

民族數學與數學課程改革

張維忠 · 唐恒鈞

摘要：“民族數學”是20世紀80年代前後在國際數學界和數學教育界興起的一個新的研究領域，就其基本意義而言，可被看成數學與人類文化學的一種交叉。作為一個研究領域，“民族數學”常常被定義為對數學（數學教育）與相應的社會—文化背景之間關係的研究，即是要研究“在各種特定的文化系統中數學是如何產生、傳播、擴散和專門化的”。就數學教育而言，“民族數學”的主要論點就在於：我們不僅應當看到學校中的數學教學，而且也應看到整個文化環境，特別是日常生活對數學學習的影響。因此，數學課程改革應特別注意充分認識數學發展的文化多元性，重視對學生文化背景的理解，提倡數學學習方式的多樣化。

關鍵字：民族數學；數學課程；數學教學；多元文化。

人們一般認為數學是一個超越了民族界線的普遍的標準化的概念，如數學教師中一個比較流行的觀點是：數學語言所具有的普遍特徵和數學推理足以說明它缺乏文化特殊性。畢竟，不管是在上海還是在巴黎，(1) $2 + 2 = 4$ ；(2) 負負得正；(3) 四邊形的內角和為 360° 等這樣的數學真理具有普遍的有效性，對於這些事實沒有任何爭議。但問題是為什麼是“度”？或為什麼四邊形的內角和是360而不是100？無論如何，數學常規的內在邏輯和語言掩飾了計數、計算和測量，空間的概念，以及集合和分類等方面的邏輯中存在的某些文化差異。作為數學教師，我們需要認識到可能沒有像“主流數學”（主要是歐洲歷史上最近3個世紀的文化產物）一樣發展得那麼好的“可選擇的”算術和幾何的存在。如果我們認識到“數學”這一術語既有普遍用途（就像我們使用“語言”、“信仰”或“文化”這些詞一樣），又有根植於不同的歷史文化的特殊用途，那就能幫助我們理解所有的文化都能產生數學思想，就像他們創造出不同的語言、信仰和家族系統一樣。或者換句話說，數學的追求是根植於多元文化的情境。數學在全世界都作為基礎教育的主科，但為什麼全世界教的數學都相似？如果認為數學是一種文化，那麼為什麼在中小學數學課程

中沒有反映出這種差異性，而顯得那麼一致^[1]？也許民族數學的研究能為解決這一問題提供新的視角。

1. 民族數學的產生與發展

“民族數學”(Ethnomathematics) 是 20 世紀 80 年代前後在國際數學界和數學教育界興起的一個新的研究領域。就其基本意義而言，民族數學可被看成是數學與人類文化學的一種交叉，也即是關於數學(數學教育)的人類文化學研究，其首要的論點則是對於數學的社會—文化屬性的明確肯定。在數學家、人類學家、心理學家和教育家中，懷爾德(R. L. Wilder, 1896~1982)、懷特(L. White)、費得沃斯(Fettweis, 1881~1967)、盧可特(Luquet)和雷姆(Raum)被認是民族數學研究的先驅。

懷爾德在 1950 年召開的一次國際會議上遞交了一篇題為《數學的文化基礎》(The cultural basis of mathematics) 的論文，他認為從文化的視角看(研究)數學並非新事物，人類學家早就這樣做了，但他們的研究僅限於初級文化中的算術，當然其中也有一些例外，例如懷特在題為“聚焦數學現實：一個人類文化學的注解”中所引出的討論。懷爾德總結了他的觀點：“在人類不同的文化中可以發現某些元素被稱作了數學。在人類的早期文化中，不同文化中的數學是如此的不同，以至於在一個文化中屬於數學的元素在另一文化中卻很難認為是數學。由於研究和發明，以及人們採用越來越合適的表徵物，及其緊接而來的標準化和雜誌傳播等原因，文化傳播增加了，多數高級文化中的數學元素也就越來越接近，直到出現本質上的一致性。然而，這並不是一個固定的事物，而是一個繼續不斷變化著的事物。並不是所有變化都表示新事物的產生，由於文化的變遷，一些元素也就不再被認為是數學了。”

事實上，懷特的研究開始於對如下問題的思考：數學存在於另一個世界嗎？人們是發現數學還是發明數學？最後他斷言：“數學的真理和它的事實都是人類文化的一部分。”進一步，他認為，數學既是被發現的又是被發明的。他進一步指出數學真理是“人類意識的產物，也同時是各個個體在其成長起來的數學文化中遇到發現的產物。”對懷特來說，數學並不是產生于歐幾里得(Euclid, 前 330~275)和畢達哥拉斯(Pythagoras, 前 580~501)——或者更早的埃及或美索不達米亞——而是與人類文化一起發展起來的。

懷爾德和懷特似乎沒有注意到德國數學家、人種學家、教育學家費得沃斯關於早期數學與文化的研究，也沒有注意到法國心理學家盧可特關於數學觀念的文化起源的思考。同樣地，雷姆的《非洲的算術》也沒有引起他那個時代的數學家 and 人類學家的關注。雷姆曾指出，教育“不能真正有效，除非它是真正地基於其本土的文化或生存的利益。”一個好的教學原則是“重視對學生文化背景的理解並將其與學校教學相聯繫。”

其他數學家、人類學家和教育家也漸漸地加入了懷爾德、懷特、費得沃斯、盧可特和雷姆早期的數學文化思考之列。值得指出的是，在所有這些先行者中，巴西數學家 and 數學教育家達布羅西歐 (Ubiratan D'Ambrosio) 佔有十分重要的地位。他在第4屆國際數學教育會議 (ICME4) 的全體會議上公開發表了他關於重視對學生文化背景的理解“數學教育的社會文化基礎”的思考，於20世紀80年代前後提出了“民族數學”的概念，主要用來刻畫各民族特有的數學知識活動。

達布羅西歐將民族數學作為不同的文化系統中“跟蹤與分析數學知識產生、傳播、擴散並標準化過程的方法”。他將學校裏教與學的“學校數學”與他所提出的“民族數學”（即在某個文化團體，如民族——種族、勞動階級、某一年齡層的兒童、某一職業等使用的數學）進行對比。他指出，“教育的作用即是用那些已經獲得數學地位的實踐取代這些實踐，而這些新的實踐剝離了其原始形態，並表現出被整理過的形態。”幾乎所有的學生在入學前都已發展起了一定的使用數位、量的能力、分類與計算的能力以及一定的推理方式，在學校所學的數學技能消除了這些自發的數學技能。一個在數位、計算、幾何形式與觀念等方面表現出色的個體，當面對同樣一個全新的和正式的情境時會產生一種心理障礙，並在不同的算術與幾何思考模式間產生障礙。緊接著，“早期教育在兒童心中注入了一種失敗與依賴的心理。”達布羅西歐強調，“在學校教育最早幾年喪失的數學技能對於這一階段的日常生活和勞動機會都是非常重要的，但它卻喪失了。於是問題產生了，即對於我們所不希望學校數學產生的上述效果，我們該做些什麼？我們是否應該放棄學校數學而保持民族數學？當然不是。”在他看來，人需要具有文化“適應性”。他認為，民族數學應該以這樣的方式包含於數學課程之中：他們應該促進學生數學知識的獲得與理解^[2]。這是對民族數學的恰當定位，否則，將一個文化中的數學教育局限于該文化中的民族數學並不能給學生帶來什麼利益，只會約束學生接觸更先進的數學知識體系，從而阻礙該民族教育和文化的發展。進一步從數學發展的歷史文化層面看，不同民族、不同地域都曾在不同時期各自生長著“民族數學”的萌芽，有的還有相當精深的發展。例如古埃及、古代印度與中國古代等。這種固有的與民族文化共興衰的數學傳統，還深刻地折射出不同民族的精神追求、自然觀念和思維旨趣。

2. 民族數學的研究領域

在任何標準字典裏都沒有“民族數學” (Ethnomathematics) 的定義。確切地說，Ethnomathematics 的定義還沒有標準化。根據詞源學，Ethnomathematics 是以 ethno 為詞首，mathematics 為詞尾。因而，有兩種不同的著作可以被用來檢驗 Ethnomathematics：人類學和數學。在這裏，我們可以從詞源學上推測 Ethnomathematics 是在文化和數學的交叉點上。然而，如果我們檢查這個單詞本身和詞首 ethno 以及詞根 mathematics 的定義，知道它

是由構造而形成的。詞首 ethno 來自單詞 ethnology。字典中 ethnology 的定義是“分析和比較人類文化的科學；文化的人類學。“Mathematics則定義為”研究現實世界的空間形式和數量關係的科學。”

可能主要是因為人們相信數學的普遍性，因而民族數學的研究很少。但這一觀點近來受到人類學家們研究的挑戰。他們的研究表明，即使是最典型的數學，如計算、排序、分類、測量以及稱重等也都與一般學校系統裏教的不一樣。作為一個研究領域，“民族數學”常常被定義為對數學（數學教育）與相應的社會—文化背景之間關係的研究，即是要研究“在各種特定的文化系統中數學是如何產生、傳播、擴散和專門化的”。顯然，按照上述的理解，民族數學與人類文化學的研究就十分接近，並在很大程度上可被看成是後者的一個重要組成部分；特別是，多元文化的觀點正是人類文化學研究的一個主要結論。因此，由於人類歷史上多種不同的文明形式的存在，我們也應當具體地去研究其相應的數學形式（應當指明，對於這裏所說的“數學”必須作廣義的理解：這不僅是指我們應把數學知識、數學技能和數學思維方式等同時包括在內，而且也是包括所有那些未必得到充分的發展甚至可能處於萌芽狀態的數學），或者說，我們應明確地肯定數學形式的多樣性。另外，由於“文化”這一概念在現代已經獲得了更為廣義的意義，即不僅是指宏觀意義上的各種人類文明，諸如不同地區、不同國家、不同民族所特有的文化傳統等，而且也是指各個特殊的社群所特有的“生活方式”和“工作方式”。按照這樣的理解，我們應當明確肯定這樣的事實，即各個不同的文化社群，如不同的職業團體、不同年齡組的兒童等，都可發展起自己特殊的數學形式。顯然，這事實上就極大地拓寬了“民族數學”的研究範圍：已經不再局限于人類文化學的傳統範圍，而是同時包括了歷史的和現實的、宏觀的和微觀的研究^[3]。

目前，“民族數學”的研究主要可分為兩大類：一類可被看成人類文化學研究的一個組成成分，其主要著眼於歷史的考察，並認為“民族數學”研究的一個重要任務就是要努力重建那些在西方文明擴張的過程中受到壓制和排斥的數學知識、數學技能和數學思維方式等，並依據多元文化的立場對此作出公正的評價。特別是，我們不能單純依據“西方數學”的觀點而斷言所有其他的數學形式只是西方數學的一種萌芽形式，或者根本不具有任何的重要性和科學性；恰恰相反，我們在此應當明確反對在數學（數學史）領域上長期存在的“西方至上”、“白人至上”的觀點。顯然，從這樣的角度去分析，這也就是數學教育工作者所面臨的一個重要任務，即應使所有的數學教師清楚地認識到數學發展的多元性，學會尊重各種不同的數學形式，並從中吸取有益的成分。與上述研究的歷史傾向相對立，另一類“民族數學”的研究則可以說更加關心現實的問題，特別是與數學教育直接相關的問題，其主要論點就在於：我們不僅應當看到學校中的數學教學，而且也應看到整個文化環境特別是日常生活對數學學習的影響。也就是說，學校中的數學學習不應被看成學生數學知識的唯一來源，相反地，他們所具有的很多數學知識都是從學校以外的生活中獲得的。另外，在這一方面工作的數學家 and 數學教育家通常又突出強調了以下的

事實，即在很多情況下這種源於日常生活的數學是與學生在學校中所學到的“正規數學”（也可稱為“學校數學”）很不相同的。所謂“日常數學”，是指體現於日常活動中的數學，包括學生在生活中積累的常識性知識和那些學生已經具有的但未經過訓練或不那麼嚴格的數學知識體驗。而“學校數學”即是指在學校這一特定環境中教師所教授的和學生所學習的正規的數學，主要是源於西方的數學。二者在數學教育中有著舉足輕重的作用：“學校數學”是在學校中進行數學教育的主要內容；而“日常數學”是學生學習“學校數學”的基礎與出發點，即數學教育實際上經歷的是從“日常數學”向“學校數學”的過渡。

3. 數學課程的改革

從上述民族數學的研究反思近、現代數學課程改革，“歐美中心”傾向十分明顯，諸如把基於西方文化的數學課程搬到非洲土著文化中等，這是“歐美科學霸權”在數學教育中的反映。民族數學的研究進一步瓦解了數學知識的普遍性和中立性，取而代之的是數學的文化性、價值相關性。不同的文化傳統對數學有不同的表現形式，只有將數學課程與各民族不同的文化傳統聯繫起來考慮，數學課程改革才可能是成功的。目前中國的學校教育缺乏主動應對多元文化的觀念，在數學教育中的突出表現是缺乏對多元文化數學的判斷、選擇和認同，缺乏對各民族數學文化的理解和接納。因此，爲了提高學生的文化批判與選擇能力，從民族數學研究的角度改進數學課程無疑是十分必要的。這一點也正是《全日制義務教育數學課程標準（實驗稿）》所提倡的：“由於學生所處的文化環境、家庭背景和自身思維方式的不同，學生的數學學習活動應當是一個生動活潑的、主動的和富有個性的過程。”教材編寫中應“介紹有關的數學背景知識”，“加強估算，鼓勵演算法多樣化”，“注重數學的文化價值”，使學生體會到數學與人類生活經驗和實際需要的密切聯繫^[4]。《普通高中數學課程標準（實驗）》中亦明確指出：“數學是人類文化的重要組成部分。數學課程應適當反映數學的歷史、應用和發展趨勢，數學對推動社會發展的作用，數學的社會需求，社會發展對數學發展的推動作用，數學科學的思想體系，數學的美學價值，數學家的創新精神。數學課程應幫助學生瞭解數學在人類文明發展中的作用，逐步形成正確的數學觀。”^[5] 因此，數學課程改革應特別注意如下幾個問題。

3.1. 充分認識數學發展的文化多元性

學生有一種觀念：數學即是百年之前就由白人 [如牛頓 (I. Newton, 1642~1727)、高斯 (C. F. Gauss, 1777~1855) 等] 創造完成的。改變學生的這種觀念，使他們認識到各種文化在數學創造中的貢獻具有十分重要的作用，數學的發展具有文化多元性，一個數學分支往往以不同的時間產生於不同的文化之中。巴比倫人創造了一個有價值的數位系統，知道用不同的方法解決二次方程（這種方法直到公元16世紀才被改進），知道正三角形的三邊關係，這個直到

有“畢達哥拉斯定理”後才被瞭解。埃及人研究幾何、提高分數和圓周率的精度，是爲了增加建築結構創造的複雜性，因爲這些都是建築發展的工具。印度人則發展了數位系統，研究了更具理論性的數學。我們可以發現數學在不同文化中的發展，注意到文化給數學發展帶來的影響。

希臘人因爲發展了適合如今基本使用的更精密的數學形式而被大加讚賞。然而，不管希臘人是數學之父的普遍感覺，希臘人的大多數數學卻是向埃及人學的。埃及人的數學比希臘人的先進，希臘人經常受教於埃及人。亞里士多德 (Aristotle, 前384~322) 的老師歐多克斯 (Eudoxus, 前408~355) 當時是位著名的數學家，在希臘任教以前就曾在埃及學習。有傳說，泰勒斯 (Thales, 約前624~547) 走遍了埃及和美索不達米亞的廣闊土地，學習了那裏的許多數學知識。“一些傳言甚至贊許畢達哥拉斯，他爲了得到知識曾遠到印度，這可能可以更好地解釋印度哲學和畢達哥拉斯哲學信仰的相似性。”

在數學課程中充分展示數學發展的文化多元性，有利於提高學生對數學學習的整體認識。如探索伊斯蘭教的藝術和設計世界，就會把數學、歷史、美學以及宗教的迷人世界一起帶入課堂。展示伊斯蘭教的設計不只是介紹模式、對稱、變化和等價的空間觀念，同時也有其他學校主題的延續，特別是藝術、宗教、歷史和社會研究。這樣就提供了一個數學與其他學科產生聯繫的機會，也提供了一個使與來自不同文化背景的學生相互合作和共事的機會。通過這種活動，學生不僅能爲自己的文化而驕傲，還能學會對其他文化成就的尊重與欣賞。事實上，將多元文化數學的材料 (如將一個民族或國家的多種文化中的數學觀點或多種文化團體——如編織竹籃的工人、陶工、房屋建造者等使用的數學) 整合進課程，以此促進相互的理解、尊重以及對文化活動的價值感，將會給所有學生的文化背景以價值，提高所有學生的自信，並使學生尊重所有人種和文化。這樣能幫助所有的學生將來更有效地應付多元文化社會環境，同時擴大學生對數學是什麼以及數學與人類需要和活動間關係的理解。

3.2. 重視對學生文化背景的理解

數學課程應重視對學生文化背景的理解並將其與學校課程相聯繫。有大量證據表明，全世界學校的數學課程都關聯了歐洲的思想，這給來自不同文化背景的學生的數學學習帶來了許多麻煩。數學課程應通過沒有偏見的數學題材的引入，努力提高學生的文化意識水平和發展學生的自尊心。例如，由於不同民族文化中“不盡根數的估算”產生的歷史淵源不同，解決策略更是靈活多樣，嘗試從多元文化數學的視角對歷史上“不盡根數的估算”作出介紹與述評，就可以既豐富數學新教材的編寫內容，又可增加趣味性、體現多樣化，增強學生探究其中算理的欲望；也可以展現不同文化背景之下的數學，爲學生提供豐富的知識背景，分享各民族勞動人民的創造成果，欣賞不同數學文化傳統之中的演算法成就，認識計算工具對數學和人類日常生活的影響，實現多元文化觀點下的數學教育目的 [6]。

進一步,《全日制義務教育數學課程標準(實驗稿)》曾指出:“在空間與圖形部分,可以通過以下線索向學生介紹有關的數學背景知識:介紹歐幾里得《原本》,使學生初步感受幾何演繹體系對數學發展和人類文明的價值;介紹畢氏定理的幾個著名證法(如歐幾里得證法、趙爽證法等)及其有關的一些著名問題,使學生感受數學證明的靈活、優美與精巧,感受畢氏定理的豐富文化內涵……”^[4]事實上,畢氏定理有400多種證明方法,既有代數的方法,也有幾何的方法,而且這些方法來自於東西方不同的文化。將源自不同文化的素材納入到課程之中,從而對所有學生的文化背景作出正確評價,增強所有學生的自信心,並學會尊重所有的人類和文化,這將有利於學生將來更好地適應多元文化的環境。而正如人們已認識到了的,這種“多元文化”的觀點正是未來社會的一個必然要求。

3.3. 提倡數學學習方式的多樣化

每個學生都有自己的生活背景、家庭環境,這種特定的、生物的和社會文化的氛圍,導致不同的學生有不同的思維方式和解決問題的策略。教師應尊重每一個學生的個性特徵,允許不同的學生從不同的角度認識問題,採用不同的方式表達自己的想法,使不同的學生得到不同的發展,而不能人為地扼殺學生的獨立思考。因此,教師應鼓勵學生解決問題策略和演算法的多樣化,並允許存在不唯一的答案。目前,數學新課程與新教材中體現“演算法多樣化”的素材仍然偏少。如可從多元文化背景中挖掘豐富有趣的“乘法演算法”加以呈現,如中國的算盤演算法、埃及乘法、俄羅斯演算法、格子演算法、納皮爾骨演算法等。儘管(很多)這種活動已僅僅是一種文化欣賞的產品,但即使是這樣一個普通的演算法也能使學生認識到不同文化中多樣的習慣與行為方式。類似這樣的素材還很多,例如計數法、度量衡制和一些特殊的數學知識等^[7]。

從“民族數學”研究的視角出發,數學課程就不僅應該聯繫學生在每天接觸到的社會和物理世界中獲得的即時經驗,而且還應該聯繫他作為一個成員的更廣泛的社會。在數學課堂上多使用少數民族成員的名字,鼓勵課本出版時在例子中巧妙地處理不同種族的的存在,以及認識到其他國家中不同的測量系統、日曆和貨幣系統的存在等。這樣被學生看到的數學就不只是教科書中冰冷的抽象了,而是一種人類重要的活動。更為重要的是,通過提高所有學生對不同文化的認識,教師正在幫助克服存在的根深蒂固的偏見——數學(以及科學和技術)起源於歐洲^[8]。從而使學生以平等、開放的眼光看待本民族與其他民族文化傳統之中的數學成果,樹立正確的數學觀,實現多元文化觀點下的數學教育目的。

參考文獻

1. Alan J. Bishop, Critical challenges in researching cultural issues in mathematics education [J]. *Journal of Intercultural Studies*, 2002, 23(2), 119-130.

2. P. Gerdes, Ethnomatics and Mathematics Education [C]. Alan J. Bishop. International Handbook of Mathematics Education. Kluwer, 1996, 909-930.
3. 鄭毓信, 民俗數學與數學教育 [J]. 貴州師範大學學報: 自然科學版, 1999, 17(4), 90-95.
4. 中華人民共和國教育部制訂, 全日制義務教育數學課程標準 (實驗稿)[S]. 北京: 北京師範大學出版社, 2001, 2, 99.
5. 中華人民共和國教育部, 普通高中數學課程標準 (實驗)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2003, 4.
6. 傅羸芳, 張維忠, 不盡根數的估算: 多元文化數學的觀點 [J]. 中學數學教學參考, 2005(5), 63-64.
7. 張維忠, 汪曉勤, 等. 文化傳統與數學教育現代化 [M]. 北京: 北京大學出版社, 2006, 286.
8. David Nelson, George Gbevergbese Joseph, Julian Williams. Multicultural Mathematics [M]. Oxford: Oxford University Press, 1993: 6-12.

——本文作者現任教中國浙江師範大學數學系——