

## 有朋自遠方來——專訪項武義教授



策劃：劉太平

訪問：劉太平、張海潮

時間：民國 97 年 11 月 28 日

地點：台灣大學數學系

整理：林思華

項武義先生，1959畢業於台大數學系，1964獲美國普林斯頓大學數學博士學位之後，先後任職於布朗大學、普林斯頓高等研究所，芝加哥大學，並於1970年升任柏克萊大學數學系教授。1998~2003訪問香港科技大學，期間完成基礎數學教材，分由大陸人民教育出版社及台灣五南出版社出版，是資優教育及中學老師進修的最佳教材。先生早年致力於變換群、李群及大域微分幾何的研究。自1990年後，返璞歸真，研究古典幾何，其中最重要的貢獻乃在對 Kepler 裝球問題提出最小作用原理，認為處理大域的極值問題，應該先了解局部的極值現象，以局部的作用量測量極值，以近及遠，進而探究整個空間的極值問題。此部分的研究成果請見 World Scientific 出版之《《LEAST ACTION PRINCIPLE OF CRYSTAL FORMATION OF DENSE PACKING TYPE AND KEPLER'S CONJECTURE》》 by Wu-Yi Hsiang。

項武義 (以下簡稱「項」): 我是本地人, 怎麼是有朋自遠方來呢? 這個題目是雲遊和尚回歸本寺, 不是有朋自遠方來。

劉太平 (以下簡稱「劉」): 雲遊和尚回歸本寺, 你得要寺廟承認這是你的本寺。

項: 不承認嗎? 不承認嗎? (笑) 不承認還行嗎? 沒辦法不承認。

張海潮 (以下簡稱「張」): 這是 first place。這是個 fact。

項: Yeah, 這是個 fact。

劉: 回到台灣來, 這是沒有錯。但數學系的話...

項: 數學系的話, 我是這邊畢業的。尤其我現在坐在這裡, 這絕對稱得上回歸本寺。

劉: 有道理、有道理。

項：應該是雲遊和尚回歸本寺的訪問，而不是有朋自遠方來。有朋自遠方來，對我來講，變成有點見外。

劉：不過我們還是會把你放在「有朋自遠方來」，因為這是個專欄。

項：但這次的專欄還是得稍微改改，因為這次受訪的傢伙是雲遊和尚回歸本寺。

張：可以在「有朋自遠方來」做個副題—雲遊和尚回歸本寺。

項：好，做個副題。

劉：反正，要怎麼說是你的權利，但最後要怎麼做是我們要對你權利的一個尊重，對不對？

項：對。

劉：但我們怎麼做，也是我們的權利。(笑)

項：所以中間要有個磨合。

劉：你算是老台大了，不是嗎？你 70 年代時比較常回來台灣，那時候我都在國外，所以剛好都錯過了，我聽你的演講並不多，我記得有一次你回來，講到 Minimal surface, Simon's work, on Bernstein problem, 那之後你常回來。事實上是 70 年代比較多，是吧？

項：是。

劉：所以你跟台大接觸非常多，我想你應該有一些強烈的印象。你對台大數學系怎麼看？除了深厚的感情，你怎麼看？任何正面、負面的？

項：這事情一下子很難說得出一個特別的感受。因為一回來就等於回到自己的系裡面、自己家，所有人都很熟……

劉：不過，你在美國待過那麼多地方，也去過北京，並在那裡著力很多，所以，你在這些地方可以做個對照？

項：譬如說怎麼樣的對照？

劉：比方說，台大的學生。

項：你要知道，我剛回來的那陣子，接觸比較多。我中間有一段時間，不知那一年，我待了一個學期。

劉：那是那一年？

項：大概是張海潮大四的時候。

劉：那是那一年？

張：是 1970 年的 9 月開了一學期的課。

項：開了一學期，教《數學概論》。

張：擺在禮拜六，9~12 點。當時想說方便其他外校學生來聽課。

項：那時候蠻用心講，而且跟學生也比較有接觸。那時候的學生我覺得相當用功，後來我比較少回來是有一些政治的原因。因為他們看到我在搖著旗歡迎大陸來的乒乓球隊，被一個職業學生照的相。記得當年回來有兩件事。一件事是在台大講課，另一個是碰到當時正把 SMSG,

美國的那一套東西搬到台灣來，他們說這是美國一套偉大的教育革命，台灣現在正在現代化，一定要趕上。這在教育上相當於把外國的 SARS 移殖到中國來，所以我當時公開演講反對這件事情。當時我講什麼話，他們都說：『是、是、是。你講的都有道理。』反正暑期講習會過了就回美國，讓你說說就好。我第二年回來半年，回來得長一點。

劉：我打斷一下，施先生 [註：施拱星] 針對這件事講過一句話：數學沒有新舊之分，只有好壞之別。

項：所以，我那時回來，他們也許覺得是：善者不來，來者不善。就想了一個辦法，請我去教育部參加那個課程標準的委員會，我記不清什麼名字了。因為假如我去參加，我就一個人去參加，而他們一大幫人，不管我講什麼話最後都沒有效果。但是我就不能再批評了，因為你項武義也是委員之一。於是教育部來請我，可是一請我，我這個人雖然是一個呆頭呆腦的傢伙，但是我那時就警覺到這件事情，所以在請我時，我就講了，其實我們在台大數學系，那時候蘇競存也在，然後還有賴 [註：賴東昇] 先生、繆龍驥、施先生、趙民德，也對這個事情關心。所以那個課程委員會一下子就增聘了六個人。我們就不是絕對的少數了。去開會的時候，一坐下來，大概有十幾個人，我們都去了。還有一個客觀環境有所改變，就是 SMSG 引進來以後，弊病已經出來了，中學老師開始怨聲載道，教育部也不能完全不顧這件事情，教育部也有要把它改一改的意願，然後我們去了，我們能夠提出要改革的方案，他們完全提不出任何東西。

張：我打個岔，那個 SMSG 的引進是 1965 年的高一，第一次使用這 SMSG。它叫做一個新課程的改革，它是分三年的階段。第一年就是李國偉那一年，他們那一年是用所謂的 PSSC，所謂的《新物理》，我的這一屆，剛好輪到不僅要用《新物理》，也要用《新化學》，叫做 CHEM。我的下一屆開始用 SMSG，我是 1964 年進高中的，1965 年開始用 SMSG，到你那個時候，1970 年，已經用了六、七屆了。

項：說實話，SMSG 實在是一場糊塗。我舉一些還記得的例子，它也講《群論》。《群論》那一章定義什麼叫群，定義什麼叫群的同構，isomorphic。然後呢，證明了三個定理， $G$  跟  $G$  是 isomorphic；第二個： $G_1$  跟  $G_2$  是 isomorphic 則  $G_2$  跟  $G_1$  也是 isomorphic；第三個是  $G_1$  跟  $G_2$  是 isomorphic， $G_2$  跟  $G_3$  是 isomorphic，則  $G_1$  跟  $G_3$  是 isomorphic，完了，整個就結束了，《群論》全教完了。這是一個例子。第二個我記得很清楚的例子，它定義  $n$  階的行列式，用一個很龐大的展開式來定義。

張： $n!$  項。

項：每項前面有  $\text{sign}(\tau)$ ， $\tau$  是置換，還有一大串足標。

張：這裡我想講一件事情。因為他們基本上是節譯，他們是把美國的課本作節譯，因為通常美國的教本是相當大的一本，其實美國的教科書...

項：總之最後就寫出一個行列式的乘法公式，公式下面是，讀者試自展開，驗證之。你想想看，這邊是  $n!$  項乘以  $n!$  項，那邊是  $n$  的  $n$  次方乘以  $n!$  項，中間相消得天翻地覆。這怎麼可能用展開集項來證？沒有一個數學家可以做那種事！

劉（笑）：Ramanujan 大概可以。其他人大概就……

項：我還記得另外一個關於級數的例子，有一個定理是等比級數，假如  $\gamma$  不小於 1 的話，它是發散，所給的理由是它不趨於  $\frac{1}{1-\gamma}$ ，所以它發散。一個級數不趨於某一個特定數為極限，那它就發散，這一類的例子多不勝舉。其實，在私下主事者也頗有悔意。

張：但是已經七年了，這已經是第七年了。

項：總之那一年，教育部就同意改，我建議要改而且一定要實驗，就成立一個實驗教材的編寫組，我們有八個人，我是其中之一。

張：那時黃武雄還沒回來。

項：黃武雄是後來才參加的。

張：不是第一次組成的那個，他是第二年。

項：71 年初離開這裡之後，我去歐洲訪問，先在 Geneva（日內瓦）2 個月，在 Bonn 4 個月，編寫組在編了之後，他們說這整個東西，你想得最多，所以要我全權負責寫高一的初稿，所以我到了日內瓦就開始寫，那個很辛苦！為什麼？因為我要從頭仔細想怎麼寫，我這人從來沒有胃痛過，那二個月我就胃痛。從歐洲回到 Berkeley，我碰到黃武雄，那時候正好快畢業了要回來，我就跟他談，黃武雄很熱心，後來就等於是黃武雄接過去了。我不知道是怎麼回事，反正我已是沒法管了，那時因為那張照片，我在某種意義上好像變成通匪有據。第一次高一的實驗教材出來，因為他們覺得我花的力量最大，編寫組沒有問過我同意，封面上就只寫項武義主編，不是編寫組主編。正好當時那張照片也已經傳到台灣的情報機構，蔣彥士部長就……

張：當時蔣彥士是教育部長。

項：蔣彥士非常吃驚。他就把我父親叫來教育部，說：『現在教育部面臨一個極為嚴重的危機，這書已經印好要發行，上面是項武義主編，而你的兒子，你看，就兩手搖了一個美國旗、五星旗在那裡歡迎大陸的乒乓球隊。』所以要我父親同意把書全收回來，把封面拿掉，換一個封面。我父親的反應是什麼？回家後寫信大罵我：『你這個孽子！』把我痛罵一遍。父親罵我，我沒辦法回嘴，我就寫了封信給蔣彥士罵他。我跟蔣彥士講：『你要做的事情，用項武義做主編，我完全不知情，把一個不對的事情改成對的，應該改成編寫組，我完全贊成。但是你沒有道理要去找我父親來同意這件事情，這完全牛頭不對馬嘴。』還有我說：『我做了什麼事情，我自己負責，也不需要你負責，你要做這事，我贊成，而且謝謝你，但你做的方法不對嘛。』因為這樣，所以我沒辦法太介入寫書的事情，後來我回想當時，有兩件事是有點失敗的。一個是當時原本設想在事前先做些實驗，通過實驗慢慢來讓它變得比較穩妥。但是當時在台灣的

做法是要不就不用，要不就全部用。我的想法是用一、兩個學校，不要多，先經過實驗，妥當了再推出去。第二，我想當年我的設計還是不夠醇，就像酒，還有辛辣之處。希望通過實驗以後能夠好一點，但這個過程沒有之後，就有點辛辣之處。我猜想，黃武雄也是年少氣盛，老和尚當年還年輕，黃武雄比我還更年輕，所以辛辣之味只有有增無減，但是我也無能為力了。所以後來實驗教材並不成功，原因就是裡面有些辛辣之處。還有一件事，我記得當年我做的辦法，比如幾何，中學的教材要從初中來改是比較自然的切入，當時我完全認識到，但是那時沒有時間來，因為它就是在高中，先把高中改過來，而從高中開始就不是一個很自然的起點。舉一個例，我當時提出三個幾何基本定理：一個是平行四邊形定理，另外一個是勾股定理，另外一個是相似三角形的定理，討論這三個定理的證明後，就用它們來引進向量運算，達成空間結構的全面代數化。

劉：就是向量代數。

項：完全代數化，是向量幾何，但是因為沒有好好的準備跟培訓，我的項先生就變成向量的向（劉笑）。引進向量，基於上述三個幾何定理，強調向量的運算律，特別是分配律就是上述幾何的基本定理的代數形式，這些思想都有了，但還是不夠理想，就是說，你從平面幾何的過渡階段，那段工作應該在初中做好準備，但沒有做到。總之，我那時就變成「向」先生。這大家就很反對，我記不大清楚了。事隔八、九年，我回到台灣...

劉：你中間有一陣子沒有回來台灣是這樣嗎？

項：有一陣子我沒有回來台灣的原因是因為簽證有問題，過了一段時間後，也沒那麼大問題了，譬如說，我不記得那一年，我的三弟，他是兄弟姐妹中最晚結婚的，他結婚時，我父母親要來美國，結果簽證不准，講明白了，不准的理由就是你家的老二不乖。

劉：我們再回到原先的問題，你說你是89年回來是吧？

張：中間經過八、九年，可能是1979年。

項：79年。

張：79年，我記得在清華大學碰到你。

項：我大概79年回來，經過了一段時間回來，回來後，老賴告訴我，現在那些中學老師懂得向量，也用向量編書跟解題目，用向量來解題目是他們的愛好。這顯示你的改革需要一個過程。剛開始，他不懂向量好在那裡？因為他不熟悉，他就有抵制情緒。後來他慢慢搞懂了，這當然是一個很有力的工具。我要講的就是這一點。

劉：我記得大學的時候，你回來過，講到 Minimal surface，是196幾年？

張：暑期科學研討會，暑假的時候。

劉：你提到陳先生、Simon 他們做的研究。

項：我想是這樣。

劉: 我想問一下, Simon, 你認得他嗎? 他後來離開數學, 也算是個傳奇人物, 跟我們談談 Simon 這個人。

項: 我認得, 也見過他, 但跟他不熟。他在 Berkeley 做研究生, 暑假的時候, 很多人都不在, 他當時對 Morse theory 有興趣, 他就貼個公告: 我現在要講一個 seminar: 跟大家來講 Morse theory。他是一個很有自信、開朗的人, 他到了 Berkeley, 基本上自己在研討 Curvature, 他後來發現一些結果, 就跑到 MIT, 跟 Ambrose 討論, 回來就寫了他的博士論文。所以 Simon 的博士論文是關於 Riemann curvature 黎曼幾何的工作, 然後他就去 Princeton 的 IDA (Institute of Defense Analysis)。在那裡工作以後, 他突然對 Minimal surface 有興趣, 他做的那個工作, 是一個很好的工作, 因為這個工作, 陳先生推薦他得了 Veblen 獎, 幾何的 Veblen 獎, 得了獎之後, Stony Brook 請他去做系主任, 後來重要的工作則是 Chern—Simon invariant。

劉: 然後他就去賺錢?

項: 去 Wall street 賺錢去了。

劉: 賺了很多錢。

項: 他當然比現在的 Nobel 獎的經濟學家數學好很多, 他大概是賺很多。

劉 (笑): 我想起這件事是因為你那次回來演講提到 Simon。

項: 對。

劉: 不過, 我們接著你剛剛的話題, 我剛剛想要問的其實是, 你剛才說的是數學教育方面, 你這麼多年, 實在可以說是一個老台大, 你對台大的數學系有什麼感想或看法? 我記得, 很早以前, 許振榮先生談起台大數學系傑出的人就會說起項氏兄弟, 所以你在台大一方面很早, 又一直關心著, 所以我才問你這問題。

項: 我實在講不出太多特別的感想 (劉笑)。你問我這個問題, 我每次來了, 例如 1970 年, 一方面是用功的講《數學概論》, 跟學生座談, 那時候我覺得學生很好學, 演講時, 課堂上的人也滿滿的, 聽了之後, 大家也都很用心, 會到辦公室來問問題。那時候, 聽《數學概論》的熱忱比現在可能好不少。這是那個時候的感覺。另外一個則是改革中學數學的事情, 所以我等於是在臨危受命, 整個台灣實在搞得亂七八糟, 不得不披掛上陣來做這件事情。

劉: OK。

項: 主要是這樣。到後來我可以回來, 就常回來, 但時間比較短, 另外有個事情, 從我 1973 年去中國, 去中國時有個感覺, 釣魚台的事情我沒參加, 1970 年時, 就是釣魚台的事情, 我在這裡忙這些事情, 釣魚台到底發生什麼事, 我都沒搞清楚。73 年第一次去中國。那一年我通過羅湖橋, 已經 25 年沒回到中國了。我能夠想到中國的就是中國的地圖, 像個秋海棠的葉子, 上面缺個外蒙古, 我腦子裡能夠想到的中國就是這個。那時回到中國, 他們搞教育革命什麼之類的, 參加加州教授的訪問團, 到處去跑了一趟。

劉：那是文革的中間？

項：文革沒有完，文革的後期，四人幫倒台之前。

張：文革十年，這時大約第八年了。

項：可是那時已經開始搞教育革命。鄧小平已經復出，因為我在八達嶺的頂上最高處，他們跟我說：『你看，小鄧在下面。』鄧小平當時陪一個非洲國家的元首，到八達嶺，鄧小平很矮，沒看清楚，也搞不清楚那個是小鄧（笑）。再接著沒多久，就開始批鄧了，這是第一次回中國。第二次是78年回去，當時四人幫已經過了，總之，那時中國瀰漫著要搞四個現代化的氣氛。所以你在北京街上走，都聞得到四個現代化的氛圍。記得我當時就跟婉貞說：『中國搞四個現代化，這不是第一次，你算嘛，這船堅炮利是一次，戊戌政變是一次，民國革命又是一次，五四運動……，這些都是想要把中國從沉痾裡翻身，要奮發圖強，但以前每次都失敗。希望這次不是數學歸納法，又失敗（眾人笑）；不過以前失敗，我們沒有責任，因為我們根本不存在，但這次我們正當還有活力，還年輕力壯的時候，假如我們不盡心做點事，成功的話，成事不必在我，沒有任何遺憾，但是假如又失敗，我們就覺得自愧、無地自容了。』我想有一點也可以講講的，我不知道你們心裡怎麼樣？我的感覺，我們這一輩子、這一年代的人，唸中國近代史是含著眼淚唸的。所以有個烙印，假如有可能，還是願意為中國的自強做點事。所以我就跟婉貞說：『我們要考慮究竟我們這次能夠做什麼？』講了之後，我想到了，至少有件事情可以做，因為73年回去就知道，回中國是不可以的，其實我73年那時回去是想回北大做教授，可去了之後，周培源接見我，見我們的時候，段學復帶我過去，他是系主任，周先生開始講：『我剛從井崗山考察訪問回來，蔣介石在當年有多殘忍，把一個老大娘抓起來，她不招，不招怎麼辦？拿火鉗把她舌頭夾出來。』就這一類的話講個沒完，段先生就跟他講：『周老，武義又不是不懂事的人，你跟他淨講這些幹嘛？』周培源繼續講，我懂了，他就是要告訴我：武義，你切不可回中國來。這句話他沒法講，所以他用這個辦法把訊息傳給我，我就跟婉貞說：『我們可以告辭了。』果然，73年我回來之後，中國越來越亂。我從中懂了一點，海外的人要回到中國去，你不是回到中國，而是回到某某黨委的屁股下面，他一屁股坐在你上面，你的天日就是那黨委的屁股，這日子，項武義沒法過，而且你也無所作爲，那時就想，又不能回中國，中國現代化又想盡份心，怎麼辦呢？我當時想我至少可以寫本書，給中國年輕人寫本書，寫書能寫什麼呢？不要寫李群，不要寫微分幾何，最有用的數學還是微積分！埋頭工作，知其不可而爲之，寫一本《微積分大意》。這本書怎麼寫的呢？其實到那時候還沒教過微積分，每個人要寫微積分，都覺得他有個好主意，寫來寫去每個人都一樣，微積分好像是個大魔星，大家寫了之後基本上都一樣，所以呢，寫微積分，絕不參考任何其他書，微積分究竟原本怎麼來的？完全自己寫，習題也不參考。那個很辛苦，我大概花了整整十個月的時間，寫了一本《微積分大意》。直接請人帶給方毅。

張：方毅是人大的？



項：副總理，是 science and education 的掌總 (czar)，我就寫了封信給方毅，石沉大海，一點消息也沒有。到了 78 年四月，鄧小平召開科技教育大會，有朋友打電話來說在文匯報上看到個消息：有個人作了瘋狂 (crazy) 的事情，看來一定是你。報上說：海外有個熱心的人寫了《微積分大意》獻給全中國的青年，科技大會在討論這件事，我想這本書應該就有頭緒了，可以印出來了，但又沒有消息，到了夏天，我已經答應要去丹麥 Arhus 開一個 topology 的會，那天，華盛頓聯絡處打電話來了：『你申請要去中國的事情已經批准了。』我說：『我沒申請去中國啊。』他說：『是教育部給你一個邀請的信去中國訪問。』我說：『邀請，那另當別事，你把東西寄給我，我考慮考慮。申請是沒申請。』後來我給 Arhus 寫了封信，因為個人因素 (笑)，所以無法前往，我就去中國。78 年去中國，他們以為我是微積分專家，全中國找了五百個人 (衆笑) 在清華大學半圓形的教室裡講課，上午就講微積分，講了之後就座談討論，後來就出來這本書——《微積分大意》。

劉：我們來換個話題，你在 Berkeley 很多年，你去 Berkeley 的時候，數學系應該 if it is not very top, is among very top, 是不是？

項：我想這很簡單，Berkeley 的數學系是一個中心。那時就請了陳先生跟 Smale，他們兩人在系裡是 leader，Smale 是 Dynamic System 方面，他那時拓樸已經不大有興趣。陳先生呢，是在幾何，當然，Hans Lewy, Morrey 也在那裡，當時 Berkeley 校長是一位經濟學家，他說：州政府重視教育，撥了一筆錢給 Berkeley，他就懂得說，這錢雖然不少，但不能跨著用，要有重心，其一就是數學，第一件事便是請陳先生跟 Smale，而且煞費苦心，爲了請陳先生，甚至還先將陳先生當年在芝加哥大學的夥伴，Spanier 先請去。我想，這影響很大，現在 Berkeley 情況又有改變了。

劉：整個美國情況也改變，是比較 homogenized，這是世界的一個趨勢。你在 Berkeley 的時候，這些人有沒有故事可以說一說？Hans Lewy 這個人我曉得，他個子不高嘛，但一直到年紀很大，還非常 sharp。

項：Hans Lewy 是一個學者，幾乎有點孩子氣，我當然很尊敬他，見了面也很客氣，我跟 Hans Lewy 還有一個值得記憶的 contact，因爲那時我開始研究用對稱性來構造 minimal sub-manifold，我就想解決一個問題：在一個高維單位球面，能不能構造一個 minimal sub-manifold，它是 exotic sphere，我的思想很簡單，這種 exotic sphere 是存在的，但是假如在其他自然的領域裡永遠不出現的話，這也只是源於一時的好奇。因爲我開始做論文就研究 exotic sphere，雖然是 exotic 其實它還是很對稱的。所以我就開始研究 exotic sphere 的對稱性，其中有一種的軌道空間變成只有一維，等於是一個 generalized rotational manifold。總之能否構造這樣一個解？這就 reduce 到某種在三維空間的 ODE 能夠要有一個滿足特殊性質的解，但是這個 ODE 很複雜。

劉：必須要去面對 ODE。



項：面對 ODE 都不簡單，不過呢，別的地方都躲過了，這裡卻躲不過，這個部分非克服不可（劉笑），所以我就約了 Hans Lewy 吃中飯，我把這個 ODE 先寫好，拿給他看。他很老到，他便先說：Being an analyst, you know most equations we don't know how to solve. 先給自己留了退步，他再拿起東西看，先拿筆，中間覺得不大好處理的，劃掉，接著看，又劃掉另一項，結果全劃光了！零等於零（眾人笑）。我要講的是我從那裡面還是學到一些東西，我學到了當你遇到一個東西不會解的話，你先看簡化一點的東西能不能解（這就是他那劃掉某些項的意思），解了以後，再把那個簡化的解跟你要解的解做比較。那時我腦袋瓜要做的是微分幾何，做 exotic sphere，現在我自我批評，發現那時有點想要出奇致勝，那時，我正好回到中國要做中學數學，有時也忙得沒時間去想這東西。從 78~81 年，我覺得中學數學的事情已經暫時穩住了，可以說我那時是兩邊作戰，東線跟西線，覺得東線穩定了，現在要回來做西線的問題，可是當我回來時，我自己的感覺，研究基礎的數學，其實對自己也有去蕪存菁，返璞歸真的效應，所以我回來後就暫且不問 exotic sphere，而問在空間裡面，有沒有常均曲率的封閉空間，就是 soup bubble。在歐氏空間裡面有那些 soup bubble？自古到今，Euler 就在研究 soup bubble，所能見到就只有一個例子，那個圓圓的球面，一個圓圓的球什麼都等於常數，好比你做分析，你有的只是常數函數解，你能見到的只有常數函數是你想解的問題之解。從微分幾何知道有兩個定理，因為 Euler, Monge 開始，唯一的例子就是 round sphere，渾圓的球。甚至使得你想可能就是唯一可能者，所以 Hopf 認為應該就是如此，但他又不會證。但是他還是證明一個定理，即假設二維的 soup bubble，是 genus zero，他就能證明它是那個圓球，這個加了條件的唯一性定理馬上影響到俄國人 A. D. Alexandroff，他證了一個定理：一個 soup bubble，在任何  $n$  維的空間裡，一個常均曲率的超曲面，若是嵌入的，那他就會是一個渾圓的球，用的方法就是 reflection symmetric 和 maximum principle，他證完後，又發表好幾篇文章，就想把嵌入性丟掉，代之以某些拓樸條件，越講越糊塗。最後那篇文章他說其實 soup bubble 根本不要加條件，就只有那個渾圓的球，但他現在不會證，只會加一些莫名其妙的條件，那些條件應該是無關緊要的。那時我就想，假如我用四維的  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$ ，在每個  $\mathbb{R}^2$  中有旋轉對稱，所以我假設，滿足這樣兩個對稱性，即是否有一個  $SO_2 \times SO_2$  的對稱性者，我馬上就寫下 reduced equation，軌道空間是一個象限，那個 equation 是一個簡單的 ODE，再者，因為 ODE 變成只有三項，把其中 1 項略去的話，又有另外的對稱性，因此就把它積出來，它有 first integral，我把這函數做為一個輔助，代到原來的 equation，函數在變，但其變化是比較規則的，我要控制這個變化，解的曲線的幾何就可以控制了。由此不難得出無窮多個  $S^3$  — soup bubbles，所以，第一次有在四維以上找到 soup bubble，而且還是球，但它不是圓的球，它們有 self intersection。

張：所以不是嵌入，是 immerse？

項: immerse。

張: 自己有交集。

項: 對。所以表示 Holf 定理只有在三維對, 到四維就不對了。因為它是球面, Alexandroff 定理在四維以上也都不對。我要講的是, 搞這個基礎的數學, 其實對我也有好處, 並不是只爲了別人, 爲了下一代, 因爲自己開始做這種基礎東西, 你就會 purify 你的 mathematical thought, 數學的思維會更樸實, 所以我問的問題就不是 exotic sphere 而是 soup bubble, 這個問題在幾何裡面, 更有重要性, 但是 equation 簡單多了, 後來 exotic sphere 也會解了。因爲一開始學到新的思想, 像 Spherical Bernstein, 那時我也做了一系列的工作, 基本上我在中國搞中學數學教育, 穩定了, 我再回來打西線的時候, 雖然不能說脫胎換骨, 至少有所改變, 像 Kepler, 他就是經歷苦算才變成實踐的科學家, 他剛開始是夢想的, 做苦工, 返璞歸真, 去蕪存菁對自己是自然的事情。也許稍微講點基礎數學, 我有個感覺, 這基礎數學, 往這邊發展是比較深的前沿數學, 是 discovery, 另一邊則是 education。我的說法, education 是大乘應用數學。現在做的應用數學是小乘應用數學, 怎麼說呢? 大乘佛經是普度衆生, 小乘佛經是獨善其身, 所以小乘的應用數學是解決了個別的問題, 大乘應用數學使得廣大的人類下一代思維的訓練, 能夠善於認識問題, 是普度衆生。可是現在的現況是, 不管是台灣也好, 中國也好, 美國也好, 關於普度衆生的應用數學是一大堆不懂數學的人要搞數學教育, 而懂數學的人拒絕去做這個。也許其原因是此事其實也不簡單, 基礎數學你要懂得更深一步都很難, 吃力不討好, 所以不做。現在全世界現況就跟金融風暴一樣, 苦海無邊。數學教育現在全世界不僅沒有普度衆生, 反而是苦海無邊。我跟張海潮都覺得不忍卒睹, 卻無能爲力, 人太少了。你跟搞數學教育的講, 他們根本不聽也不懂, 反而說:『你傷害到我的利益, 你知道嗎? 你給我滾遠點。』你跟數學家講, 像陳先生反對我做這事, 就跟我說:『武義, 你完全浪費青春。』而且他一定講:『這事情是純政治, 純政治的事, 你去搞它幹嘛? 你的才能應該好好拿來做數學的研究。』這還是爲了我好。有些數學家, 他不但不去做這些基礎的數學, 其實要他做數學教育是不行的, 因爲他沒有懂透徹, 他以偏概全說:『這種東西我還不懂嗎? 這是沒什麼道理的東西!』他不懂才講沒道理, 這就是現況! 還有一個笑話, 現在給我總的感覺, 因爲基礎數學沒人下工夫, 數學研究跟基礎數學脫節了, 脫節久了, 數學研究必然趨於枯萎, 因爲離根太遠的東西是長不好的。譬如說做 string theory, string theory 老天一定不用的嘛, 因爲老天爺沒懂嘛, 我們生活的空間世界是精而簡, 他竟然說: 要他來指揮老天爺, 精簡的地方, 我不要做, 我一定要去做十維捲起來的東西, 這十維是什麼東西都搞不清楚, 這種數學越來越煩, 有點像當年托勒密的 epicycles。我去復旦, 和辛元龍邊喝咖啡邊聊, 他說:『你是一個比較奇怪的數學家, 前沿的數學跟基礎的數學是連起來的, 但大部分的數學家不連』(笑)。

劉: 我們談一下項武忠, 你們當初怎麼進入數學?

項：我們同時進數學系，他從物理系轉來，相當受施拱星剛回來講 abelian group 的影響，Kaplansky 剛好出了一本書。

張：Infinite abelian group。

項：項武忠學了很有興趣，就仔細唸，真正碰到了數學，他那時就開始選高等幾何、用《解析幾何與代數》這本書，把書帶回家。我對數學的興趣，比他更早。我很清楚自己對數學的啟蒙是小學剛畢業，去上海中學借讀《初中補習班》，上海中學是一所非常好的中學，他當年跟英國伊頓中學是姐妹校，雖然只唸了兩個月，我就逃難到台灣來，那時我唸到油印的一本書，《從代數回到算術》，他意思說，很多刁鑽古怪的算術應用題不好做，你就先學會代數後，設個  $x$ 、 $y$ 、 $z$ ，一列方程，但是你解的時候，用括弧表達其解，這樣就是算術的公式，整本書就在講這個。可是我把它倒過來唸，我從這裡看到算術到代數進一步是什麼，所以他是代數回到算術，而我則是算術到代數，善用計算，要有系統地用運算律來解決問題，特別是分配律很重要，有了這個理解，我後來逃難逃到台灣，我到附中，附中有位老師自行貼了個布告，說要辦全校高初中不分的數學競賽，我偶然看到便去參加，結果得到全校第一名，那時初一上，我大概得了 78 到 80 分，其他人都不及格。老師就把我叫去，中間有一題是韓信點兵，他問：『你以前見過這問題？』也許是我的回答不太恰當，我說：『我沒見過。』可是還加了一句話：『我覺得所有題目裡，就這題最有意思。』從此他再也沒找過我。總之在中學時我就自己學、自己看。初一、二，我就看《范氏大代數》，整本看完，完全沒困難，大概是初二，我接觸到解析幾何。是開明書局的《解析幾何》，裡面我最欣賞的是圓錐曲線在平行轉軸之下的係數變化，但它有變換之下的不變量。

張：小行列式、大行列式。

項：還有 trace，那時我印象很深刻：變中間有不變的不變量，對稱與不變量的理論是我對數學興趣的萌芽，我十分欣賞不變量的思想，並且用來解題目。然後中間有一大段的時間，數學沒有看到更好的書，我也就沒有什麼進步，我高一就對生物有興趣，高二對化學有興趣，跟那時的化學老師—江芷很要好，便花很多時間去唸化學，附中的圖書館有些莫名其妙的有機化學，你拿那什麼東西跟什麼東西用幾度壓力多少加在一起煮多久，便可出現百分之幾的東西，這東西有什麼意思呢？唸那理論化學，我想，我沒摸出這道理，然後呢，我到高中時，項武忠已經進台大了，我就可以用項武忠的借書證借台大的書。以及項武忠帶回來的《解析幾何與代數》，那是翻成中文的。

張：樊熾翻譯的，Introduction to Modern algebra and Matrix theory。

劉：德國出的。

項：因為那時 Sperner 訪問北京，樊熾是同濟大學的學生。

張：Sperner 是作者，他是 Schreier 的學生。

劉：樊熾在序上面寫著德國科技的進步。

張：那本書非常好。

項：項武忠借來時，是魯永容的書，我沒事幹，就拿來看，一看就很有興趣，基本上，我不太吃力就全部看完了，習題也全都做了，平常的書，我不太做習題，看看覺得會了就不做了，因為唸了那本書，我才決定唸數學系。

張：你唸《解析幾何與代數》這件事，在我們讀書時，很多人都知道。你在一些場合跟研究生講過這件事，所以班上很多人自動去唸這本書。

劉：我是有唸那本書，但為什麼唸那本我搞不清楚。

張：很多研究生都推薦那本書，我想是受你跟他們講的那件事的影響，不過它也是唯一一本譯成中文的，商務印書館出的。

項：我是在高中時唸這本書，而且那時我還唸了另一本書，就是《幾何原理》，台大借來的，Hilbert 的英文版《幾何原理》。其實我那時也沒完全決定要唸數學系，也唸 Pauling 的 Chemistry，也唸大一物理，到那時，我英文才稍微好一點，原來我英文最差，我最討厭英文，覺得英文沒有用（眾人笑），後來才察覺，不懂英文，沒辦法唸書，英文才稍微有點起色。

劉：基本上都是你自己的好學？自己本身的好奇心？你並不是那個老師特別給你啓蒙。

項：說老實話，從中學到大學，甚至到軍訓以後，這段時間好像生長在沙漠裡面。

劉：台灣那時的环境就是這樣子。

項：環境就像乾枯的沙漠，種子拼命想找水源找不到！要為年輕一代做點事也許是因為自己當年極有憾焉。

劉：但你現在整個人精神狀態還是很年輕。

項：這一輩子啊，唯一的志趣就是承先啓後，繼往開來。這種志趣很簡樸，至死方休。若有一天，老年痴呆那就算了。打起精神過日子，日子還過得舒服點，我想，我給自己的簡單描述就是：雲遊老和尚回歸本寺（劉笑），對年輕一代的情緣未了，所以還會回來跟這邊還有中國大陸的學生們講：承先啓後、繼往開來，數學與文明諸如此類的事情。第二件事情要追尋探索大自然的精簡，熱忱未減。

劉：非常好。我們可以用這做為結語。

項：第三點，知其不可而為之的事情少做點，因為來日不多了。

劉：最後這句可以省下來。（眾人笑）

項：基本上就這樣。

劉：活著就是要這樣，沒有錯。

項：從小，我就相當苦惱，連那一本好書都不知道。有一件遺憾的事情，我唸大學時，從未唸過 Courant-Hilbert 的書。

劉：Courant-Hilbert 的 Methods of Mathematical Physics。

項：假如我在二年級看到這本書，一定愛不釋手，而且唸得很仔細，我的分析就不至於那麼差（張笑）。我是很後來才碰到，年紀大了，就偶爾翻翻，沒像年輕時看得那麼仔細。還有一個是我想我更適於唸物理，但當時在台灣沒辦法，數學可以自學，但物理不行！你剛剛問的問題，項武忠大三轉進數學系，而我是大一，所以我們兩個基本上會互相討論，一直到大四以後，他就出國了。後來到 Princeton，那一段我們也沒太多交流，因為大家都忙，後來我做論文的時候發現 transformation group 有廣闊的天地，所以我跟項武忠有 3~4 年 intense 一起做 transformation group，李群跟幾何是我比較擅長的東西，裡面用到的拓樸是他的強項，後來我到芝加哥、Berkeley 去了，他走的方向是更多更深的拓樸方向，我則是往幾何方向發展。項武忠當然是我的益友，回想起來我似乎始終沒碰到真正的良師（劉笑）。也許是我的脾氣不好，唯一有那麼一點像良師的或許是陳先生，我跟他相處很久，我從陳先生得益的有一句話，在我大三下時，陳先生第一次回這裡，給了幾個演講。那時懂不懂沒關係，至少開了眼界，什麼是有意思的數學。之後我們去看陳先生，陳先生還花時間跟我們每個人談了幾分鐘，我那時還把我發表的第一篇論文 On distribution law（分配律）帶去給陳先生。

張：發表在 Transactions?

項：發表在 Proceedings，這是我第一篇文章，大約是大三下，他說：『武義，你在這個程度，能寫這樣文章，當然很好，但是一個數學家，他的志趣是要使得你的工作，使得數學能夠真正有所進步。』我覺得陳先生教我（笑）印象最深的就是這一句話。我在 Berkeley 做微分幾何的路跟陳先生完全不一樣，是用對稱，他是善用 moving frame。跟陳先生大概是亦師亦友。

劉：我們之後會把這份紀錄寄給項武忠一份。好極了，今天謝謝你。不過，今天跟你聊了之後，加上之前側面聽到你的那些事情，It makes sense to me, that's very nice, I'm happy for myself，這是真的。大家都要設法做點事，可以互相鼓勵的地方，非常好，謝謝你。

—本文訪問者劉太平任職中央研究院數學所，張海潮為台大數學系退休教授，整理者林思華為中央研究院數學所助理—