

實數系的建構

林琦焜

- 導數真正是甚麼? — 答: 極限
- 積分真正是甚麼? — 答: 極限
- 無窮級數 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ 真正是甚麼? — 答: 極限

這就導致了底下的問題

- 極限是甚麼? — 答: 數

所以最終的問題是:

- 數是甚麼?

— Augustin Cauchy (1789–1846) —

§1. 前言

西元1872年是不平凡的一年, 這一年, 有好幾位 (五位! Weierstrass, Dedekind, Méray, Heine, Cantor) 數學家同時提出了實數系統建構的理論。他們不約而同地出版他們的著作討論困惑人們2500年之久的無理數問題, 他們出發點不同, 方法也各異, 但他們都把有理數當做已知的東西, 從而描述實數系統。他們描述的方法雖異, 但從數學的結構觀點來看, 所描述的卻是同樣的東西。他們的目標是: 在不預先假設無理數存在的條件下, 建立一個令人滿意的無理數理論。然後把無理數和有理數合在一起構成實數, 之後為實數建立一個可靠的連續性理論。如此數學分析 (主要研究實變量的實函數), 才能有一個牢靠的基礎。



圖 1. Weierstrass



圖 2. Heine

Georg Cantor (1845–1918) 的父母都是猶太裔，他的父親生於丹麥的哥本哈根，年輕時移居俄國聖彼得堡，1845年3月3日數學家 Georg Cantor 誕生於此。1856年舉家遷往德國的法蘭克福，之後 Cantor 就一直在德國接受教育，後來進入柏林大學。他的博士論文是從鑽研高斯的“Disquisitiones Arithmeticae”得到啓發而研究不定方程。後來在大數學家 Weierstrass 學派的影響下研究 Fourier 級數，從而創造著名的無限數學 —— “集合論”。

Charles Méray (1835–1911) 是法國數學家，他主要是研究 Lagrange 早年的工作，針對 Lagrange 只作出猜測的工作，加以嚴格的數學證明。他發表關於無理數的算術理論是等價於 Cantor 的理論，但顯然他的工作並沒有受到 Weierstrass 與 Dedekind 的影響。

Richard Dedekind (1831–1916) 是德國數學家，他是高斯的閉門弟子（那時高斯已 75 歲高齡），Dedekind 主要是研究 Euler 積分，但使他名垂千古的是與 Cantor 共同創造集合論與實數理論的 Dedekind 斷口 (Dedekind cut)，另外根據整數論的研究，他創造了代數學的重要概念 —— 理想 (ideal)，他取這個名稱主要是為了紀念德國數學家 Ernst Kummer (1810–1893)。Dedekind 思想開放，治學嚴謹，是 1880 年代勇於探討無限 (infinite) 的少數數學家。他是 Cantor 號召的數學同好，他們從 1872 年到 1899 年書信往返達 27 年，在彼此旗鼓相當的對話中，可以看見兩位智者彼此切磋琢磨互相砥礪，在嚴厲的評論中逼對方給出最好的數學成果。這些書信是數學文學中最美的作品。

從技術層面而言 Dedekind 斷口與 Cantor 的基本序列解決了實數的理論，它們反映了兩個互相等價的事實：最小上界原理，Cauchy 的收斂性原理。數學分析的基礎：極限，連續性原理就是奠基於這些原理與長度和距離等幾何概念之上。Dedekind 或 Cantor-Méray 的實數建構看來很抽象，但它們卻可經由已知的有理數來定義的清清楚楚。它們更可用來澄清連續與極限的觀念，使微積分立於堅固的邏輯基礎上，使分析學的嚴謹化達成目的。

§2. Cantor-Méray 的實數理論

『數學在其發展中是完全自由的，它只受下述自明的關注所制約，即它的概念既要內在地不存在矛盾，還要參予確定與此前形成的，已經存在著的和已被證明的概念之關係（藉助定義貫串起來）。特別地，在引入新數時，數學只遵循：在給出它們的定義時使之具有某種確定性，並且在某些情況下，使之與舊數有某種關係，在特定的場合中這種關係一定會使它們（新數跟舊數）互相區別開來。只要一個數滿足這些條件，數學只能而且必須把它看作是存在且實在的東西。這正是我在第四段中關於為什麼必須把有理數、無理數和複數看作與有限正整數一樣是實存的所建議的理由。』

— G. Cantor (1845–1918) —



圖3. Cantor

第一個實數系統建構的理論是 G. Cantor 和 C. Méray (1835–1911) 於1872年提出的。當我們問一有理數列

$$a_n = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)} \quad (2.1)$$

的極限為什麼？在有理數系中我們實在無法說 a_n 的極限是甚麼，也就是說有理數系不完備，我們就把它擴大，使其有極限，一個有理數列 $\{x_n\}_n$ ，如果當 m, n 夠大時， $|x_n - x_m|$ 就會小到任何預定範圍內，則稱 $\{x_n\}_n$ 為一 Cauchy 數列。

定義 2.1 (有理 Cauchy 數列). $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ 是一個有理 Cauchy 數列，意思是對於每個 $\epsilon > 0$ ，都存在 $\omega \in \mathbb{N}$ ，使得

$$\forall m, n \geq \omega \implies |x_n - x_m| < \epsilon \quad (2.2)$$

如果把一 Cauchy 數列相應的點標在直線上，則這些點終究會擠在一起。Cantor-Méray 希望他們的實數系會使 x_n 趨近於一實數，所以乾脆就讓 $\{x_n\}_n$ 代表一實數，也就是實數等於

所有的有理數 Cauchy 數列, 但是另一有理數 Cauchy 數列 $\{y_n\}$ 亦可能與 $\{x_n\}$ 趨近於同一實數, 所以如果 $x_n - y_n \rightarrow 0$ 則在 Cantor-Méray 系統中, 我們就認定 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 代表同一實數。Cantor-Méray 的思維方式是: 藉由 Cauchy 數列, 來定義全等關係 (equivalent relation), 再由全等關係得出全等類 (equivalent class), 而全等類就代表實數;

$$\text{Cauchy數列} \iff \text{全等關係} \iff \text{全等類}$$

整個架構是從 Cauchy 數列開始, 因此需要距離 (metric) 的概念, 事實上 Cantor 的方法可以推廣至距離空間 (metric space)。

全等關係, 全等類

我們分別用有理數列與 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 對應

$$\sqrt{2} \leftrightarrow \{1.4; 1.41; 1.414; \dots\}$$

$$\sqrt{3} \leftrightarrow \{1.7; 1.73; 1.732; \dots\}$$

則 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ 與底下有理數列對應

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \leftrightarrow \{2.38; 2.4393; 2.449048; \dots\}$$

但另一方面

$$\sqrt{6} \leftrightarrow \{2.4; 2.44; 2.449; \dots\}$$

依據我們對 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ 與 $\sqrt{6}$ 的認識, 這兩個“數”是一樣的, 因此有必要鑑定這兩個有理數列。為此我們引進全等關係 (equivalent relation), 全等類 (equivalent class) 的概念。

定義 2.2 (全等關係). 兩個有理 Cauchy 數列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 對任意正有理數 ϵ 若滿足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0, \quad \text{存在正整數 } N \geq 1, \quad \forall n \geq N \iff |x_n - y_n| < \epsilon \quad (2.3)$$

則稱數列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 為全等或等價 (equivalent), 記為 $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ 。

由這個定義不難證明全等關係滿足:

- (1) 反身性 (reflexive): $\{x_n\} \sim \{x_n\}$
- (2) 對稱性 (symmetric): $\{x_n\} \sim \{y_n\} \implies \{y_n\} \sim \{x_n\}$
- (3) 遞移性 (transitive): $\{x_n\} \sim \{y_n\}, \{y_n\} \sim \{z_n\} \implies \{x_n\} \sim \{z_n\}$

有了全等關係就可以造全等類,

$$\overline{\{x_n\}} = \{\{y_n\} \mid \{y_n\} \text{ 是有理數列且 } \{y_n\} \sim \{x_n\}\}$$

定義 2.3 (Cantor-Méray). 實數 (\mathbb{R}) 是所有有理 Cauchy 數列之全等類的集合:

$$\mathbb{R} = \{\overline{\{x_n\}} \mid \{x_n\} \text{ 是 Cauchy 有理數列}\} \quad (2.4)$$

在 Cantor-Méray 的思想體系中, 有理 Cauchy 數列 $\{x_n\}_n$ 就代表一實數, 兩個有理數 Cauchy 數列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 如果滿足 $|x_n - y_n| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ 則在 Cantor-Méray 系統中就認定 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 代表同一實數。

此系統最具體的表示就是無窮小數, 任意無窮小數

$$x = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{10^m}, \quad a_m \in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad a_0 \text{ 爲整數}, \quad (2.5)$$

都可看成 Cauchy 數列 $\{x_n\}$,

$$x_n = a_0 + \sum_{m=1}^n \frac{a_m}{10^m}$$

至於原來的有理數 $x \in \mathbb{Q}$, 也可相應到一 Cauchy 數列 $\{x_n\}$ 其中任一 x_n 都和 x 相等 (常數數列):

$$x \leftrightarrow \overline{\{x, x, x, \dots\}} \quad (2.6)$$

因此 x 是一個實數, 有理數是實數的子集合, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 。在 Cantor-Méray 的實數系, 任何一個實數, 例如 $\pi, e, \sqrt{2}, 0.\dot{6}, \dots$ 代表一大群的數, 而且這些數 (有理數) 彼此都非常接近。

『這樣 $\sqrt{3}$ 只是一個待求數的符號, 但卻不是它的定義, 而是按我的方法 $\sqrt{3} \approx (1.7, 1.73, 1.732, \dots)$ 。』

— G. Cantor (1845–1918) —

四則運算

有理數有四則運算 (加, 減, 乘, 除), 那麼在 Cantor-Méray 系統中如何定義兩個有理 Cauchy 數列的四則運算與大小關係呢? 令 $x = \overline{\{x_n\}}, y = \overline{\{y_n\}}$ 代表兩個實數我們定義加法, 乘法如下:

$$x + y := \overline{\{x_n + y_n\}}, \quad x \cdot y := \overline{\{x_n \cdot y_n\}} \quad (2.7)$$

這個定義不會有問題發生。因為 $\{x_n + y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}$ 是有理 Cauchy 數列:

$$|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - x_m \cdot y_m| &= |x_n \cdot y_n - x_m \cdot y_n + x_m \cdot y_n - x_m \cdot y_m| \\ &\leq |y_n| |x_n - x_m| + |x_m| |y_n - y_m| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

其次必須保證這個定義是 well-defined, 若 $\{x'_n\}$ 與 $\{x_n\}$ 表同一實數, $\{y'_n\}$ 與 $\{y_n\}$ 表同一實數, 則

$$(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n) = (x_n - x'_n) + (y_n - y'_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$(x_n \cdot y_n) - (x'_n \cdot y'_n) = (x_n - x'_n)y_n + x'_n(y_n - y'_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

因此 $\overline{\{x_n + y_n\}}, \overline{\{x'_n + y'_n\}}$, 代表相同的實數, 同理 $\overline{\{x_n \cdot y_n\}}, \overline{\{x'_n \cdot y'_n\}}$, 也代表相同的實數。至於除法, 則必須先要求 $y_n \neq 0$, 如此則存在夠大的 n_0 使得當 $n \geq n_0$ 時 $|y_n| > r > 0$, 此時定義除法為

$$x \div y = \overline{\{x_n\}} \div \overline{\{y_n\}} = \overline{\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}_{n=n_0}^{\infty}} \quad (2.8)$$

按這樣的定義有理 Cauchy 數列 $\overline{\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}_{n=n_0}^{\infty}}$ 所代表的實數與前 n_0 項無關。另外 $x = \overline{\{x_n\}}$ 之加法反元素與乘法反元素定義為

$$-x = \overline{\{-x_n\}}, \quad x^{-1} = \overline{\{x_n^{-1}\}} = \overline{\{1/x_n\}} \quad (2.9)$$

而加法, 乘法及加法與乘法間的運算關係也會滿足體 (field) 的要求。

定理 2.4 (體, field). $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 是一個體 (field)。

- (1) 交換律 (加法): $x + y = y + x$
- (2) 結合律 (加法): $(x + y) + z = x + (y + z)$
- (3) 加法單位元素 0: $0 + x = x$
- (4) 加法反元素 $-x$: $-x + x = 0$
- (5) 交換律 (乘法): $x \cdot y = y \cdot x$
- (6) 結合律 (乘法): $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- (7) 乘法單位元素 1: $1 \cdot x = x$
- (8) 乘法反元素 x^{-1} , ($x \neq 0$): $x^{-1} \cdot x = 1$
- (9) 乘法對加法分配律: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

大小關係

定義 2.5 (大小關係: order). 令 $x = \overline{\{x_n\}}$, $y = \overline{\{y_n\}}$ 代表任意兩個實數其大小關係 (order) 可如此定義:

$$\begin{aligned} x < y &\iff \exists \epsilon' > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, x_n < y_n - \epsilon' \\ x \leq y &\iff x < y \text{ 或 } x = y \end{aligned} \quad (2.10)$$

特別要注意的是 ϵ' 的選取必須是有理數, 否則 Cantor-Méray 的理論無法適用。令 $x = \overline{\{x_n\}} = \overline{\{x'_n\}}$, $y = \overline{\{y_n\}} = \overline{\{y'_n\}}$, 滿足 $x'_n - x_n \leq \epsilon_1$, $y_n - y'_n \leq \epsilon_2$ 則

$$x'_n - y'_n = (x'_n - x_n) + (y_n - y'_n) + (x_n - y_n) \leq \epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon' = \epsilon''$$

所以大小的定義與所選取的 Cauchy 有理數列無關。由這定義再加上 \mathbb{R} 是一個體 (field), 可以證明實數 \mathbb{R} 是一個有序體 (ordered field)。

定理 2.6 (有序體, ordered field). 已知 $x = \overline{\{x_n\}}$, $y = \overline{\{y_n\}}$, $z = \overline{\{z_n\}}$ 是任意三個實數, 則

- (1) 反身性 (reflexive): $x \leq x$
- (2) 反對稱性 (antisymmetric): $x \leq y, y \leq x \implies x = y$
- (3) 遞移性 (transitive): $x \leq y, y \leq z \implies x \leq z$
- (4) $x \leq y \implies x + z \leq y + z$
- (5) $0 \leq x, 0 \leq y \implies 0 \leq xy$

在代數中滿足上述不等式關係的體稱為有序體 (ordered field), 有理數與實數都是有序體, 那此二種數系的差別在哪裡呢? 實數有一個特殊的性質“實數中的 Cauchy 數列一定有極限值”, 也就是說實數是完備的 (complete), 這是實數與有理數最大的差異。實際上, 可以證明: 實數是唯一的完備有序體。

說到大小, 我們還需要絕對值, 為此先引進 total 的概念:

引理 2.7 (total). x, y 是任意兩個相異實數, $x \neq y$, 則 $x < y$ 或 $y < x$ 。

在證明引理 2.7 之前, 我們首先釐清 $x \neq y$ 的意義, 在 Cantor-Méray 的系統下, 兩個實數相等是指它們是全等的有理 Cauchy 數列, 因此 $x = \overline{\{x_n\}} \neq y = \overline{\{y_n\}}$ 意思是

$$\{x_n\} \not\sim \{y_n\} \iff \exists \epsilon > 0 \forall N \geq 1, \exists n \geq N, |x_n - y_n| \geq \epsilon \quad (2.11)$$

引理 2.7 之證明: 令 $x = \overline{\{x_n\}}$, $y = \overline{\{y_n\}}$ 是兩相異實數, 即滿足 (2.11), 另外 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 是有理 Cauchy 數列, 存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 滿足

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n+k}| &< \frac{\epsilon}{3}, & n \geq N_1, & k \geq 1 \\ |y_n - y_{n+k}| &< \frac{\epsilon}{3}, & n \geq N_2, & k \geq 1 \end{aligned}$$

選取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 則由 (2.11) 知道有兩種可能性

$$x_n - y_n \geq \epsilon \quad \text{或} \quad y_n - x_n \geq \epsilon$$

顯然 $\forall k \geq 1$, x_{n+k}, y_{n+k} 總是落在半徑 $\epsilon' = \frac{\epsilon}{3}$ 的圓盤內, 因此

$$\begin{aligned} \exists \epsilon' = \frac{\epsilon}{3} > 0, \quad \exists N \geq 1, \quad \forall n \geq N, \quad x_n \leq y_n - \epsilon' \\ \exists \epsilon' = \frac{\epsilon}{3} > 0, \quad \exists N \geq 1, \quad \forall n \geq N, \quad y_n \leq x_n - \epsilon' \end{aligned}$$

這相當於說 $x < y$ 或 $y < x$ 。

如果大小關係滿足引理 2.7, 我們特別稱爲 total, 因此就可以定義絕對值 (absolute value)。

定義 2.8 (total). $x = \overline{\{x_n\}}$ 是一實數則其絕對值爲 $|x| = \overline{\{|x_n|\}}$

由定義 2.8 容易證明三角不等式 $|x + y| \leq |x| + |y|$ 。藉由 Cantor-Méray 的思想體系, 可以把無理數 (irrational number) 建立在一個合理且嚴格的數學理論基礎上, 這個方法

$$\text{Cauchy 數列} \iff \text{全等關係} \iff \text{全等類}$$

也實際提供我們如何將任意一個非完備距離空間完備化 (completion) 的方法。

§3. Dedekind 的實數理論

『上面把有理數比做直線, 結果使直線上充滿了間隙, 它是不完備的、不連續的, 而我們則把直線看成是沒有間隙的、完備的和連續的。直線的連續性是什麼意思? 這個問題的答案必須包含研究所有連續區域時所根據的科學基礎, 只是泛泛而談其最小子集的不間斷的連接性, 不會產生什麼結果, 我們必須要有連續性的一個精確定義, 使它可以成爲邏輯推理的基礎。長時期以來, 我對這些事情進行了深入思考, 但始終沒有取得成果, 一直到最近我才發現我所要尋求的答案。不同的人對於我的發現將會有不同的判斷, 但我相信大多數人都會覺得它平凡無奇。在上一段中我曾指出, 直線

上每一點 p 都將直線分成兩部分, 使得其中一部分的點都在另一部分的點的左方。我確信, 連續性的實質就在於它的反面, 也就是下面的原理, 如果直線上所有的點都屬於兩類, 使得第一類中每一點都在另一類中每一點的左方, 那麼就存在唯一的一個點, 它產生了把直線分成兩部分的分劃。』

— R. Dedekind (1831–1916) —



圖4. Dedekind

在西元 1872 年左右除 Cantor 及 Méray 外, R. Dedekind 提出另一種描述實數的方法。對 Dedekind 而言, 他所選取的假設是

任何單調有界的實數序列都有極限存在。

他的想法如下: 在一直線 (實數線) 上, 我們先規定好原點 0 及單位長 (規定為 1), 則所有有理數都可以依據其大小 (與原點之距離) 及正負對應到此線上。如果我們在直線上砍一刀, 在斷口 (cut) 左邊的所有有理數集合稱為 A_1 , 其右邊的所有有理數集合稱為 A_2 。若斷口正好是有理數, 則此有理數可以任意規定屬於 A_1 或 A_2 。這個斷口就稱為 Dedekind 斷口 (Dedekind cut) 以 (A_1, A_2) 表之。 (A_1, A_2) 這種集合有下列性質:

- (a) A_1, A_2 都含有有理數, $A_1 \neq \emptyset, A_2 \neq \emptyset$
- (b) A_1 及 A_2 的聯集為有理數; $A_1 \cup A_2 = \mathbb{Q}$
- (c) A_1 中的有理數必小於 A_2 中的有理數, $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \implies a_1 < a_2$ 。

因為 A_1, A_2 都是有理數, 所以這種集合從最大值, 最小值的觀點來分類有底下三種情形

- (1) A_1 有最大, A_2 沒有最小有理數
- (2) A_1 沒有最大, A_2 有最小有理數
- (3) A_1 沒有最大, A_2 沒有最小有理數

我們藉幾何直觀而得 A_1, A_2 這兩個集合, 反過來, 我們可以完全捨棄幾何, 而考慮滿足上述兩個性質的有理數子集合 A_1, A_2 。這樣的 A_1, A_2 稱為一個斷口 (cut), 以 (A_1, A_2) 表之。一個斷口 (A_1, A_2) 滿足 (1) 或 (2) 則 (A_1, A_2) 所代表的就是這個有理數, 如果滿足 (3) 則

(A_1, A_2) 代表的就是一個無理數。所以 Dedekind 斷言說 (A_1, A_2) 就代表一個實數，而且實數的全體就是所有 Dedekind 斷口的集合。如果 A_1 (或 A_2) 中有最大 (或小) 的有理數，則 (A_1, A_2) 代表的就是這個有理數。因此可知有理數可用兩種斷口表示，而且 Dedekind 的實數系確實是有理數系的擴張。

在 Dedekind 的系統中如何定義四則運算與大小關係呢？若 α, β 為任意兩個 Dedekind 斷口

$$\alpha = (A_1, A_2), \quad \beta = (B_1, B_2)$$

令 $C_2 := \{a + b \mid a \in A_2, b \in B_2\}$, $C_1 = \mathbb{Q} - C_2$ 則新的斷口 (C_1, C_2) 代表一個實數，記為 $\gamma = (C_1, C_2)$ 所以加法就定義為

$$\alpha + \beta = \gamma, \quad (A_1, A_2) + (B_1, B_2) = (C_1, C_2)$$

由這個定義可以證明加法滿足交換律與結合律，所以 $(\mathbb{R}, +)$ 形成一個 abelian 群 (abelian group)，而 0 是加法單位元素。

其次是乘法，首先考慮兩個 Dedekind 斷口都位於原點右方； $\alpha, \beta \geq 0$ ，令 $D_2 := \{a \cdot b \mid a \in A_2, b \in B_2\}$, $D_1 = \mathbb{Q} - D_2$ ，則新的斷口 $\delta = (D_1, D_2)$ 是一個實數，我們就定義

$$\alpha \cdot \beta = \delta, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0$$

其他情形則定義如下：

$$\alpha \cdot \beta = -((-\alpha) \cdot \beta), \quad \alpha < 0, \quad \beta \geq 0$$

$$\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta), \quad \alpha < 0, \quad \beta < 0$$

$$\alpha \cdot \beta = -(\alpha \cdot (-\beta)), \quad \alpha > 0, \quad \beta < 0$$

在這個定義下可以證明乘法滿足交換律，結合律與分配律，所以 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 形成一個體 (field)，而 1 是乘法單位元素。

關於大小關係，從幾何的角度來看是很直觀的

$$\alpha \leq \beta \iff A_1 \subset B_1, \quad (A_2 \supset B_2)$$

可以證明

$$\alpha \geq \beta \implies \alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$$

$$\alpha \geq \beta, \quad \gamma \geq 0 \implies \alpha \cdot \gamma \geq \beta \cdot \gamma$$

所以 Dedekind 的實數系是一個有序體 (order field)。

定義 3.1. 已知任意集合 $A \subset \mathbb{R}$ ，如果 $\alpha \in \mathbb{R}$ 滿足

(1) $\forall a \in A, a \leq \alpha$

(2) $\forall \epsilon > 0, \exists a \in A, a > \alpha - \epsilon$

我們就稱 $\alpha \in \mathbb{R}$ 是集合 A 的最小上界 (記為 $\alpha := \sup A$)。

條件 (1) 告訴我們 α 是一個上界, 條件 (2) 則是說 α 往下降 ϵ 之後 $\alpha - \epsilon$ 便不再是最小上界了, 換句話說 α 的確是最小上界。有時我們把這性質稱為最小上界公理。

現在不管是不是有理數, 就直接在實數線上砍一刀定義斷口 (A_1, A_2)

(1) $A_1 \neq \emptyset, A_2 \neq \emptyset, \mathbb{R} = A_1 \cup A_2$

(2) $\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2 \implies \alpha_1 < \alpha_2$

所有在 \mathbb{R} 上的斷口 (A_1, A_2) 從最大值, 最小值的觀點來看可以分為兩種情形:

(i) A_1 有最大, A_2 沒有最小值

(ii) A_1 沒有最大, A_2 有最小值

這裡所說的最大值, 最小值是實數值, 這點是與前面以有理數為基礎最大的差別, 我們將上面這個性質稱為實數的連通性或連續性。它的意思是在實數線上任意砍一刀, 所得到的斷口總是一個實數, 而且這個實數 (記為 α) 表示為

$$\alpha := \sup A_1 = \inf A_2$$

$$\alpha_1 \leq \alpha, \quad \forall \alpha_1 \in A_1$$

$$\alpha \leq \alpha_2, \quad \forall \alpha_2 \in A_2$$

我們可以取的更特殊 (利用有理數)

$$\alpha = \sup A, \quad A \subset \mathbb{Q}$$

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad a_n \in \mathbb{Q}$$

所以 Dedekind 的實數系是以最小上界 (sup) 或最大下界 (inf) 為理論基礎。Cantor 對於實數的造法與 Dedekind 不同之處, 在於它沒有用到有理數是有序的這個事實, 他的出發點是 Cauchy 數列的集合。

§4. 實數的連續性原理 (完備性理論)

完備性有不同但等價的定義, 例如; 所有的 Cauchy 數列都有極限, 單調有界數列必收斂, 有界的數列必有聚點, ... 等, 對 Dedekind 而言他的出發點是

任何單調有界的實數數列都有極限存在

定理 4.1 (Dedekind 原理). 已知實數的兩個集合 $X, Y \subset \mathbb{R}$, $X \cap Y = \emptyset$ 且滿足

$$x < y, \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

則存在 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得 $x \leq \xi \leq y$ 。

定理 4.2 (Cantor 原理). 已知實數 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots; b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ 滿足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| \rightarrow 0$$

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

則存在 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ 。

定理 4.3 (Cauchy 原理). 所有的 Cauchy 數列都有極限。

定理 4.4 (Weierstrass 原理). 已知 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ 是一遞增數列 ($a_{n-1} \leq a_n \leq a_{n+1}$) 且有上界 M , $a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$, 則存在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, 換言之; 遞增且有上界的數列必收斂。

如果遞增數列換為遞減數列, 上界換為下界, 定理 4.4 仍然成立 (遞減且有下界的數列必收斂), 此時 $\alpha = \inf A = \inf \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$;

$$(1) a \geq \alpha, \quad \forall a \in A$$

$$(2) \forall \epsilon > 0, \quad \exists a \in A \quad a < \alpha + \epsilon$$

定理 4.5 (Archimedes 原理). 已知 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a > 0$, 則存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $na > b$, 換言之; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n} = 0$ 。

[註解]: 如果先假設 Archimedes 原理成立, 則定理 4.1–4.4 等四個連續性原理是等價的。

定理 4.6 (Bolzano, 1817). 已知 $M \in \mathbb{R}$ 是一個固定數, A 是實數的一個非空子集且有上界,

$$A \subset \mathbb{R}, \quad A \neq \emptyset, \quad \exists M, \quad \text{使得 } x \leq M, \quad \forall x \in A$$

則存在一實數 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得 $\xi = \sup A$ 。

證明: Bolzano 的想法是二分法, 由於 $A \neq \emptyset$, 可以選取一點 $\alpha_0 \in A$ 且 α_0 不是一個上界, 所以 $\alpha_0 \leq M$, 我們取一點 β_0 (可以是 M) 是一個上界, 然後取中間點 $\gamma = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}$, 此時有兩種可能性; 如果 γ 是 A 的上界, 則令 $\alpha_1 = \alpha_0, \beta_1 = \gamma$; 如果 γ 不是 A 的上界, 則令 $\alpha_1 = \gamma, \beta_1 = \beta_0$; 然後重複這個步驟可以造出一系列的區間 $[\alpha_n, \beta_n]$, 長度為 $\beta_n - \alpha_n = (\beta_0 - \alpha_0)/2^n$, 其中 $\{\alpha_n\}$ 是遞增數列, $\{\beta_n\}$ 是遞減數列, 而且

$$[\alpha_0, \beta_0] \supset [\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \dots \supset [\alpha_n, \beta_n] \supset \dots$$

其長度是依等比數列 $\{1/2^n\}$ 遞減, 因此

$$|\alpha_n - \alpha_{n+k}| \leq \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n} \quad |\beta_n - \beta_{n+k}| \leq \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n}$$

所以 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ 都是 Cauchy 數列, 又因為 $\beta_n - \alpha_n = (\beta_0 - \alpha_0)/2^n \rightarrow 0$, Cauchy 數列 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ 有相同的極限, 記為 ξ

$$\alpha_0 \leq \beta_n \implies \alpha_0 \leq \xi, \quad \forall n$$

所以 ξ 是 A 的上界, 事實上 ξ 是 A 的最小上界, $\xi = \sup A$, 因為 $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha_n$ 使得 $\alpha_n > \xi - \epsilon$ 。

Cantor-Méray 的實數系具有完備性, 那麼 Dedekind 的實數理論是否也有這性質呢? Cantor-Méray 的理論, 完備性 (completeness) 是以 Cauchy 數列來定義: 所有的 Cauchy 數列都有極限。但 Dedekind 的理論是從斷口著手, 因此其它定義方式乃是必然的, 對 Dedekind 的理論而言, 利用上界, 下界的觀念是最自然不過的了!

這個定理說明了 Dedekind 的實數系統具有完備性, 因此是一個完備有序體 (complete order field)。然而 Cantor-Méray 與 Dedekind 造出的實數系是否相同? 是相同! Cantor-Méray 及 Dedekind 兩種實數系統之間存有一個一對一且映成的函數 f , 滿足下列關係: 令 a, b 表 Cantor-Méray 系統的實數, 而 $*$ 表四則運算, 則 $f(a*b) = f(a)*f(b)$, 且若 $a \geq b$ 則 $f(a) \geq f(b)$, 有一定理: 完備有序體只有一個。然而 Cantor-Méray, 及 Dedekind 的實數系皆為完備有序體, 所以這二個實數系統“相同”。

參考文獻

1. E. T. Bell, *Men of Mathematics*, New York, 1937.
(中譯本: 大數學家, 九章出版社, 1998。)
2. E. Hairer and G. Wanner, *Analysis by Its History*, UTM *Reading in Mathematics*, Springer-Verlag, 1995.
3. S. Hollingdale, *Makers of mathematics*, Penguin Books, 1994.
4. Herbert Meschkowski: 偉大數學家的想法, 洪萬生譯, 南宏出版, 1978。
5. Dirk J. Struik, *A concise History of Mathematics*, Dover, New-York, 1967.
(中譯本: 數學史, 吳定遠譯, 水牛出版社印行, 1982。)
6. Dunham William, *Journey Through Genius, the great theorems of mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., 1990, Penguin Books, 1991.
(中譯本: 天才之旅, 偉大數學定理之創立, 林傑斌譯, 牛頓出版股份有限公司, 1995。)
7. 胡作玄, 引起紛爭的金蘋果, 哲人數學家 — 康托爾, 業強出版社, 1997。