

注重問題引申推廣 培養學生數學探究能力

趙忠華

在中學數學教學中,如何運用引申和推廣的方法來培養學生探究問題的能力,這是廣大數學教育者值得重視的問題,知識的難易性不是決定性因素。我們可以根據學生的實際水平選擇不同層次的命題作為教學材料,使不同水平的學生可以作不同的推廣,不必強求,力求所獲。

引申和推廣中運用最多的是從特殊到一般化的推理,是合情推理,是提出猜想的最常見方式。在教學中我們經常可以這樣問學生,這個數學命題能否一般化,或去掉某些約束條件,獲得普遍結論。下面通過一個習題的推廣具體說明之。

我在高三的一節複習課中遇到這樣一題:如圖1:已知拋物線 $x^2 = 4y$ 過點 $M(2, 0)$ 的直線 l 與拋物線交於 A, B 兩點,且直線 l 與 y 軸交於點 C 。

- (1) 求證: $|MA|, |MC|, |MB|$ 成等比數列;
- (2) 設 $\overrightarrow{MA} = \alpha \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MB} = \beta \overrightarrow{BC}$, 則 $\alpha + \beta = -1$ 。

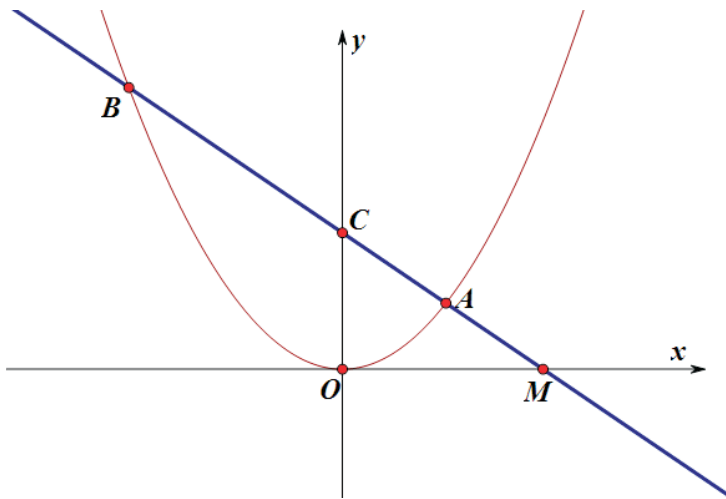


圖 1.

講完這題後，我問學生：如果將拋物線方程改為 $x^2 = 2py$ ($p > 0$)，點 M 改為 x 軸上任意一點，上述結論是否成立？

學生非常感興趣，有的動筆算起來，我說別忙，先用《幾何畫板》軟體驗證一下。經實驗發現是正確的。但不能代替理論證明，於是師生共同證明。

證明：(1) 由題設知直線 l 的斜率存在，可設 $M(a, 0)$ 直線 l 的方程為：

$$y = k(x - a), (k \neq 0), \text{ 聯立 } \begin{cases} y = k(x - a) \\ x^2 = 2py \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 並化簡得:}$$

$x^2 - 2pkx + 2pka = 0$, 設 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(0, -ka)$, 則 $x_1 + x_2 = 2pk, x_1x_2 = 2pka$ 。
因為

$$\begin{aligned} |MA| \cdot |MB| &= \sqrt{1+k^2}|x_1 - a| \cdot \sqrt{1+k^2}|x_2 - a| = (1+k^2)|x_1x_2 - a(x_1 + x_2) + a^2| \\ &= (1+k^2)|2pka - 2pka + a^2| = a^2(1+k^2), \\ |MC|^2 &= (a-0)^2 + (0+ka)^2 = a^2(1+k^2), \end{aligned}$$

所以 $|MC|^2 = |MA| \cdot |MB|$ 即 $|MA|, |MC|, |MB|$ 成等比數列。

(2) 由 $\overrightarrow{MA} = \alpha \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MB} = \beta \overrightarrow{BC}$ 得, $(x_1 - a, y_1) = \alpha(-x_1, -ka - y_1), (x_2 - a, y_2) = \beta(-x_2, -ka - y_2)$, 即得: $\alpha = \frac{a - x_1}{x_1}, \beta = \frac{a - x_2}{x_2}$, 於是

$$\alpha + \beta = \frac{(a - x_1)x_2 + (a - x_2)x_1}{x_1x_2} = \frac{a(x_1 + x_2) - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{2pka - 4pka}{2pka} = -1.$$

從以上證明說明猜想是成立的，我繼續追問：還能推廣嗎？注意到 x 軸是拋物線的切線， M 點是切線上一點，如果換成拋物線的任意一條切線，結論成立嗎？於是有

猜想：如圖 2：已知拋物線 $x^2 = 2py$, ($p > 0$)，點 P 是拋物線上任一點，直線 l 是過點 P 的拋物線的切線，在直線 l 上任取一點 M 過點 M 的直線 l' 與拋物線交於 A, B 兩點，且直線 l' 與過 P 點且平行 y 軸的直線 m 交於點 C 。

(1) 求證: $|MA|, |MC|, |MB|$ 成等比數列;

(2) 設 $\overrightarrow{MA} = \alpha \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MB} = \beta \overrightarrow{BC}$ 則 $\alpha + \beta = -1$ 。

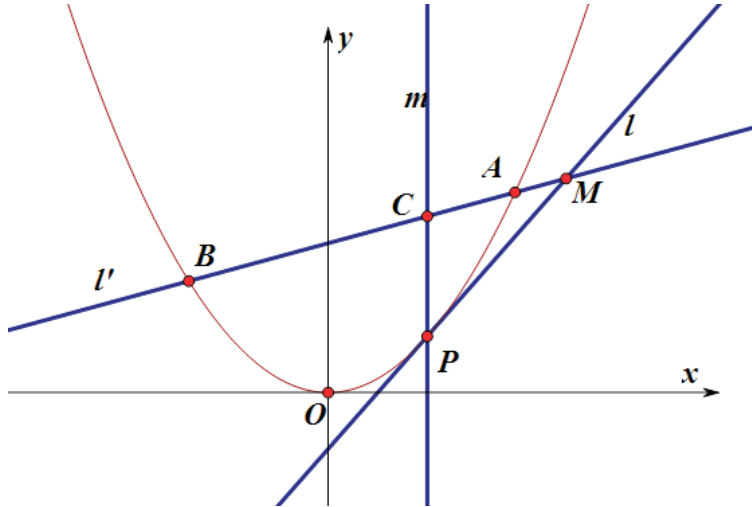


圖 2.

用《幾何畫板》軟體驗證發現結論是成立的。下面給出證明。

證明: (1) 設 $P\left(t, \frac{t^2}{2p}\right)$, 直線 l 的方程為: $y = \frac{t}{p}x - \frac{t^2}{2p}$, 設 $M\left(a, \frac{ta}{p} - \frac{t^2}{2p}\right)$, 由題意直線 l' 的斜率存在, 設為 k , 直線 l' 方程: $y = k(x - a) + \frac{ta}{p} - \frac{t^2}{2p}$, ($k \neq 0$),

聯立 $x^2 = 2py$ 消去 y 並化簡得: $x^2 - 2pkx + 2pka - 2ta + t^2 = 0$,

設 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C\left(t, k(t - a) + \frac{ta}{p} - \frac{t^2}{2p}\right)$,

則 $x_1 + x_2 = 2pk$, $x_1x_2 = 2pka - 2ta + t^2$ 。

因為

$$|MA| \cdot |MB| = \sqrt{1+k^2}|x_1 - a| \cdot \sqrt{1+k^2}|x_2 - a| = (1+k^2)|x_1x_2 - a(x_1 + x_2) + a^2|$$

$$= (1+k^2)|2pka - 2ta + t^2 - 2pka + a^2| = (1+k^2)(t-a)^2.$$

$$|MC|^2 = (t-a)^2 + \left(k(t-a) + \frac{ta}{p} - \frac{t^2}{2p} - \frac{ta}{p} + \frac{t^2}{2p}\right)^2 = (1+k^2)(t-a)^2.$$

所以 $|MC|^2 = |MA| \cdot |MB|$ 即 $|MA|$, $|MC|$, $|MB|$ 成等比數列。

(2) 由 $\overrightarrow{MA} = \alpha \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MB} = \beta \overrightarrow{BC}$, 得: $\alpha = \frac{x_1 - a}{t - x_1}$, $\beta = \frac{x_2 - a}{t - x_2}$, 於是

$$\alpha + \beta = \frac{(x_1 - a)(t - x_2) + (x_2 - a)(t - x_1)}{(t - x_1)(t - x_2)} = \frac{t(x_1 + x_2) + a(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 - 2at}{t^2 - t(x_1 + x_2) + x_1x_2}.$$

將 $x_1 + x_2 = 2pk$, $x_1x_2 = 2pka - 2ta + t^2$ 代入化簡得: $\alpha + \beta = -1$ 。

確定無疑, 本結論成立。

我們以上的推廣似乎很玄妙，如果從仿射幾何的角度來看則比較明顯，考慮在仿射變換

$$\begin{cases} x' = ax + c \\ y' = 2acqx + a^2y + c^2q \end{cases}$$

下，拋物線 $y = qx^2$ 變為 $y' = qx'^2$ ，形狀沒有改變，但拋物線 $y = qx^2$ 上原點變為拋物線 $y' = qx'^2$ 上另一點 (c, c^2q) 拋物線 $y = qx^2$ 原點處的切線方程 $y = 0$ 變為拋物線 $y' = qx'^2$ 的點 (c, c^2q) 處切線方程 $y' = 2cqx' - c^2q$ ，而直線 $x = 0$ 變為直線 $x' = c$ 依然平行 y' 軸，而仿射變換保持簡比不變，故顯然成立。

本節課從一個普通的問題出發，引導學生進行探究，將問題大大推廣，獲得了新的結論，平時教學中我們經常進行這樣的訓練，對學生的探究能力的培養是非常有益的。

—本文作者任教安徽省旌德中學—

中研院數學所103年度一年期研習員甄選簡章

本所爲了鼓勵有志研究數學領域之青年繼續深造，特提供爲期壹年之進修機會。

資 格：數學及其相關科系（大學、研究所）畢業或應屆畢業者。

甄 選：凡具備上述資格，並有志從事研究工作者，請備齊下列文件：

1. 大學（及研究所）成績單各一份。
2. 教授推薦函兩封（或兩封以上），必須簽章封口且和其他申請資料一同掛號寄出。
3. 履歷表（含電子郵件信箱、電話、住址、貳吋大頭照），若服役者，請詳細記載退伍日期。
4. 研習計畫一份。

請於民國103年4月25日前掛號寄達本所（中央研究院數學研究所黃舒淳先生收），需在信封上註明（一年期研習員申請）。文件如有缺，不另行通知補件。經書面審核合格者，擇期通知面試。

研 習：壹年研習期，自民國103年7月1日開始至民國104年6月30日止。
民國103年7月以後退伍之錄取者，可視個別情況延遲報到。研習員期滿合格者，由本所出具研習證明書。

待 遇：依本院業務費項下標準支薪。

地 址：10617 台北市大安區羅斯福路四段1號天文數學館6樓

電 話：(02)23685999#383（黃舒淳）

詳見中研院數學所網頁 <http://www.math.sinica.edu.tw>