

複數測驗

郭正義設計

1. $z = \frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i}$, 幅角範圍取 $[-\pi, \pi]$, 則下列何者為真?

(A) $|z| = 2$ (B) $|z| = \sqrt{2}$ (C) $|z| = 1$

(D) $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ (E) $\arg(z) = -\frac{\pi}{4}$

2. 若 $3 + i$ 為 $x^2 + (a + bi)x + 17 - i = 0$ ($a, b \in R$) 之一根, 設其另一根為複數 α , 則

(A) $a + b = 7$ (B) $a - b = 7$ (C) $|\alpha| = \sqrt{29}$

(D) $\arg(\alpha)$ 屬於第 II 象限, (E) $\arg(\alpha)$ 屬於第 IV 象限。

3. 設 $z \in C$ 且 $|z-1| \leq |z| \leq 1$ 滿足左式之 z 在高斯平面上之圖形為 Γ , 使等號成立的 z 值為 α , 則下列何者為真?

(A) Γ 為一弓形及其內部。 (B) Γ 的面積為 $\pi/3 - \sqrt{3}/4$

(C) $\pi/3$ 可為 α 之幅角 (D) $5\pi/3$ 可為 α 之幅角

(E) $|\alpha| = 1$

4. 設

$$z = \left(\frac{1 + \cos\theta + i\sin\theta}{1 + \cos\theta - i\sin\theta} \right) \cdot \left(\frac{1 + \sin\theta + i\cos\theta}{1 + \sin\theta - i\cos\theta} \right)$$

則

- (A) $|z|=1$ (B) $|z|<1$ (C) $|z|>1$
 (D) $\frac{\pi}{2}$ 為 z 之幅角 (E) 0 為 z 之幅角。
5. $x, y \in \mathbb{R}$, 且 $|x-y| + (y-2)i = 5x - 2 - 3xi$ 則序對 (x, y) 可為
 (A) (0, 2) (B) (4/9, 2/3) (C) (2/9, 4/3)
 (D) (2/3, 4/9) (E) (4/3, 2/9)
6. 設滿足 $|z+1-i| + |z-3+2i| = 6$ 之複數 z 於高斯平面上的圖形為 Γ , 則
 (A) Γ 表 ϕ (B) Γ 表雙曲線 (C) Γ 表橢圓
 (D) Γ 之中心為 $1-i/2$ (E) Γ 之離心率為 $5/6$
7. 設 $\alpha \in \mathbb{C}$ 且 $|\alpha|=1$, 則於下列各敘述中對滿足各方程式之一切複數 z 所成的圖形而言, 何者為真?
 (A) $z = \alpha + 1 + i$ 直線 (B) $z = \frac{1}{\alpha+1}$ 直線
 (C) $z = 1/a$ 圓 (D) $z = \frac{1+i\alpha}{\alpha+1}$ 線段 (E) 以上皆非。
8. 設 $\alpha = 3(\sin 20^\circ - i\cos 20^\circ)$, $\beta = 2(\cos 35^\circ - i\sin 35^\circ)$, $z = \alpha\beta$, 則
 (A) 75° 為 z 之幅角 (B) -250° 為 α 的幅角
 (C) $R_e(\alpha\beta) = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot 3/2$
 (D) $R_e(z) + I_n(z) = 3\sqrt{2}$ (E) $R_e(z) + I_m(z) = 3\sqrt{6}$
9. 設 $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3}$, 則下列何者成立?
 (A) $(\omega + 2\omega^2)^2 + (2\omega + \omega^2)^2 = 3$
 (B) $2\omega^{132} + 3\omega^{227} + 4\omega^{313} = a\omega + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 時 $a + b = 1$
 (C) 若 $c\omega + d = \frac{1}{\omega-1}$ ($c, d \in \mathbb{R}$) 則 $c + d = -1$

(D) 當 $n=3k$, ($k \in \mathbb{N}$) 時, $\omega^n + \bar{\omega}^n = 2$

(E) $n \neq 3k$, ($k \in \mathbb{N}$) 時 $\omega^n + \bar{\omega}^n = -1$.

10. 設 $z = \frac{2}{1 - \sqrt{3}i}$ 且 $k = z^5 + 3z$ 則
 (A) $|k| = \sqrt{7}$
 (B) 幅角範圍取 $(-\pi, \pi)$ 時 $\arg(k)$ 為 $0 < \arg(k) < \frac{\pi}{2}$
 (C) $k + 1 = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i\sin \frac{\pi}{6} \right)$
 (D) $k - 1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{6} \right)$ (E) 以上皆非
11. 設 $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ 且 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, 令 $k = (1+i)z$ 則 $|k| = \underline{\hspace{2cm}}$ $\arg(k) = \underline{\hspace{2cm}}$
12. $-\pi < \theta < 0$, $z_1 = 1 - \cos\theta - i\sin\theta$, $z_2 = \cos\theta + i\sin\theta$, $z_3 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$
 則 $|z_1| = \underline{\hspace{2cm}}$ $\arg(z_1) = \underline{\hspace{2cm}}$
 $|z_2 + z_3| = \underline{\hspace{2cm}}$ $\arg(z_2 + z_3) = \underline{\hspace{2cm}}$
13. 設 $0 \leq \theta < 2\pi$ 且

$$\left(\frac{2 - \sin\theta + i\cos\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} \right)^2$$
 表一實數則 $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$
4. 設 $A(1+2i)$, $B(-2+3i)$, $C(-i)$ 於高斯平面上將 $\triangle ABC$ 之外接圓方程式寫成 $|z|^2 + az + b\bar{z} + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{C}$)
 則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\triangle ABC$ 外接圓半徑 $r = \underline{\hspace{2cm}}$ 圓心之複數坐標極式為 $\underline{\hspace{2cm}}$
15. 設 $a, b \in \mathbb{R}$, x 的二次方程式

$$x^2 + (2+i)x + 4ab + (2a-b)i = 0$$
 有實根時 a, b 之關係式為 $\underline{\hspace{2cm}}$
 將 a 視為橫坐標, b 視為縱坐標則滿足上式之一切點 (a, b) 的軌跡為 $\underline{\hspace{2cm}}$ (寫出圖形名稱)
 若原方程式求得之實根為 k 時, k 之範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$