

# 從代數到算術——獻給國中小的老師

張海潮

我的老師項武義先生告訴我一件往事。他出生於抗戰之始，童年在山裡躲日本人，直到抗戰勝利，才輾轉遷至上海。12歲左右到上海一間初中寄讀。有一天在圖書館中發現一本講義，題為《從代數到算術》。大凡學算的程序都是從算術到代數，因此這本反其道而行的書立刻就引起他的注意。當然武義師很快掌握了書中的要旨。原來，這本書是說明如果一個題目可以用代數解題，那麼，如何還原成只用算術解題呢？武義師告訴我當時書中所言，只要將代數式逐步展開，展開時保留數據的關係而不求出結果，直到最後再將變數留在符號一邊，然後觀察另一邊的式子，就可以得出算術的解法。以下舉幾個例子來說明如何從代數到算術。

例一：雞和兔共15頭，雞腳加兔腳共38隻，求雞、兔的頭數。

令  $X$  為兔的頭數，則有

$$4X + 2(15 - X) = 38$$

$$4X + 2 \times 15 - 2X = 38$$

$$(4 - 2)X = 38 - 2 \times 15$$

從上式可以解讀算術的方法。 $2 \times 15$  表示全部想成是雞，那麼腳只有  $2 \times 15 = 30$  隻。但是腳應有 38 隻，所以少了  $38 - 2 \times 15 = 8$  隻。這 8 隻是因為兔子而增加的，每一頭兔子增加  $(4 - 2)$  隻腳，所以應該用  $38 - 2 \times 15$  去除以  $(4 - 2)$  來得到兔子應有 4 頭。

例二：今年父親 32 歲，兒子 5 歲，請問幾年後父親的年齡是兒子的 2 倍？

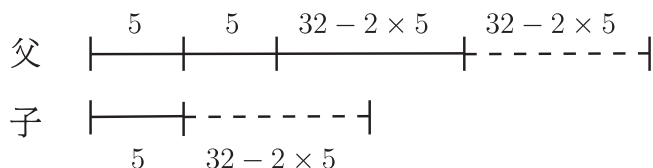
假設是  $X$  年後，則有

$$2(5 + X) = 32 + X$$

$$2 \times 5 + 2X = 32 + X$$

$$2X - X = 32 - 2 \times 5$$

所以算術的做法是用父親的年齡去扣掉兒子年齡的兩倍，進一步可以用圖解釋：



例三：全班同學出遊，雇若干輛同型車子，每一輛除駕駛外均有五個空位。若每一輛均坐五人，則總共留下 12 個空位，若每一輛僅坐三人，而用空位放行李，則有 8 人無法上車，請問車子幾輛，人數幾人？

假設車子有  $C$  輛，全班有  $m$  人，則

$$5C - 12 = m$$

$$3C + 8 = m$$

所以  $5C - 12 = 3C + 8$

$$5C - 3C = 12 + 8$$

$$(5 - 3)C = 12 + 8$$

因此算術的解法是：第一種坐法比第二種坐法的容量多  $(12 + 8)$  人，這是因為每一輛車多坐  $(5 - 3)$  人的關係，所以用  $(12 + 8) \div (5 - 3)$  得到車輛數是 10，並求出人數是 38。

例四：一個蘋果比一個橘子貴 4 元，3 個蘋果和 5 個橘子等價，問蘋果、橘子一個各幾元？

設橘子一個  $X$  元，則有

$$3(X + 4) = 5X$$

$$3X + 3 \times 4 = 5X$$

$$3 \times 4 = 5X - 3X$$

$$3 \times 4 = (5 - 3)X$$

算術的解法是：若將 3 個蘋果換成橘子，則 3 個蘋果相當於 3 個橘子多  $3 \times 4$  元，因此 5 個橘子也相當於 3 個橘子多  $3 \times 4$  元，所以一個橘子是  $3 \times 4$  除以  $(5 - 3)$ ，即 6 元。

下列原出於中國古代《九章算術》卷7《盈不足》問題：

例五：天平左邊有 12 個金塊，天平右邊有 20 個銀塊，左右等重。現在將金、銀交換一塊後，左邊比右邊輕了 40 克，問金塊、銀塊各重幾克？

設金塊一塊重  $g$  克，銀塊一塊重  $s$  克，則有

$$12g = 20s \quad (1)$$

$$11g + s = 19s + g - 40 \quad (2)$$

$$(1) - (2) \quad (12g - 11g) - s = (20s - 19s) - g + 40$$

$$g - s + (12g - 11g) - (20s - 19s) = 40$$

$$\text{可得} \quad g - s = 20$$

因此算術的解法要從金塊、銀塊的重量差開始思考。已知金比銀重，並且天平左右兩邊原來是等重的，因為金、銀交換了一塊而使兩邊的重量差了 40 克，所以一塊金比一塊銀要重 20 克。也就是說，移一個金塊到右邊去，比原來的銀塊重了 20 克，而移一個銀塊到左邊來，比原來的金塊輕了 20 克，一重一輕才會左右差了 40 克。

明白了此點，剩下的就是在  $g - s = 20$  之下怎麼解  $12g = 20s$ ，這又回到例四的方法，可以解出  $s = 30$ ,  $g = 50$ 。

上面這個例子看起來比較困難，特別是 (1)-(2) 的代數操作。我們提供另一個更具啓發的解法。

設想自己是個沒學過代數的老夫，在沒有時間壓力的情況下，自我挑戰要幫孫子解答這道問題。於是有了以下的想法：

既然調換金、銀各一塊就減重 40 克，調換二塊便減重 80 克， $\dots$ ，所以當調換至左邊是 6 金、6 銀塊，而右邊是 6 金、14 銀塊，便減重 240 克，這相當於是 14 銀塊與 6 銀塊之差重，因此，銀塊一個重 30 克。同樣的道理，當調換至左邊是 10 銀、2 金塊，而右邊是 10 銀、10 金塊，所減重量 400 克便相當於是 10 金塊與 2 金塊之差重，因此，金塊一個重 50 克。

最後，我們想提醒教學現場的老師，用算術或圖解解算術應用題仍是較有趣味、較有深度，且對學習思考者也比較有價值的。若只是為求快圖便，私下教孩子用代數法取代算術，而剝奪了探索的機會，這是短利之途，對孩子不公平，也將傷害到孩子。不論在哪一階段，學習之中，直覺又自然的方法便是好方法，也是最值得鼓勵的方法。

感謝審稿人對本文提出的寶貴意見與提醒。