

「幾何原本」四百年

康明昌

(一)

歐基里德 (Euclid, 約紀元前 300 年) 的「幾何原本」(“Elements”) 總結了古希臘數學發展的成果。由於幾千年經驗的累積, 人類已經掌握許多幾何知識。如何有效的運用、正確的認識、以及更進一步的發展這些知識, 促使希臘人有系統的去整理它們。這項工作的結果, 就是「幾何原本」的纂成。「幾何原本」不只是古希臘文明最珍貴的遺產, 它也是人類文明最寶貴的資產。

「幾何原本」根據形式邏輯的方法, 把紛雜的知識變成一個演繹系統, 有條不紊的推導出許許多多的定理; 而這個系統所根據的只是極少數幾條不證自明的「公理」(axioms) 與「公設」(postulates)。由這些公理與公設出發, 歐基里德推演出當時人類已經獲得的幾何知識。

有人說, 數學不過是「同語反復」(tautology) 而已, 因為所有的數學內涵都已包含在原先的「公理」與「公設」之中了。對於持這種論點的人, 我們很想問問他, 如果你只知道歐氏幾何那幾條「公理」與「公設」, 當別人告訴你「任意三角形的三個高必交於一點」這點定理時, 它對你是否不證自明? 同樣的, 對於只知道正整數的 Peano 公理 (Peano axiom) 的人, Euler 的定理 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ 是不是也不證自明?

許多偉大的文明, 如中國文明、印度文明、埃及文明、巴比倫文明, 都發展出各自的幾何知識與數學知識。但是, 這些數學知識的「實用性」似乎永遠據有主導的地位。希臘文明卻把「形式邏輯」與「純粹知識」提昇到一個更高的層次。如果沒有希臘文明, 現代的科學文明會是什麼樣的情形?

2007 年是利瑪竇與徐光啓翻譯的「幾何原本」在中國出版的四百週年。1607 年是中西文化交流的里程碑。且讓我們回顧這四百年圍繞在「幾何原本」週遭的一些故事。

(二)

利瑪竇 (Matteo Ricci, 1552–1610) 是意大利人, 生於意大利中部的 Macerata, 他的父

親以藥師爲業，熱心參與當地的公職，他的母親是個虔誠的天主教徒。利瑪竇九歲時，到 Macerata 一個耶穌會教士主辦的學校唸書，16 歲到羅馬唸法律，可是他的興趣轉向神學，並矢志獻身耶穌會教士的工作。1571 年入耶穌會，繼續在羅馬求學。

馬丁路德 (Martin Luther, 1483–1546) 的宗教改革始於 1517 年。耶穌會在 1540 年經教皇批准成立，其宗旨是維護教會的權威。耶穌會創始人之一 Ignatius of Loyola (1491–1556, 西班牙人) 在羅馬成立 Collegio Romano，這是一所耶穌會教士的訓練機構。Christopher Clavius (1538–1612) 就是在此任教。

耶穌會教士的養成，除了需要哲學與神學的訓練之外，他們還要具備科學知識。Clavius 生於 Bamberg (現在屬於德國)，1555 年加入耶穌會，並接受其教育訓練；此後，他到葡萄牙的 Univ. of Coimbra 唸書 (Coimbra 是十二世紀葡萄牙的首都，1537 年葡萄牙最古老的大學遷到此地，就是 Univ. of Coimbra)。學成之後，返回 Collegio Romano 任教。利瑪竇是 Clavius 在這裏任教時的學生。

以十六世紀前的標準來看，Clavius 的數學造詣相當高，他編了一本歐基里德的「幾何原本」(1574 年)，這本書就是利瑪竇與徐光啓中譯本的依據。他寫了一本「代數學」(1608 年)，他寫的算術課本，後期的數學家如 René Descartes (笛卡爾，1596–1650, 解析幾何的創立者與「方法論」的作者) 與 Gottfried Leibniz (1646–1716, 微積分的創立者之一)，都曾提到。

十六世紀前的曆法，採取「每隔三年，有一年是閏年」的方法。經過幾百年之後，曆書上「夏至」與實際上日照最長的一天產生嚴重的偏離。教廷決定改革曆法，並要求把復活節 (Easter) 訂在「春分」。Clavius 建議把舊曆 1582 年 10 月 4 日 (星期三) 的第二天訂爲新曆 1582 年 10 月 15 日 (星期四)，並採取「四年一閏；如果該年尾數爲 00 年，則必須被 400 整除方爲閏年」的方法。這個閏年的計算方法沿用到現在。

利瑪竇加入耶穌會之後，跟從 Clavius 學習數學與天文學，他志願到亞洲傳教。1577 年五月他抵達葡萄牙，在等候開往東方的船班之際，他到 Univ. of Coimbra 唸書 (Clavius 也曾在此唸書)。1578 年 3 月 24 日，他在里斯本 (Lisbon) 上船，同年 9 月 13 日抵達印度西海岸的臥亞 (Goa)。他在臥亞神學院繼續神職訓練；由於健康因素，他被送往印度西海岸 Cochin (在臥亞南方，現名 Kochi, 十五世紀鄭和船艦的支隊曾到此地)，並在這裏晉升爲神父 (1580 年)。1582 年他返回臥亞，四月受命前往中國。

1582 年 (萬曆 10 年) 8 月 7 日利瑪竇抵達澳門，在此學習中文與中國文化。在澳門期間，有一支來自日本的「天正遣歐使節團」路過 [註 1]，他利用這個機會學了一些日語。

1583 年利瑪竇與羅明堅神父 (Michele Ruggieri) 獲准入居廣東肇慶。他們自稱來自「天竺」，不敢正面回答傳教的目的。他還帶了許多西方用品，如聖母像、地圖、星盤、三稜鏡，還有歐基里德的「幾何原本」(Clavius 編寫)。

1584 年利瑪竇製作「山海輿地圖」, 介紹中國在世界的位置 (但是他們還不敢確認這個「中國」是否就是馬哥波羅去過的國度 [註2])。在這幾年, 利瑪竇與羅明堅努力傳教工作。1588 年 11 月羅明堅返回意大利, 留下利瑪竇一個人在中國傳教。1589 年夏天, 新任的廣東總督把利瑪竇建造居住的西式建築據為已有, 於是利瑪竇移居韶州。

利瑪竇在肇慶結識瞿太素 (士人) [註3]。瞿太素幫助利瑪竇翻譯「幾何原本」第一卷。在韶州期間, 他把「四書」翻譯成拉丁文。通過與瞿太素的接觸, 利瑪竇才瞭解他先前的佛教僧侶裝扮在當時的中國社會並不受尊重, 社會地位也較為低下, 因此利瑪竇從 1594 年開始蓄髮留鬚, 作儒生打扮。

1595 年, 利瑪竇利用一次機會到南京, 但是並未獲准留居南京, 只好折返南昌, 並獲准在此居住。次年 9 月 22 日他成功的預測一次日蝕, 聲名因而大噪 (利瑪竇的天文學知識主要是 Ptolemy 的學說)。1596 年利瑪竇被任命為耶穌會中國教區的負責人。1598 年 6 月 25 日利瑪竇與郭居靜神父 (Lazzaro Cattaneo) 由於當時南京禮部尚書王忠銘的協助, 離開南昌, 奔赴南京。他們在 9 月 7 日第一次抵達北京, 但未獲准居住北京, 只好在 1599 年 2 月 6 日返回南京。

在南京期間, 透過瞿太素的介紹, 他結識葉向高 (南京禮部侍郎) [註4]、李贄與徐光啓 (均為舉人) [註5]。

1600 年 (萬曆 28 年) 5 月 18 日他從南京出發, 在次年 1 月 24 日抵達北京。他進呈給皇帝的禮物包括: 自鳴鐘、聖經、「萬國圖志」、大西洋琴。因為深得明神宗的歡心, 他獲准長居北京, 展開傳教與東西文化交流的工作。1610 年 (萬曆 38 年) 5 月 11 日, 利瑪竇病逝北京。

利瑪竇的著作有: 「幾何原本」前 6 卷中譯本 (Clavius 的「幾何原本」)、「測量法義」(附「勾股義」, 由徐光啓筆錄)、「同文算指」(Clavius 的「實用算術概論」, 含開方、正餘弦、三角幾何, 由李之藻筆錄)、「渾蓋通憲圖說」(天文學, 由李之藻筆錄)、「坤輿萬國全圖」(世界地圖)、「天主實錄」等。

教宗若望保祿二世高度推崇利瑪竇, 他在 2001 年說:

「他在自己身上把神父與學者、天主教徒與東方學家、意大利人與中國人的身份, 令人驚嘆地融合在一起。」

(三)

徐光啓 (1562-1633), 上海人。今日上海的徐家匯是徐光啓的故鄉。與利瑪竇密切合作的幾個中國人, 瞿太素是個機靈脫略的世家子弟, 徐光啓出身尋常農家, 是個沈穩內斂的人。

徐光啓的父親以耕圃維生，談論起醫卜五行之事終日不倦；祖母與母親從事紡績、寒暑不輟。他在 1581 年考中秀才，1597 年中舉人；到了 42 歲，1604 年（萬曆 32 年）才考上進士。

徐光啓中秀才之後，即擔任塾師。1596 年任趙鳳宇家的家庭教師，隨趙家到廣西，遇見郭居靜神父（郭居靜在 1598 年曾隨利瑪竇赴北京），初次聽到天主教教理與西洋科學。1600 年他到北京參加會試，路經南京，初次認識利瑪竇。這次會試雖然失敗，他卻決定在 1603 年領洗，成爲天主教徒。

1604 年徐光啓中進士，授翰林院庶吉士贊善，他跟隨利瑪竇學習天文、曆學、火器與近代科學知識。他們從 1606 年 9 月開始翻譯 Clavius 的「幾何原本」，徐光啓每天下午到利瑪竇的住所工作三、四個小時，由利瑪竇口授數學內容，徐光啓再用流利的中文謄寫出來。翻譯過程，有許多人參與討論、加以協助，如：龐迪我神父（Didace de Pantoja, 1571–1618）、熊三拔神父（Sabatino de Ursis, 1575–1620）、楊廷筠、李之藻、葉向高等人。1607 年 5 月，這本「泰西利瑪竇口譯，吳淞徐光啓筆受」的「幾何原本（六卷）」終於完成，並刻印刊行（見參考文獻 [14]；另有一說稱，從 1604 年到 1607 年，徐光啓每天花一個小時聽利瑪竇講解「幾何原本」）。

由於與耶穌會傳教士的接觸，在北京官場中，徐光啓是以熟知西洋曆算與兵器知名的。萬曆 47 年（1619 年），明軍與努爾哈赤戰於薩爾滸，明軍大敗，京師震動。徐光啓屢次上疏，請求練兵與多鑄西洋大炮。萬曆 48 年徐光啓獲不次擢升爲少詹事兼河南道御史，在通州練兵，防禦都城。他函託在杭州家居的李之藻從澳門購買西洋槍炮 [註 6]。天啓元年（1621 年）二月，徐光啓以練兵完成，陞少詹事，不久「因病乞歸，在籍家居」[註 7]。李之藻購買的這批槍炮只運到半途，因徐光啓罷職，他們擔心「銃到之日，或以付乞不可知之人，不能珍重，反爲夷虜所得」，因此暫時存在江西廣信府。天啓元年三月遼陽兵敗，再度起用徐光啓，急召回京。其後因與兵部尙書意見不合，徐光啓於 12 月再次請歸。天啓 3 年（1624 年）升禮部右侍郎，因魏忠賢專權，不願就職。天啓四年以「招練無功」被革去禮部右侍郎銜。徐光啓的朋友孫承宗（曾任兵部尙書、遼東經略，孫承宗與徐光啓是會試同年）對於徐光啓這一段遭遇諱稱：「徐光啓每逢滿人入侵即獲起用，一旦兵事稍緩，旋遭罷斥。」這期間他的入門弟子孫元化投筆從戎（天啓 2 年），成爲明人抵抗清兵的一員大將。

天啓 6 年（1626 年）西洋大炮第一次在戰場成功的發揮威力，袁崇煥因此在寧遠之戰大敗努爾哈赤的滿州兵 [註 8]。明朝君臣才體會西洋大炮的重要性。

熹宗天啓年間（1621–1627）是魏忠賢與閹黨操弄朝政的年代。徐光啓的友人葉向高、孫承宗，徐光啓的學生孫元化，都是公開的「東林黨人」。徐光啓可能是感情上傾向東林黨、但是並沒有明顯的派系色彩的一類人，因此時而被排擠、時而被籠絡、時而被打擊，不過未曾遭到殘酷的鎮壓。崇禎即位之後，罷斥閹黨，徐光啓受到重用，崇禎 3 年升爲禮部尙書。崇禎 4 年（1631 年），孔有德兵變，由於孔有德是孫元化的部下，孫元化在次年被朝廷處死。徐光啓欲救孫元化

未成，從此他把心力放在修訂曆法 [註9]。崇禎 6 年 9 月 (1633 年)，徐光啓因病去世。一年後 (1634 年) 他主持修訂的「崇禎曆書」修撰完成。1644 年崇禎皇帝下令頒行「崇禎曆書」。詔書剛剛頒下沒幾天，李自成的軍隊就打進北京。滿州人入關之後，協助徐光啓修訂「崇禎曆書」的湯若望神父 (Adam Schall von Bell, 1592–1666) 預測日蝕結果非常準確，獲得多爾袞的支持，1644 年 (順治元年)「崇禎曆書」改名為「西洋新法曆書」，頒行天下，定名為「時憲曆」[註 10]。

孫元化是嘉定人，客居上海，曾入上海縣學讀書，很早就跟隨徐光啓學習西洋火器與算法，著有：「西學雜著」、「幾何用法」、「經武全書」、「西法神機」。他與袁崇煥同年考會試，袁崇煥考上進士，他卻落第，在孫承宗協助下獲得「經略衙門贊畫軍需」一職。寧遠戰事 (1626 年) 之後，袁崇煥與孫元化都被重用 [註 11]，孫元化被任為登萊巡撫 (山東境內)，率領明朝的西洋炮兵部隊，孔有德、耿仲明是他手下的大將；吳三桂、尚可喜、劉良佐也曾在孫元化麾下。這些人後來都投降清朝，徐光啓寄以厚望的炮兵部隊成了滿州人逐鹿中原的先鋒。有關孫元化的事蹟，詳見參考文獻 [13]。

(四)

1607–1610 年徐光啓丁父憂，回到上海老家。在家鄉這幾年，他引進西方水利灌溉的方法。當時甘藷已由菲律賓傳入福建，他從福建引入種子，在江南試種多次終告成功。他便寫了一本「甘藷疏」。同時還寫了一本「種棉花法」。甘藷與馬鈴薯在清初引入中國，荒年時養活不少人民。

1612 年徐光啓譯成「泰西水利法」6 卷 (與熊三拔合譯)。次年他在天津開闢水田，在北方試驗種稻和使用新的水利灌溉，他還試種甘藷、烏臼和各種藥草、花草。

1621–1628 年他完成「農政全書」初稿，後經陳子龍修訂成 60 卷，於 1639 年刊行。

歐基里德的「幾何原本」(Elements) 原來有 13 卷，Clavius 編輯的「幾何原本」加了兩卷註釋。在 16 世紀 Collegio Romano 的課程，第二年學生學習到第 6 卷，直到最後一年才學習後 9 卷。

「幾何原本」前 6 卷的內容包含直線形、圓、比例與比例線段、相似形。第 7, 8, 9 卷介紹整數與有理數的基本性質，例如：質數有無窮多這個定理。第 10 卷討論各種不同類型的無理數 (「不可公度量」)；有些「幾何原本」的版本，在這一卷還證明一個高中學生熟知的定理： $\sqrt{2}$ 不是有理數。第 11, 12, 13 卷討論立體幾何與三度空間五個正多面體，並且用「窮盡法」(the method of exhaustion) 求幾何圖形的面積與體積 [註 12]。

在完成「幾何原本」前 6 卷的翻譯，並領會其內涵之後，徐光啓顯然十分興奮，他主張一鼓作氣把其餘 9 卷也翻譯完成。可是利瑪竇想停一停，他要先瞭解讀者對這 6 卷本的反應。用利瑪竇的話來說，

“太史（指徐光啓）意方銳，欲竟之。余曰：「止，請先傳此使同志者習之。果以為用也，而後徐計其餘。」”

後世有人懷疑利瑪竇不願翻譯後 9 卷是否有私心（康熙年間的知名數學家梅文鼎就提出這個疑問）。平心而論，利瑪竇的建議是相當務實的。只要想想，從 1607 年到 1850 年，有多少中國讀者像徐光啓那樣欣喜若狂的接受「幾何原本」，就可以瞭解利瑪竇想試探讀者反應的態度是如何的審慎。事實上，在西方世界，也只有少數學者、傳教士、知識分子學過「幾何原本」。

有些研究指出，利瑪竇在 Collegio Romano 唸書時只學了「幾何原本」前 6 卷（1575–1577 年），由於他急於到東方傳教，沒有唸完最後課程就離開羅馬（見參考文獻 [14]）。這恐怕才是利瑪竇不願翻譯後 9 卷的主要原因。

從另一方面說，不管利瑪竇有沒有學過後 9 卷，從平日師友的言談中，他多多少少聽過有關後 9 卷的評論（尤其是第 10 卷）。從現代數學的觀點來說，第 10 卷是討論「在何種情形時， $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ 不是有理數（其中 $\frac{a}{b}$ 為有理數）？如何分類這些無理數？」在 Euclid 的時代還無法把這個問題處理得十分妥善，因此他的第 10 卷就寫得非常深奧晦澀。「幾何原本」第 10 卷至少有 115 個命題。即使利瑪竇與徐光啓把第 7, 8, 9 卷翻譯出來（這項工作似乎不是十分困難），他們將如何面對第 10 卷？

康熙年間傳教士白晉（Joachim Bouvet, 1656–1730）與張誠（Jean Francois Gerbillon, 1654–1707）根據 Ignace Gaston Pardies [註 13] 編寫的「Elémens de Géométrie」（1671），將其翻譯為滿州文。

康熙皇帝好學深思，早年南懷仁（Ferdinand Verbiest, 1623–1688）曾把「幾何原本」翻譯成滿文，教他歐氏幾何，效果似乎不大。平三藩、收台灣、降準噶爾之後，他有較多的時間學習數學。1690 年前後有一組人教他算術與代數，白晉與張誠教他歐氏幾何。他們採用 Pardies 的書，因為這是當時歐洲最實用、最新的幾何課本（另一個原因或許是，這本書是白晉與張誠唸過的課本，教起來比較得心應手）。

滿文本的「幾何原本」（7 卷）後來翻譯成中文（漢文），收入「數理精蘊」（1723 年，雍正元年）[註 14]。

清朝末年李善蘭（1811–1882）與偉烈亞力（Alexander Wylie, 1815–1887）在 1856 完成「幾何原本」後 9 卷的翻譯（1865 年曾國藩金陵刻本）。後 9 卷是根據英國人 Henry Billingsley 的「Elements」（1570）翻譯的 [註 15]。

利瑪竇與徐光啓翻譯的「幾何原本」在 1722 年傳到日本。在此之前，日本人並不知道有「幾何原本」這本書。

其實，天主教傳到日本（1549年）比它傳到中國略早幾十年。耶穌會教士到日本傳教十分順利，因此他們在日本並沒有採用迂迴傳教的辦法，他們用鐵炮、望遠鏡、鐘錶、世界地圖就足以吸引日本社會各階層。

日本人對傳教士有戒心始於1587年，1639年德川幕府頒布「鎖國令」。1720年第八代將軍德川吉宗頒布「洋書解禁令」，只要與基督教教義無關的荷蘭文書籍與漢譯洋書都可輸入。「幾何原本」就是在這時傳入日本。

德川吉宗與康熙皇帝一樣醉心西方文化，他在西學的造詣顯然不如康熙。但是康熙把西學保存在宮廷與知識份子之間，德川吉宗卻任其在民間流傳。他的措施使日本人逐漸的瞭解世界局勢，並為50年後的「蘭學時代」蓄積能量 [註16]。

(五)

在翻譯「幾何原本」之前，徐光啓接觸過的書籍不過是四書五經、兵書、農書、醫書，並未涉及天文曆算的書籍（參考文獻 [14]）。這可能是缺點，也可能是優點：缺點是不具「數學成熟度」（mathematical maturity），優點是不瞭解中國傳統算學，也就不具有某些中算數學家的「成見」，對於數學的內容與範式（paradigm）沒有先入為主的偏見。

「幾何原本」譯完之後，徐光啓和利瑪竇合譯「測量法義」（約1607-1608年）。接著他寫了「測量異同」與「勾股義」兩篇文章。在「測量異同」一文，他比較中國古代與西洋的測量方法，他認為兩者基本上是相同的。「勾股義」一文是仿照「幾何原本」的方法，企圖為中國古代的勾股算術加以嚴格的論證。

徐光啓對中國傳統數學的評價是，如果與西方數學一致者，其推理過程也是正確的；如果與西方數學乖離者，其推理過程必然是錯誤的（「大率與西術合者，靡弗與理合也；與西術謬者，靡弗與理謬也」）。他的結論是：中國算學書籍雖然遺佚不存者甚多，但是無關宏旨（「雖失十經，如棄敝屨」） [註17]。

徐光啓在「幾何原本」的序文指出學習「幾何原本」的基本態度，不要急燥、不可粗心、不要有先入為主的成見（「此書有五不可學：燥心人不可學，驕心人不可學，滿心人不可學，妒心人不可學，傲心人不可學」）。他也舉出學習這本書可以獲得的效益：「此書為益，能令學理者怯其浮氣，練其精心，學事者資其定法，發其巧思，故舉世無一人不當學」。

因此他斷言，「竊意百年之後，必人人習之。」

但是，他的預言沒有成真。杜知耕（17世紀末期）在「數學鑰」的序言說，

「京師諸君即素號為通人者，無不望之反走，否則掩卷而不談，或談之也茫然而不得其解」。

這不正是四、五十年前台灣中學生學習平面幾何的一般情形嗎？有些學習順利的人，對於幾何十分熱愛，幾何直觀與幾何圖形使他們發揮無窮的想像力，嚴謹的幾何論證也培養他們獨

立思考、處世公正的習慣。但是，對於許多無法通過這個考驗的學生，平面幾何的定理與證明簡直是一種永遠的夢魘。

事實上，在 16、17 世紀的歐洲，「幾何原本」也不是人人必學的教科書。更進一步說，「幾何原本」在當時歐洲的影響，除了產生一些註釋「幾何原本」的工作與射影幾何、圓錐曲線的一些定理之外（如：Federico Commandino (1509–1575), Girard Desargue (1591–1661), Blaise Pascal (1623–1662)），並沒有掀起一片數學研究的高潮。

幾何學的復興是在 19 世紀。首先是代表綜合幾何（使用與「幾何原本」同樣的論證方法）的 Jacob Steiner (1796–1863) [註 18]，與代表解析方法（使用座標與代數方法）的 August Möbius (1790–1868), Julius Plücker (1801–1868)。其次還有「微分幾何」、「射影幾何」的出現。後來的「非歐幾何」、「黎曼幾何」、「代數幾何」（含「計數幾何」（enumerative geometry））更把幾何學的研究帶領到一個前所未有的高峰（見參考文獻 [5]）。

應該強調的是，在這些 19 世紀幾何學的研究，除了 Steiner 的綜合幾何與其後的非歐幾何之外，幾乎和「幾何原本」沒有直接的關係，我們當然不要忘記，「幾何原本」替數學家定下一個研究數學的典範，也就是，嚴謹的數學研究應該如何進行。它也替幾何學打下堅實的基礎（不過，這個基礎由於「非歐幾何」的出現，變得不是那麼「可靠」）。

其實，「幾何原本」的重要性要從更寬廣的角度來思考，不能只從專業數學家與數學研究的立場來評估。

研讀「幾何原本」是訓練邏輯論證最好的途徑。我們都不喜歡乾巴巴的道德說教；可是從多少小說、戲劇與詩歌，我們學到太多的人生經驗與倫理道德！幾千年來，不知有多少人文學者與科學家從「幾何原本」學到嚴謹的思考與推理的方法。它還告訴我們，只要你使用合乎邏輯的論證方法，你就可以獨立思考，可以自己尋求真理。

在另一方面，「幾何原本」還給我們一個啓示，鼓勵我們追求「純粹的知識」。這些知識（例如，三角形的三個高交於一點）無關幾何圖形的長度或角度，可能也沒有立即而明顯的效益，可是它卻這麼美！——美就是「真」。

從這個角度來瞭解「幾何原本」，我們才發現「幾何原本」是人類文明最璀璨的一顆明珠。徐光啓說「百年之後，必人人習之」，實在一點兒也不誇大。

(六)

「幾何原本」使用公理化的方法研究數學，成為數學研究另一個典範。19 世紀數學家發現「幾何原本」的公理與公設也有不少尚待改進之處（見參考文獻 [6, 第 42 章]）。David Hilbert

(1862–1943)[註19]的「Grundlagen der Geometrie」(幾何學基礎, 1899)是這方面的代表作(見參考資料[4])。

Hilbert把點、線、面與其他一些概念列為「無定義名詞」(undefined concepts),再列出一些公理(axioms)。Hilbert添加一些在「幾何原本」並未出現的公理。例如,根據「幾何原本」哪些公理與公設可以保證「若一直線與某三角形的一邊相交且交點不是三角形的頂點,則此直線與另兩邊的某一邊必相交」?又如,如何保證相異兩圓在適當條件下相交於兩點? Hilbert還強調這些公設的「獨立性」(independence)、「一致性」(consistency)、「唯一性」(categorical)、「完備性」(completeness)[註20]。Hilbert這個公理體系顯然比歐基里德的公理體系更加無懈可擊,可是它會更有趣嗎?

到了20世紀,「幾何原本」的處境加倍艱辛。

由於19世紀幾何學的發展,幾何學的研究已經由平面圖形「昇級」到高維空間,直線與圓錐曲線的研究轉變到更一般的幾何結構(如:微分多樣體或代數流形)。研究的工具也不限於綜合幾何的方法,分析的、代數的、拓樸的,各種工具都進來。提出的問題也不再是圖形或線段的全等或比較大小;例如,Poincaré猜想就是一種拓樸形式的問題。

使用綜合幾何的方法,承襲「幾何原本」研究平面(或三度空間)點、線、面、圓錐曲線的工作,在數學研究不再居主導地位。現在把這些研究統稱為「初等幾何」(elementary geometry)。德國數學家Felix Klein(1849–1925)曾主持一套「數學百科全書」(Enzyklopädie der mathematische Wissenschaften)的編輯。他要把當時數學的主要研究結果做一個總結。他擬定主題,再邀請專家撰寫。其中一個主題就是「初等幾何」,他邀請Max Simon寫一本這方面的書。書寫完之後,Klein改變主意,他認為初等幾何不是重要的數學分支,不能在他的百科全書占一席之地。Simon這本書只好另覓出版商出版。

笛卡爾(René Descartes, 1596–1650)與費瑪(Pierre de Fermat, 1601–1665)創立「解析幾何」,在平面引入座標系統,把幾何圖形表示成滿足代數方程式的點。因此「幾何原本」裏面許多有挑戰性、激發讀者想像力的問題全都變成代數問題。只要能夠解決這些代數問題,那些繁雜的方法、那些神奇的補助線都可以還給歐基里德。這不是很大的進步嗎?可是,對於熱愛「幾何原本」的人,這卻是不小的打擊。

事實並非如此。把幾何問題化成代數問題之後,如何處理這些代數問題並非像想像中那麼容易。從理論上說,解決這些代數問題只牽涉方程式求解或行列式計算而已。實際上要完全解決這些問題,有時並不容易。二十世紀,由於線性代數與Gröbner基底(Gröbner bases)的發展,的確使這些代數問題的解決變成十分簡便。這才真正完成解析幾何學家的「夢想」。當代中國數學家吳文俊在使用Gröbner基底與計算機證明初等幾何的定理做出許多貢獻(見參考文獻[11])。

這些發展使「幾何原本」的地位更加尷尬。中學生花了兩年多的時間學習歐氏平面幾何，他們進了大學唸微積分、線性代數、微分方程，所用到的歐氏幾何卻只是一些很基本的概念。那麼，花這麼多的時間學習歐氏幾何所為何來？

因此，歐氏幾何不但在數學研究失去其顯赫的地位，在中學課程安排的比重也日益削減。許多數學家與數學教育學者（如：H. S. M. Coxeter, Jean Dieudonné, Hans Freudenthal, Peter Hilton, B. Kaufman, H. G. Steiner）在 1970 年代對於這個問題有不少討論，參考文獻 [2] 的序文代表 Dieudonné 個人的觀點。現代的中學生究竟應該學習多少「幾何原本」的幾何？

不管這些不同的論點是否具有說服力，在過去 20 年，台灣的中學課程的平面幾何已經濃縮到將近一學年，「幾何原本」嚴謹的「定理，證明，理由」的訓練幾乎已經消失得無影無蹤了。對於四、五十年前在中學求學的人，歐氏平面幾何是他們永恆的「鄉愁」。在那個資訊閉鎖的年代，平面幾何的難題陪伴多少人走過他們的青春歲月、滿足他們旺盛的求知慾。有許多人日後從事的職業雖然與數學沾不上多少關係，但是只要談起平面幾何，他們就眉飛色舞，他們對於數學與數學家一直懷有高度的敬意。

美國加州大學 Berkeley 校區教授 Hartshorne 在教了幾年古典幾何之後，認為 20 世紀的數學家對於「幾何原本」應該有新的看法，應該繼續發展「幾何原本」的數學。他在參考資料 [3] 仔細的建立平面的坐標系。這個想法來自 Hilbert，只是 Hartshorne 更加小心，也更有系統，更符合近代數學處理問題的手法 [註 21]。這是一本為數學系學生和準備當中學數學教師的人寫的書。

「幾何原本」的價值奠基於它在人類文明發展史的地位。在另一方面，它以潛移默化的方式訓練中學生推理論證的能力（不管他們未來從事理工科系或文法商科系的職業）。因此，一本薄薄的、可以做為中學數學選修科或大學通識課程課本的歐氏幾何的書，是我非常期盼的，相信也是許多人十分歡迎的。

註釋

註 1: 1582 年（萬曆 10 年，日本天正 10 年）由 3 個九州地區信仰天主教的大名（諸侯）派遣「天正遣歐使節團」到歐洲向教皇與葡萄牙國王致敬，使節團的使節是四個 13、14 歲的日本青年。8 年後他們才回到日本。他們的見聞使日本人大開眼界。

註 2: 意大利人馬哥波羅（Marco Polo, 1254–1325）在 1271 年由陸路到達 Cathay，並且在此居住 17 年。利瑪竇相信，他居住的「中國」就是馬哥波羅所謂的 Cathay。1602 年耶穌

會教士 Benedict Do Goes 由印度出發，經由馬哥波羅描述的陸路前往 Cathay。沿途他以信件與利瑪竇聯繫，證實 Cathay 就是「中國」。可惜，De Goes 在抵達北京之前去世 (1607 年)。

註3: 瞿太素 (瞿汝夔, 1548–1612), 常熟人, 其父瞿景淳位至禮部尚書。年少時個性張揚, 浪遊各地, 在肇慶遇利瑪竇。1604 年受洗入天主教。他的侄子瞿式耜是南明永曆皇帝的重臣。由於瞿太素的協助, 利瑪竇的傳教工作得以順利進行。根據統計, 在 1664 年常熟地區有 10,900 個天主教教友。

註4: 明成祖遷都北京之後, 在南京仍設置六部及其官員。當然, 在南京的官員的權限遠不及北京中央政府的官員。葉向高 (1559–1627), 明末名臣, 在萬曆晚年與泰昌、天啓年間兩度擔任內閣首輔 (1607–1615, 1620–1625)。他是一個正直並且具有政治手腕的人, 終因不容於魏忠賢與閹黨, 自請辭官回鄉。

註5: 李贄 (李卓吾, 1527–1602), 明末思想家, 以「異端」自居, 自稱「不通道, 不信仙釋, 故見人則惡, 見僧則惡, 見道學先生則尤惡」。1602 年到北京, 遭控「惑世誣民」, 被捕下獄, 自刎死。李贄稱利瑪竇是「第一標緻人」, 可見他對利瑪竇的人品與學識十分欣賞。

註6: 李之藻 (1565–1630), 杭州人。1594 年舉人, 1598 年進士, 1601 年在北京遇利瑪竇。官至工部員外郎。李之藻參與翻譯的書有「同文算指」、「渾蓋通憲圖說」、「名理探」等, 「同文算指」介紹西方數學的筆算 (中國傳統數學只有籌算); 「名理探」翻譯亞理斯多德 (Aristotle, 384BC–322BC) 「邏輯學」前 10 卷 (1631 年刊行), 後 20 卷由南懷仁完成 (1641 年)。李之藻晚年把當時翻譯或寫作的文章與書籍編輯成「天學初函」, 分「理編」與「器編」, 利瑪竇與徐光啓翻譯的「幾何原本」是列於「器編」的一本書。

註7: 明代設詹事府, 有太子詹事與少詹事各一人, 輔佐東宮太子。熹宗天啓年間並無太子, 仍設詹事府。

註8: 明人開始使用西洋火炮時, 制作成本或購買成本甚高, 並且常有操作技術與運送困難的問題, 在試射過程也時有膛炸傷人的情事。明朝君臣雖知道西洋大炮的好處, 但沒有給予足夠並且持續的重視。崇禎初年徐光啓建議招募葡萄牙傭兵協助抵抗清兵, 但因反對者多 (「西洋火器可用, 但人不可信」), 未獲採納。

註9: 明代使用大統曆, 酌採回回曆。到了明末已數百年未修曆法。萬曆年間, 有幾次測日蝕、月蝕皆不準, 有時誤差達一、二個時辰之多。崇禎 2 年 (1629 年) 欽天監預報日蝕不準, 而徐光啓依照西法預推北京、瓊州、大寧三地的日蝕時間, 都得到證實。於是下旨成立「曆局」, 命令徐光啓督修新曆法, 1634 年完成「崇禎曆書」。「崇禎曆書」有系統的介紹第谷 (Tycho Brahe, 1546–1601) 的地心學說。見參考文獻 [15]。

註10: 湯若望在 1645 年任欽天監, 掌管曆法, 朝廷優禮有加。但是他受到楊光先等人的反對, 楊光先主張「寧可使中夏無好曆法, 不可使中夏有西洋人」。1664 年 (康熙三年) 掀起「曆案」(楊光先事件), 湯若望被處死刑, 後來獲赦 (詳見參考文獻 [12, 頁 464] 與黃一農的相關論文)。有關西學東漸與湯若望的故事可參考史景遷 (Jonathan D. Spence) 的書「改變中國」(時報文化, 2004 年)。

註11: 崇禎 2 年 (1629 年) 12 月, 崇禎皇帝中了滿州人的反間計, 逮捕袁崇煥入獄, 崇禎 3 年被殺, 崇禎 5 年孫元化也被殺。孫元化是個天主教徒, 臨死前湯若望喬裝為送炭工人入獄, 為其做最後告解。根據閻崇年的說法, 崇禎皇帝即位之初頗想有一番做為, 在崇禎 3 年袁崇煥被殺之後, 崇禎已被佞臣包圍, 許多正直的重臣盡遭罷斥 (閻崇年, 「明亡清興六十年」(下), 中華書局, 2007 年)。

註12: 40 多年前台灣的中學數學課程標準有兩年半的歐氏幾何的課程: 初中 (現在的國中) 有一年半的平面幾何, 相當於「幾何原本」前 6 卷, 高中還有一年的平面幾何, 仍然沒超出前 6 卷的範圍, 但是內容較難, 例如有「9 點圓」、「Euler 線」與各種軌跡作圖的問題。此外有些高中還有一個學期的立體幾何, 相當於「幾何原本」的 11-13 卷, 但是不包含「窮盡法」。

註13: Ignace Gaston Pardies (1636-1673) 也是耶穌會教士, 任教於巴黎的 College of Louis-le-Grand。他曾就光的折射問題與 Newton 多次通信。他編寫的「Elémens des Géométrie」, 除了有中譯本之外, 還有拉丁文、英文的翻譯本。

註14: 「數理精蘊」在 1713 年 (康熙 52 年) 開始編撰, 1721 年完成, 1723 年 (雍正元年) 出版。「數理精蘊」分上編 5 卷 (內含「幾何原本」3 卷), 下編 40 卷。下編的內容有平面三角、一元方程解法、對數理論。

註15: Henry Billingsley (死於 1606 年) 曾就讀劍橋大學與牛津大學, 後來從商, 並當過倫敦市長。他是根據希臘文版本翻譯, 而非從拉丁文版本翻譯的。李善蘭與偉烈亞力根據 Billingsley 的書翻譯「幾何原本」後 9 卷, 他們註明最後兩卷是後人加入的, 不是歐基里德「幾何原本」原有的, 李善蘭與偉烈亞力最後這兩卷似乎也不是根據 Clavius 版本翻譯的, 也不知是否 Billingsley 書原有的。見參考文獻 [8]。

註16: 1639 年日本鎖國之後, 禁止葡萄牙人來航或居住, 但是允許荷蘭人在長崎外海一個島上從事貿易, 並且要求荷蘭商館 (與中國商人) 定期向幕府提供世界各國的情報。因此幕府高官都能及時知道「里斯本大地震 (1756)」、「法國大革命 (1789)」、「中英鴉片戰爭 (1840)」這類消息。德川吉宗「洋書解禁令」頒布之後, 西方文化經過荷蘭人之手大規模的傳入日本。因此日本人把這些西方文化稱為「蘭學」。1771 年三個日本醫生解剖死刑犯屍體、1774 年日本人翻譯荷蘭文的「解體新書」(人體解剖學書籍) 掀開蘭學時代的序幕。

註17: 利瑪竇對當時中國科學的觀察是,

“They have acquired quite a good mastery not only of moral philosophy, but also of astronomy and of several mathematical disciplines. However, in the past they had been better versed in arithmetic and in geometry; but they have acquired all this and dealt with it in a confused way.”

註18: Steiner 與 19 世紀一些幾何學家發現許多新的、有趣的幾何定理。例如, Steiner-Lehmus 定理, Steiner 系 (Steiner porism), Gergonne 點, Feuerbach 定理, Brianchon 定理, Morley 定理。只要根據「幾何原本」的方法就能證明這些定理。但是, 說也奇怪, 這些定理直到 19 世紀才被發現。詳見參考資料 [1]。

註19: David Hilbert (1862–1943) 是 19 世紀末、20 世紀初偉大的數學家, 他提出 23 個數學問題對於 20 世紀數學的發展有非常深遠的影響, 請參考 B. H. Yandell, *The honor class: Hilbert problems and their solvers*, A K Peters, Natick, 2001。Hilbert 的傳記可參考 C. Reid, *Hilbert*, Springer-Verlag, Berlin, 1970。

註20: 有關這些性質的具體定義, 請看參考資料 [3, p.69–71]。

註21: Hilbert 與 Hartshorne 定義線段與線段之等價類的加、減、乘、除, 由此得到一個「體」(field), 再據此建立平面的坐標系。Emil Artin 的方法則是從運動群的公理 (例如, 有足夠多的 translations, translations 形成的自同構群足夠大) 得到一個「體」, 再建立坐標系統 (見 E. Artin, “Geometric algebra”, Interscience Publ., New York, 1957)。

後記: 本文許多資料來自“Wikipedia”(中英文版), “Mac Tutor History of Mathematics”與參考文獻 [16]。本人向該次研討會諸位學者請教許多問題, 獲益良多, 特此致謝。

參考文獻

1. H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Geometry revisited*, Random House, New York, 1967.
2. J. Dieudonné, *Linear algebra and geometry*, Hermann, Paris, 1969.
3. R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer-Verlag, 2000, Berlin.
4. D. Hilbert, *Foundation of geometry*, English translation by E. J. Townsend, The Open Court Publ. Co., La Salle, Ill, 1959.
5. F. Klein, *Development of mathematics in the 19th century*, English translation by M. Ackerman, Math Sci Press, Brookline, Mass., 1979.

6. M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972.
7. J.-C. Martzloff, *A history of Chinese mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
8. Yibao Xu (徐義保), *The first Chinese translation of the last nine books of Euclid's Elements and its source*, *Historia Math.* 32 (2005) 4-32.
9. 方豪, 徐光啓, 採自「中國天主教史人物傳」(二冊), 香港, 1967 與 1973。
10. 錢寶琮, 中國數學史, 科學出版社, 北京, 1992。
11. 吳文俊, 吳文俊論幾何機械化, 山東教育出版社, 1996。
12. 梁宗巨, 數學歷史典故, 九章出版社, 1998。
13. 黃一農, 天主教徒孫元化與明末傳華的西洋火炮, 「中研院史語所集刊」67 期, 1998。
14. 楊澤忠, 利瑪竇和徐光啓翻譯《幾何原本》的過程, 「數學通報」2004 年第 4 期。
15. 江曉原, 徐光啓與《崇禎曆書》, 2005, 11 月 8 日。
16. 「利瑪竇與徐光啓合譯《幾何原本》四百週年紀念研討會 論文集」, 2007, 11 月 10-11 日, 南港, 台北。(http://www.math.sinica.edu.tw/workshop/2007Euclid/index.html)