來。數學歸納法後半部分要做的不在於檢驗「 n 命題」是不是正確，要做的事情是 n 命題能不能「生」的問題。強調一個「生」的動詞，保證每個 n 命題都能「生」，正是《道德經》告訴我們的數學歸納法。

(三) 《登幽州台歌》與愛因斯坦的四維時空

初唐陳子昂有一首劃時代的《登幽州台歌》：

前不見古人，後不見來者；
念天地之悠悠，獨愴然而涕下。

一般的語文解釋說：前兩句俯仰古今，寫出時間綿長；第三句登樓眺望，寫出空間遼闊。第四句描繪了詩人孤單寂寞悲哀苦悶的情緒，兩相映照，分外動人。然而，從數學上看來，這是一首闡發時間和空間感知的佳句。前兩句表示時間可以看成是一條直線（一維空間）。陳老先生以自己爲原點，前不見古人指時間可以延伸到負無窮大，後不見來者則意味著未來的時間是正無窮大。後兩句則描寫三維的現實空間：天是平面，地是平面，悠悠地張成三維的立體幾何環境。

全詩將時間和空間放在一起思考，感到自然之偉大，產生了敬畏之心，以至愴然涕下。這樣的意境，數學家 and 文學家可以共有。尤其是，把時間和空間放在一起思考，可以說也在意境上與愛因斯坦的四維時空學說相銜接。

(四) 葉紹翁《遊園不值》與無界變數

宋朝葉紹翁有詩云：

應憐屐齒印蒼苔，小扣柴扉久不開。

春色滿園關不住，一枝紅杏出牆來。

貴州六盤水師專的楊光強老師對我說，他在講無限大和無界變數時都會引用此詩，學生每每會意而笑。實際上，無界變數是說，無論你設置怎樣大的正數 M ，變數總要超出你的範圍，即有一個變數的絕對值會超過 M 。於是， M 可以比喻成無論怎樣大的園子，變數相當於紅杏。無界變數相當於無論怎麼大的園子，總至少有一支紅杏會越出園子的範圍。詩和數學的意境如此切合，竟把枯燥的數學語言形象化了。

(五) 杜甫的名詩《登高》與實無限、潛無限

《登高》詩云：

風急天高猿嘯哀，渚清沙白鳥飛回。

無邊落木蕭蕭下，不盡長江滾滾來。

萬里悲秋常作客，百年多病獨登臺。

艱難苦恨滿霜鬢，潦倒新停濁酒杯。

我們關注的是其中的第三、第四兩句：「無邊落木蕭蕭下，不盡長江滾滾來」。前句指的是「實無限」，即實實在在全部完成了無限過程的結果。例如區間 $[a, b]$ 中具有無限多個點，就是一種實無限。杜甫所說的「無邊落木」是指「所有的落木」，那是一個已被我們一覽無餘的實無限集合。後一句則是指所謂的潛無限了。儘管到現在為止，長江水還是有限的，卻永遠不會停止。它沒完沒了，不斷地「滾滾」而來。數學的無限顯示出「冰冷的美麗」，杜甫詩句中的「無限」則體現出悲壯的人文情懷，但是在意境上，彼此是溝通的。

(六) 賈島的《尋隱者不遇》與純粹存在性定理

賈島有一首五言絕句云：

松下問童子，言師採藥去。

只在此山中，雲深不知處。

這首小詩在人文意境上和數學存在性定理彼此相通。事實上，這種只知其「有」，卻並不知道具體是「誰」的數學存在性定理很多。如在小學裏就有抽屜原理出現。 M 個蘋果放到 N 個抽屜裏 ($M > N$)，那麼必有一個抽屜裏的蘋果至少為兩個，但是究竟是哪一個抽屜？裏面確切的蘋果數目是多少，我們並不知道。其餘如代數基本定理，微積分裏有連續函數的介值性定理，以及微分中值定理等等，都是只知根或某個介值、中值的存在，但是不知道它們究竟在哪裡。賈島的詩句斷定隱者「只在此山中」，卻「雲深不知處」。這與數學的意境何等契合！如果說文學家欣賞「雲深不知處」的蒼茫意境，而數學家則會關注難以名狀的一種不確定性。

(七) 蘇軾的《琴詩》與反證法

蘇軾有一首哲理詩云

若言琴上有琴聲，放在匣中何不鳴？

若言聲在指頭上，何不於君指上聽？

數學上常用反證法。要證明一個命題，只要先將此命題的反面假定為正確，然後據此推出明顯錯誤的結論，就可以從反面證明原命題的正確性。

《琴詩》的意境與此相通。

命題：琴聲不在琴上。

證明：用反證法。假設「琴上有琴聲」，那麼琴放在匣中應該「鳴」。這和琴放在匣中不鳴的事實矛盾，因此假設「琴上有琴聲」是錯的。原命題正確。 證畢

由此可見，人文的論辯和數學的證明，都需要遵循邏輯規則。

(八) 李商隱的詩句：「相見時難別亦難」與因式分解

因式分解課上，說說唐詩宋詞，別有一番風味。初中學習「因式分解」內容，沒有什麼實際背景可以依靠，學生學起來很枯燥。如果我們把兩個因式的相乘和分解，用兩個人的「相見」和「分別」作「擬人化」的比喻，那麼就有許多詩句可以聯想了。李煜詞有：「無限江山，別時容易見時難」。李商隱的詩句有：「相見時難別亦難」。這樣一來，我們不妨說「相乘容易分解難」。事實上，兩個因式相乘有演算法規則可循，依次去做就是了。比較容易。但是給一個多項式，要拆成兩個因式，卻並非一定有章可循，往往要動腦筋，使用技巧才能解比較困難。更進一步，聯想到當今的密碼技術與大素數的分拆困難有關，正是相乘容易而分解難，在意境上可以有所借鑒。

(九) 古詩的對仗與數學的對稱：變化中的不變

中國古詩講究對仗。這是指上句變為下句之後，雖然位置變了，可是許多性質不能變。例如王維《山居秋暝》中的名句：

明月松間照，清泉石上流。

其中的上句雖然變為下句，但是，字數不變，名詞對名詞，動詞對動詞，形容詞對形容詞，意義上相通，都是自然景色。存在著許多不變性。聯想到數學的軸對稱，對稱軸的左右兩邊，翻折過去。圖形位置是變了，但是大小形狀都沒有變，由此看來，數學的對稱和文學的對仗，可以說是異曲同工。

對聯和對仗，是漢字獨有的文化現象，現在居然和西方數學有如此的關聯，令人叫絕。

(十) 蘇軾《題西林壁》詩與勒貝格積分

蘇軾有名句云

橫看成嶺側成峰，遠近高低各不同。

不識廬山真面目，只緣身在此山中。

如果將前兩句比喻黎曼積分和勒貝格積分的關係，相當有趣。蘇軾詩意是：同是一座廬山，橫看和側看各不相同。勒貝格則說，比如數一堆揀好了的硬幣，你可以一疊疊地豎著數，也可以一層層橫著數，同是這些硬幣，計算的思想方法卻差異很大。從數學上看，同是函數 $y = f(x)$ 形成的曲邊梯形面積 M ，也是橫看和側看不相同。實際上，如果分割函數 $y = f(x)$ 的定義域 $[a, b]$ 然後作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 用以近似 M ，那是黎曼積分的思想，而分割值域 $[m, n]$ 作和 $\sum_{i=1}^n y_i m E(x, y_{i-1} \leq f(x) \leq y_i)$ 近似表示 M ，則是勒貝格積分的思想（這裏的 m 是勒貝格測度）。

同是橫看和側看，數學意境和人文意境竟可以相隔時空得到共鳴，發人深思。

(十一) 韓愈名詩《早春》與數學中的「大範圍」

韓愈有詩句云

天街小雨潤如酥，草色遙看近卻無。

突然想到，詩的第二句當是拓撲學上局部和整體的一種文學意境描寫。就曲面來說，遠看可以有整體的區分，例如球面和環面彼此不同。但是，近看卻都差不多，都是一個「圓片」：二

維的歐氏平面的局部。這正如整體的草色只能「遙看」，一旦近了，到局部狀態，那種「草色」就「近看無」了。

除了以上的十一例之外，數學活動中的人文意境，還會有許多其他的方面。例如王國維用宋詞來描述做學問的三重意境：

昨夜西風凋碧樹，獨上高樓，望盡天涯路。 《蝶戀花》晏殊

衣帶漸寬終不悔，為伊消得人憔悴。 《蝶戀花》柳永

眾裏尋他千百度，驀然回首，那人卻在燈火闌珊處。 《青玉案》辛棄疾

這同樣適用於數學學習。確實，一個學生如果沒有經歷過這樣的數學解題意境，數學大概是學不好的了。

—本文作者任教華東師範大學數學系—

2016 Pan Asia Number Theory Conference

日期：2016年7月11日(星期一)～2016年7月15日(星期五)

地點：台北市大安區羅斯福路四段1號 天文數學館6樓演講廳

詳見中研院數學所網頁 <http://www.math.sinica.edu.tw>