

本期演練試題

大學聯考數學科模擬試題命題觀摩

羅添壽 設計

【前言】

1. 本模擬試題是針對目前高中一般學生程度而擬定，避免艱澀難題，以維護正常教學。
2. 本模擬試題希望啟發學生之思考、分析、演算能力，來矯正學生死讀數學之現象。
3. 本模擬試題僅供參考，敬請各位先進多多指教。

【甲】設 $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$, $z^{50} = a + bi$, 其中 $i = \sqrt{-1}$,

a, b 為實數

4. (A) $a \in \{1/2, \sqrt{3}/2, -1/2, 2\}$
 (B) $a \in \{-2, -1/2, \sqrt{3}/2, 2\}$
 (C) $a \in \{1/2, -1/2, -2, -\sqrt{3}/2\}$
 (D) $a \in \{-1/2, 2, 2/\sqrt{3}, -3\}$
 (E) $a \in \{-3, -2, -1, 1/2\}$ (多選, 2分)
6. (A) $b \in \{1/2, \sqrt{3}/2, -1/2, 2\}$
 (B) $b \in \{-2, -1/2, \sqrt{3}/2, 2\}$
 (C) $b \in \{1/2, -1/2, -2, -\sqrt{3}/2\}$
 (D) $b \in \{-1/2, 2, 2/\sqrt{3}, -3\}$
 (E) $b \in \{-3, -2, -1, 1/2\}$ (多選, 2分)
7. 欲使 $z^n = i$, $n \in \mathbb{N}$, 則 n 之最小值為
 (A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12 (E) 15 (單選, 6分)

【乙】設 $a, b \in \mathbb{N}$, $a + b = 18$, 若計算 $\sqrt{b/a}$ 之值, 於小數第三位四捨五入可得近似值 1.61, 則

11. (A) $a \in \{3, 5, 7, 9, 11\}$ (B) $a \in \{8, 10, 12, 14, 16\}$
 (C) $a \in \{5, 7, 11, 13, 15\}$ (D) $a \in \{9, 2, 6, 3\}$
 (E) $a \in \{12, 6, 13, 5\}$ (多選, 3分)
12. (A) $b \in \{3, 5, 7, 9, 11\}$ (B) $b \in \{8, 10, 12, 14, 16\}$
 (C) $b \in \{5, 6, 11, 13, 15\}$ (D) $b \in \{9, 2, 6, 3\}$
 (E) $b \in \{12, 6, 13, 5\}$ (分選, 3分)

【丙】自然數 b 含有因數 a 之最高次幂 $n(n \in \mathbb{N})$ 記為

$f_a(b) = n$, 則

15. (A) $f_2(60) \in \{2, 4, 6, 10, 18\}$
 (B) $f_2(60) \in \{3, 5, 9, 21, 24\}$
 (C) $f_2(60) \in \{6, 18, 24, 30\}$
 (D) $f_2(60) \in \{5, 9, 15, 25\}$
 (E) $f_2(60) \in \{2, 6, 21, 24\}$ (多選, 3分)
16. (A) $f_{10000}(10^{100}) \in \{2, 4, 6, 10, 18\}$
 (B) $f_{10000}(10^{100}) \in \{3, 5, 9, 21, 24\}$
 (C) $f_{10000}(10^{100}) \in \{6, 18, 24, 30\}$
 (D) $f_{10000}(10^{100}) \in \{5, 9, 15, 25\}$
 (E) $f_{10000}(10^{100}) \in \{2, 6, 21, 24\}$ (多選, 4分)

【丁】設 $a, b, c \in \mathbb{N}$, 若 $(a, b) = 2$, $(b, c) = 3$, $(c, a) = 5$

且 $[a, b] = [b, c] = [c, a] = 30$, 則

20. (A) $a \in \{4, 6, 8, 10, 12\}$ (B) $a \in \{5, 7, 9, 13\}$
 (C) $a \in \{4, 6, 10, 13\}$ (D) $a \in \{8, 9, 11, 14\}$
 (E) $a \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$ (多選, 2分)
21. (A) $b \in \{4, 6, 8, 10, 12\}$ (B) $b \in \{5, 7, 9, 13\}$
 (C) $b \in \{4, 6, 10, 13\}$ (D) $b \in \{8, 9, 11, 15\}$
 (E) $b \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$ (多選, 2分)
22. (A) $c \in \{4, 6, 8, 10, 12\}$ (B) $c \in \{5, 7, 9, 13\}$
 (C) $c \in \{4, 6, 10, 13\}$ (D) $c \in \{8, 9, 11, 15\}$
 (E) $c \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$ (多選, 2分)

【戊】

設 A:
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{z} = 2 \\ \frac{3}{x} - \frac{3}{y} + \frac{6}{z} = 7 \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y} + \frac{9}{z} = 10 \end{cases}$$

B:
$$\begin{cases} 2yz + xz + 3xy = 2xyz \\ 3yz - 2zx + 6xy = 7xyz \\ 4yz - 3zx + 9xy = 10xyz \end{cases}$$

C:
$$\begin{cases} \frac{2}{ax} + \frac{1}{ax+by} + \frac{3}{ax+by+cz} = 2 \\ \frac{3}{ax} - \frac{2}{ax+by} + \frac{6}{ax+by+cz} = 7 \quad (abc \neq 0) \\ \frac{4}{ax} - \frac{3}{ax+by} + \frac{9}{ax+by+cz} = 10 \end{cases}$$

D:
$$\begin{cases} \frac{2}{[x]} + \frac{1}{[y]} + \frac{3}{[z]} = 2 \\ \frac{3}{[x]} - \frac{2}{[y]} + \frac{6}{[z]} = 7 \quad (\text{註 } [] \text{ 表高斯符號}) \\ \frac{4}{[x]} - \frac{3}{[y]} + \frac{9}{[z]} = 10 \end{cases}$$

E:
$$\begin{cases} \frac{2}{[x]} + \frac{1}{[y]} + \frac{3}{[z]} = 2 \\ \frac{3}{[x]} - \frac{2}{[y]} + \frac{6}{[z]} = 7 \quad \text{但 } x > 0, y > 0, z > 0 \\ \frac{4}{[x]} - \frac{3}{[y]} + \frac{9}{[z]} = 10 \end{cases}$$

若以上各聯立方程組之解集合為 S_A, S_B, S_C, S_D, S_E ，而 $[]$ 表高斯記號，試解答下列各題

25. $S_B - S_A =$
 (A) ϕ (B) $\{(0, 0, 0)\}$ (C) $\{(x, y, z) | (x, y, z) \in R\}$
 (D) $\{(0, 0, z), (0, y, 0), (x, 0, 0) | x, y, z \in R\}$
 (E) S_B (單選, 3分)
26. 下列何者為真
 (A) $S_A \subset S_B$ (B) $S_D \subset S_E$ (C) $S_E \subset S_D$
 (D) $S_A \subset S_D \subset S_B$ (E) $S_A \cap S_B \cap S_E = S_A$ (多選, 3分)
27. 下列何者為 ϕ
 (A) S_A (B) S_B (C) S_C (D) S_D (E) S_E (單選, 3分)

【己】設 $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = A \cos(\theta - \alpha)$ ，其中 $A > 0, \alpha \in [0, 2\pi]$ 則

30. (A) $A \in \{2, 4, 6, 8\}$ (B) $A \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$
 (C) $A \in \{3, 4, 5, 6\}$ (D) $A \in \{5, 6, 7, 8\}$
 (E) $A \in \{6, 9, 3, 7\}$ (多選, 3分)
31. (A) $\alpha \in \{\pi/3, \pi/4, \pi/6, \pi/2\}$

- (B) $\alpha \in \{\pi/12, 5\pi/12, \pi/6, 3\pi/12\}$
 (C) $\alpha \in \{\pi/6, 4\pi/6, 5\pi/6, \pi\}$
 (D) $\alpha \in \{\pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3, 5\pi/3\}$
 (E) $\alpha \in \{\pi/4, 2\pi/4, 3\pi/4, \pi\}$ (多選, 3分)

【庚】一船向東 37° 南，航行速度為 30 哩/時，於上午 9 時測得一島之方向為東 53° 北，至中午 12 時再測得該島之方向在船之北 23° 西則當時 (中午時)，船與島的距離為 t 哩

35. (A) $30 < t < 80$ (B) $70 < t < 90$ (C) $80 < t < 100$
 (D) $90 < t < 110$ (E) $110 < t < 120$ (單選, 6分)

【辛】設 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2, \vec{a} \cdot \vec{a} = 3, \vec{b} \cdot \vec{b} = 4$ ，若 $x = p\vec{a} + q\vec{b}$ ，且 $p + q = 1$ ，求 $|x|$ 之最小值？

38. (A) $\frac{8}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{8}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (E) $\frac{5}{3}$
 (5分)

【壬】題組

40. 設 $p(-2, 4)$ 至圓 $c: x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ 之切線段長為 l ，過 p 之切線對圓 c 之張角為 2θ ，則 l 為
 (A) $2\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{15}$ (C) $2\sqrt{5}$
 (D) $\tan \theta = 1/2$ (E) $\cos 2\theta = 3/5$ (多選, 4分)
41. (承上題) 設 Q 為 C 圓的圓心， A, B 分別是 P 至圓 C 兩切線的切點，則四邊形 $PAQB$ 之面積為
 (A) 15 (B) $20\sqrt{2}$ (C) $1 \cdot \sqrt{2}$ (D) 18 (E) 10
 (單選, 4分)

【癸】若有兩雙曲線或橢圓其離心率相等，吾人稱此兩雙線或此兩橢圓相似，問下列雙曲線中何者與 $\Gamma: 2x^2 - 3y^2 = 6$ 相似？

43. (A) $3x^2 - 2y^2 = 6$ (B) $19(x+7)^2 - 12(y-2)^2 = 12 \times 19$
 (C) $3x^2 - 2y^2 = 1$ (D) $2y^2 - 3x^2 = 1$ (E) $6x^2 - 9y^2 = 1$
 (多選, 6分)

【子】(題組)

45. 輔導班有 35% 是高一，25% 是高二，20% 是高三，20% 是高四，今參加「智力測驗」之各年級人數如下：所有高一學生都參加，高二有一半的學生參加，高三 20%，高四 10% 的學生參加，今任選一人 (機會均等) 此人參加「智力測驗」的機率是
 (A) $103/200$ (B) $13/25$ (C) $21/40$ (D) $107/20$
 (E) $215/200$ (單選, 4分)
46. (承上題)，若已知選上之人參加「智力測驗」，則此

68 數學傳播 [問題類]

人是高二學生的機率

- (A) 25/107 (B) 35/107 (C) 20/170 (D) 14/170
(E) 20/107 (單選, 4分)

【丑】(題組)

48. 有 1 至 5 之整數各寫於 5 張卡片, 由其中, 隨便取出 3 張之卡片時, 求取之 3 張中有 2 之卡片機率
(A) 1/5 (B) 2/5 (C) 3/4 (D) 2/3 (E) 以上皆非
(單選, 4分)
49. (承上題) 取出 3 張卡片, 所寫之最小值為 x , 當 $x = 2$ 之機率為
(A) 1/5 (B) 3/5 (C) 1/10 (D) 3/10 (E) 2/5
(單選, 3分)
50. (承上題), 求 x 之期望值為何
(A) 1 (B) 1/2 (C) 2 (D) 5/2 (E) 3/2
(單選, 4分)

【寅】線段 \overline{AB} 長為 p 單位, 中點 M 之垂線 \overline{MR} , 長 q 單位, 自 R 作一弧, 其中徑等於 $\frac{1}{2} \overline{AB}$, 交 \overline{AB} 於 T , 則 AT 與 TB 為下列何方程式之根

51. (A) $x^2 + px + q^2 = 0$
(B) $x^2 - px + q^2 = 0$
(C) $x^2 + px - q^2 = 0$
(D) $x^2 - px - q^2 = 0$
(E) $x^2 - px + q = 0$ (單選, 6分)

【卯】一農民有田地五甲, 資金 48000 元, 今種稻之成本每

甲 16000 元, 產量每甲 8000 公升, 收益為每公斤 2.6 元, 若種花生, 則成本每甲 4000 元, 產量每甲 2000 公升, 收益為每公升 6.5 元, 以他的資金應該種水稻多少 (設為 x) 才可得最大收益 (設為 z 萬元, z 之近似值為 $\alpha + \beta \cdot 10^{-1}$; α, β 為 0 到 9 之整數) 則

53. (A) $x = 2.33$ (B) $x = 2.65$ (C) $x = 3.0$
(D) $x = 4.67$ (E) $x = 3.22$ (取最近似值)
(單選, 3分)
54. (A) $\alpha \in \{2, 4, 6, 8\}$ (B) $\alpha \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$
(C) $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$ (D) $\alpha \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$
(E) $\alpha \in \{3, 6, 8, 9\}$ (多選, 分)
55. (A) $\beta \in \{2, 4, 6, 8\}$ (B) $\beta \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$
(C) $\beta \in \{1, 2, 3, 4\}$ (D) $\beta \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$
(E) $\beta \in \{3, 6, 8, 9\}$ (多選, 2分)

模擬試題, 試題分佈表

冊數	題號	所佔題數	配分
第一冊	(乙) 11, 12	2	6分
第二冊	(丙) 15, 16 (丁) 20, 21, 22 (成) 25, 26, 27	8	22分
第三冊	(己) 30, 31 (庚) 35 (卯) 53, 54, 55	6	19分
第四冊	(甲) 4, 6, 7 (辛) 38 (壬) 40, 41 (癸) 43	7	28分
第五冊	(子) 45, 46 (丑) 48, 49, 50	5	19分
第六冊	(寅) 51	1	6分