

三國漢中*

此文紀念樊噲兼懷夏宗匯

平 斯

上個世紀布勞威爾 (Brouwer) 設計了映射度, 成爲一個強而有力的獨門秘技, 證明了許多當時被認爲遙不可及的定理, 其中包括維數是個拓樸量。在此之前, 用直觀的判斷一條纖細的線段與一個寬實的方盤是完全不同的, 因爲維數分別是一與二。但是偏偏康托爾 (Cantor) 的集合論裡證明, 兩者有相同的基數 (1877)。且皮亞諾 (Peano) 更進一步, 建立了一個連續滿射, 把前者映成後者 (1890)。在這些病態的諸多現象步步衝擊之下, 直觀正確判斷的可靠性節節潰敗, 布勞威爾總算是扳回一城, 守住了最後防線。後來更挾其餘威, 高舉直觀主義的大纛, 造成與希爾伯特 (Hilbert) 的衝突, 被愛因斯坦 (Einstein) 戲稱之爲「蛙鼠之爭」[1]。

布勞威爾又再使出秘技的時候, 證明了固定點定理: 圓體上的連續自映射必有固定點。這個定理是存在性的, 有違布勞威爾自己堅持的直觀主義: 只接受建構證明的信念。幸得後來有施伯納 (Sperner) 等人接力而得建構的證明[2]。

眼下計算固定點的方法, 是衍生自上述的建構解又叫同倫法。假設 G 是個圓體上的連續自映射, 固定點問題在求 X 使得 $G(X) = X$ 。其法始於引進一個顯然有個已知解的固定點問題 $G_0(X) = (X + X_0)/2$ 。於是與原問題兩者之間, 作一個同倫問題 $H_t(X) = (1 - t)G_0(X) + tG(X)$ 每個參數 t 都有一個固定點 X_t , 形成一條曲線姑且名之爲固定脈。希望沿著這條脈, 順藤摸瓜的可以從 X_0 帶到 X_1 (圖1)。

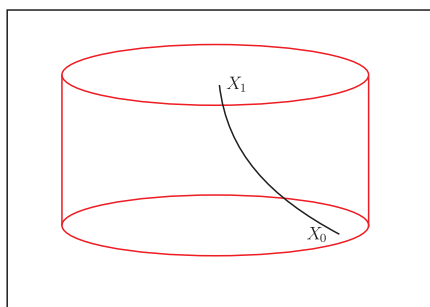


圖 1

*本文標題指周瑜得意赤壁之後, 劉備在漢中稱王, 起初兩軍分據夏口和樊口, 以此暗合本文懷想的數學家。

實際作法上，又分類成解析法與組合法兩種。解析法基本上是解數值微分方程式，這個著名方法的來龍去脈與箇中奧妙，應讀發現當事人李天岩自己寫的文章[3]。

組合法的基礎比較接近同調論，因此本質是積分而不是微分。三維單體 (simplex) (四面體) 的表面是由四個平面單體 (三角形) 所構成的複體 (complex)，每個頂點隨意用 $\{0, 1, 2\}$ 來標號，平面單體若每個頂點的標號都不同時叫「施伯納單體」，重要的是有這樣一條原理說：任何複體總有兩個或根本沒有施伯納單體 (圖2)。

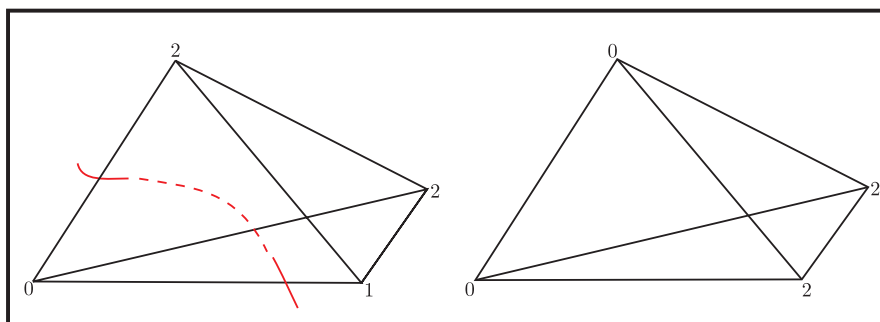


圖2

因此已經有一個施伯納單體的複體，必定有另外一個施伯納單體。從新的施伯納單體可以建構另一個新的複體，而且保證它也有個施伯納單體，這樣就完成一個操作過程，不斷迭代可得一條逶迤而出的角龍 (圖3)。當初若用巧妙的設計來標號而問題本身又不是太離奇，這條角龍是個裹住固定脈的複體 [4]。

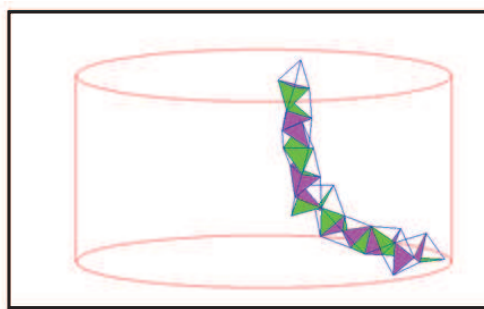


圖3

上述這一條原理，Door in Door out 口語說成「進得來出得去」是華人數學家樊熾著名的發現。發現得十分出奇，當時樊熾遷了新居，趁著暑假油漆房間，漆著漆著，一間漆完換一間，這時手上雖忙，腦袋卻也沒閒置，居然從中得到靈感。這是他的銘言「每個清醒時刻 (every waking moment)」最好的親身見證。

1975 他六十歲生日時，研究生 Barbara Lesanti 帶頭糾團做 T 恤，上面印了大頭照與上述銘言以為紀念 (圖4)。



圖 4

這是學生自發，沒有任何官方色彩的慶祝活動。因為樊熾脾氣一向不好，經常有臉紅脖子粗的時候，研究生們要表達的是，即使他聲色俱厲，無損大家的愛戴。只是那銘言被宣傳得有點誇張，因為在此之前，他對華人學生說的是「我四十歲以前從沒看過閒書」。

樊熾的英語有很重的口音，他自承初中時好玩，不在意功課，臨升學的時候才慌了。自忖數理科目還能憑聰明應付，但是語文科目如英文，需要靠平常用功的，就來不及臨陣磨槍。幸好德國人在上海租界辦的同濟大學附屬中學，不考英文，因此才有機會進高中，說到這裡他還得意地笑了。從笑容中依稀可以辨認出那個調皮狡黠的中學生，目前國中要求成千的英文字彙，又沒有德國租界，多少個樊熾都被埋沒了。在同濟附中樊熾沒討到便宜，唸德文從認 $\alpha\beta\gamma$ 開始，很吃了些苦頭。多年後他還當賓客前表演朗讀德文古書，年輕輩的德國人都嘖嘖稱奇，好比我們看到洋人讀甲骨文。進北大後，就憑通德文，作了施伯納來訪時的助教，受了深刻影響。雖然後來去法國進修，但是德文還是他的基本外語，還因此被誤認為是師門出自外爾 (Weyl) 或馮諾依曼 (von Neumann)。

樊熾以變分法見知於摩爾斯 (Morse)，而於大戰後被延聘至高等研究院，親炙外爾及其他著名數學家。有這樣的經歷，因此渾身典故，印象最深刻的是擅長模仿著名數學家。在台大大四時，曾在繆龍驥書報討論班上，研讀馬克 (Maak) 殆週期函數 (almost periodic function) 的筆記。其中建構緊緻群上的不變測度，有繁複的一連串估算式子。後來上樊熾的課方知是馮諾依曼的傑作，他模仿馮諾依曼左手執板擦，右手持筆，只用一個式子，這邊寫那邊擦，往復幾次修改這一條式子，最後得到證明就哈哈大笑。這套馮諾依曼的把戲，樊熾模仿得生動有趣，彷彿親見。另外他還模仿查利斯基 (Zariski)，這位幾何學家出於意大利古典學派門下，但是卻自創代數新法成爲一代宗師。有一次他不慎掛黑板，樊熾模仿他，躲在講台的一個角落，以身體掩遮著

畫圖形，原來在急難關頭，安撫自己的還是師門的方法。

每年過生日樊熾都招呼數學系華人研究生回家，飯後茶餘就開始擺龍門，除了說自己求學研究的經驗，經常還有一些時人軼事，這是他對歷史的濃厚興趣。因此他所讀的閒書，無非是吳相湘寫的近代史，或黎東方的閒說史話，他的學生夏宗匯也感染了對歷史的興趣，我們不期而遇的場合，除了清華校園之外，居然是台北植物園邊的歷史博物館。

初識夏宗匯時他正在作博士後，叼個煙斗，帶著不確定是否應對方先開口的狐疑和靦腆，熟悉之後方知其古道熱腸，經常與我分享他的廚藝以慰鄉愁。當他離開聖巴巴拉時，把帶不走的家當如單車、音響和書籍都留了下來，其中包括逐年的 AMS Bulletin，而後我也養成固定看這雜誌的習慣，補充了許多新知和一些數學家的八卦，這是最受惠之處。

1985年東吳畢業生高文德，報考清華數研所，當時拓樸學還是一門考科。我關切他「考得如何」？他回答說：「好像在考期中考」，意思是題型與平常考試一樣，我猜測出題的若非夏宗匯就是全任重，其實肯定是樊熾在出題。

目前不變測度定理的證明，不再用殆週期函數而是透過群的表現，馮諾依曼的方法被比較文雅的角色靜夫 (Kakutani) 固定點定理取代 [5]，若要深入了解其中的連繫，以逆推回固定點定理，夏宗匯以為不妨先讀一讀群的表現，因此計劃共同做這件事，連書都決定了 [6]，因為我不堪南北奔波，參加這個研討班的計劃終未實現。然而群的表現還是有中央大學的林欣誠再接再厲潛心鑽研。林欣誠與夏宗匯名為師徒，情同父子，師生孺慕實為數學界添上一段佳話。

參考文獻

1. *Mathematical Intelligencer*, 第 12 期, 17-31 頁, 1990.
2. 潘建強, 邵慰慈, Sperner 引理及其應用, 數學傳播, 27 卷 4 期, 42-49 頁.
3. 李天岩, 回首來時路, 數學傳播, 31 卷 4 期, 38-42 頁.
4. Zeidler, E., *Nonlinear Functional Analysis IV*, Springer, 1997.
5. Royden, H., *Real Analysis*, 國際第四版, Pearson, 2010.
6. Shaw, R., *Linear Algebra and Group Representation*, Academic Press, 1982.

—本文作者為東吳大學數學系退休教授—

Taipei Conference in Representation Theory V

日期：2016年1月4日(星期一)～2016年1月8日(星期五)

地點：台北市大安區羅斯福路四段1號 天文數學館6樓演講廳

詳見中研院數學所網頁 <http://www.math.sinica.edu.tw>