

有朋自遠方來——專訪

Varadhan 教授



策劃：劉太平

訪問：劉太平、黃啓瑞、姜祖恕、
尤釋賢

時間：民國 96 年 12 月 19 日

地點：中研院數學所

整理：焦源鳴、陳與庭、黃建豪

Srinivasa S. R. Varadhan 教授 1940 年出生於印度南部 Madras(Chennai), 1959 年、1960 年分別取得 Madras 大學的榮譽學士及碩士學位, 1963 年獲得印度統計研究院博士學位。自 1963 年起任教紐約大學 courant 研究所。

Varadhan 教授係近半世紀以來最傑出的或然率學者之一, 他在馬可夫過程的建構上有重大的貢獻, 對 Rare Events 的估計在物理、工程及統計上有極深的影響, 近年來對於流體力學的基礎亦有很深的著墨。Varadhan 教授於 1996 年獲得美國數學會的 Steele Prize, 在 2007 年受頒挪威文理學院之 Abel Prize, 這是數學界相當於諾貝爾獎的最高榮譽之一。

劉太平 (以下簡稱「劉」): 歡迎你來訪問。當年在印度的時候, 你如何對數學產生興趣?

Varadhan(以下簡稱「V」): 你知道, 小學數學其實就是算術, 只要能很快地加減乘除, 就是個優秀學生, 小學對數學的要求就只是這些, 背乘法表。而我能夠背起來所以考試考得好, 比起那些背不起乘法表的學生, 我被認為是數學好的學生。

劉: (笑) 我聽說印度的乘法表不是九乘以九。

V: 不, 是十六。(笑)

劉: 是十六乘以十六。

V: 是的。因為我們是英國貨幣單位，一盧布 (Rupee) 等於十六安納 (Anna)，一安納等於十二派 (Pie)。因此當你買蘋果的時候，十二和十六是很重要的，必須除得很快。(笑) 所以有些學校要求背到十二然後跳到十六，所以十三、十四、十五不強迫背，而一到十二，以及十六一定要會。

劉: 什麼時候你背得起十六乘以十六?

V: 大約小學四年級。當然中學就不同了，中學學了不少數學，我們學代數、解方程式、歐氏幾何、沒有微積分，另外還有三角幾何，正餘弦函數，這些並不難。

劉: 你成績名列前茅? 你們中學不學微積分?

V: 學校沒有教微積分。

劉: 喔，所以你跟班上其他同學上同樣的課。

V: 沒有 honor 課程，自然也沒有選修課，同一年級每個人都學一樣的東西。但是我有個很好的數學老師。周末他要我們到他家，給我們問題做，像是解幾何學中的三角形問題。因此我們養成解決問題的習慣。給我們一個問題，我們知道如何下手：從不同的角度去看它，試著去了解問題的核心，然後想想能否解決它，這是個很好的經驗。中學以後，進入兩年制學院 (junior college) 就讀，我們學數學跟化學、物理同時也學兩種語言。

劉: 哪兩種語言?

V: 英文跟 Tamil 語，Tamil 語是我的母語。物理和化學對我不是問題，數學也沒問題，但是數學學得真的不是很多。我們學一點射影幾何、圓錐曲線，然後是一點解析幾何：直線跟圓這類圖形，一點微積分：只有微分、積分、正餘弦函數，不包括指數與對數函數。

劉: (笑) 讓我往前跳過這段時期，你談到一切一如常人，這些功課對你而言並不困難。但我聽 Papanicolaou 說，Kolmogorov 在幾年後來到印度，見到你。

V: 那是我研究生生涯的尾聲。

劉: 那是好幾年後的事。

V: 我現在說的是 1956，當時我 16 歲剛從兩年制學院畢業。

劉: 你比同年齡的早了?

V: 大約早一、兩年。一直到那個時候數學並不那麼複雜。那時的數學大概是現在的微積分預備課程，微積分只在最後的兩、三個星期上。兩年制學院課程不多，只有一門叫做“數學”的課，有一位教授，他教什麼我們學什麼。第一學期他教射影幾何，第二學期教一些其他的東西，第三學期再教另外一些東西，最後一個學期的最後幾周才學微積分。微積分是薄薄的小書，大約二十頁，十頁微分，十頁積分。當時我不是真的懂內容，我是說，我知道怎麼做 (積分、微分) 但因為沒有實際的應用，我看不出來為什麼要做這些；先定義極限，再消去 h ，得到導函數，然後抓抓頭想想怎麼處理積分，就是這些。然後我進入三年制的大學學程，主修純數、機率與統計。

劉: 是英國的學制。

V: 我們是在這裡學到不同的東西。我們沒有其它的課, 沒有物理沒有化學, 除了第一年每周一次英文, 三年的時間都在學數學、機率、統計。數學有幾條同時並進的系列, 分成三個方面: 分析、幾何、代數。分析從第一年的微分和積分開始, 第二年是多變數微積分、初等實分析, 第三年是多重積分、積分變換, 還有一點點微分幾何; 代數有方程式論、行列式、矩陣、線性代數; 幾何有大量的解析幾何、圓錐曲線、剛體幾何、射影幾何。

劉: 所以你全部都學了?

V: 全部都學, 任何人都沒得選擇。我們班有 13 個人, 三年來的每堂課都一起上, 學校告訴你這些課是你們現在該上的, 就像中學和小學, 從早上九點待到下午四點。同時我們學機率與統計, 第一年學基本機率學、極限理論、敘述統計, 有點奇怪的是, 學這些東西需要一些當時在純數學課沒有教, 到後來才學到的東西, 像是傅立葉分析。我們讀很多理論統計, 也有敘述統計, 像抽樣調查。就這樣三年, 我完成大學課程。

劉: 當時是 18、19 歲?

V: 18 歲快到 19 歲的年紀。這三年的學程是為碩士做準備的。此時先授與榮譽學士學位, 六個月後自動變成碩士學位。然後, 我到加爾各答當研究生。

劉: 大學在哪裡唸的?

V: 千奈 (Chennai), 之前叫做馬德拉斯 (Madras)。

劉: 你當研究生的時候一定有些不尋常的事發生?

V: 嗯, 我對機率比較熟悉, 但那時完全不知道什麼測度論。在當時不教現代數學, 我們學到扎實的古典分析, 可以做估計等等, 但沒有教抽象思考, 或泛函分析, 測度論, 點集拓撲, 這些完全沒接觸過。當我到加爾各答, 研究所沒有開任何課。學校給你獎學金, 一張桌子, 一張椅子, 要求你三年內交出論文。(笑) 我們只有一些嚴謹的討論班, 討論測度論跟點集拓撲, 我全程參與。

劉: 沒有作業?

V: 沒有, 這不是正規的課程, 是討論班, 所以如果你不利用它, 它就過去了, 而差不多也就要這樣混過去了。然後有一天有人告訴我為什麼測度論是重要的。你看, 直到那時候我都不知道有 singular measure, 絕對連續性的概念也不會被強調。雖然我們學了三年的機率與統計, 我們只討論離散的機率分布或由密度函數定出的機率分布。實際上課堂遇到的問題不是這一類就是那一類, 就算有 singular distribution 又如何, 你從沒看過, 誰在乎! 所以研究所時有人告訴我確實有這類分布存在, 我很驚訝也才了解測度論的重要, 我回頭再讀了 Halmos 的書。原本我想做的不是數學, 是統計, 我想做應用統計, 當個在工業界工作的統計學家, 沒有人有靠研究數學過活的念頭。(笑) 但是三四個月後我慢慢的感到失望, 現在我們也許會說沮喪, 但在印度, 周圍都是人, 我多少有些失落、迷惑。我原以為做工業統計是很有

趣的,其實很無聊,當然需要人做工業統計但你不必學些什麼,用到的大多只是常識。有人建議我做作業研究,做了一陣,我發現大部分是計算極大極小,不過換個名目而已。我發現自己對應用領域不是很有興趣,因此開始大打橋牌讀推理小說。因為沒有必須上的正規課,也沒有人要求你做任何事,你可以到辦公室到圖書館看推理小說(笑)。我就這樣耗了大概四五個月,直到我遇見比我高一兩年的研究生 Ranga Rao 和 Parthasarathy。那時負責主導討論會的 Varadarajan 去了美國,而他們三人正在探討將測度論推廣到拓樸空間後的極限定理,抽象空間的極限定理,我很感興趣躍躍欲試。這強迫我學習,學著應用我學到的測度論和拓樸,然後把他們整合到具體的問題上,例如, Donsker 的 invariance principle, Prohorov 和 Skorohod 的弱收斂。接著我們開始自己的討論班—極限定理定期課程,就是三四個研究生給自己上課。我們同住一個公寓,早上七點到辦公室,討論班從七點到十點,天天如此。在這段期間我學到很多。很快就學會 group theory, functional analysis 等等。後來我們決定推廣 Gnedenko 和 Kolmogorov 的極限定理到 topological groups。這是我們的出發點。之後,我們討論在 Hilbert space 之下的現象。這比較複雜,因為如果是 locally compact groups, 特徵函數和傅立葉變換是很好的工具,但在 Hilbert space 之下,只有特徵函數是不夠的,必須發展新的工具,例如 concentration functions。這是一個很棒的時期,三年就這樣過去了而我的論文也完成了。

劉:難以置信!

V: Kolmogorov 來的時候我剛好完成論文。他來我們學校訪問,所以跟他有些互動,基本上就是我報告論文做的東西而他是聽眾之一。他是我的論文的審查委員。

劉: 嗯,讓我把時間倒退一些。你剛剛談到你有五到六個月不知道要做什麼。起初你想做一些具體可以應用的東西,發現很無趣。之後你決定做抽象的東西,但是之前一段時間並不算浪費,對吧? 因為你正在尋找方向。

V: 讓我這樣說吧。學期從八月開始,頭幾個星期只是讓自己在新的地方安頓下來,使用的語言是新的,每件事都是新的。生活中的每樣事物都是陌生的,食物不同,很多事情都不同。學校在遠離塵囂的地方,雖然也有南部鄉親居住的小社群,但從學校到那兒要花一個半小時。一月或二月我才開始對數學感興趣,我們談的不是一段很長的時間。

劉: 不過我想問的是你做的都是抽象的東西,但總是有具體的現象可以描述,這不是一個學純數的學生遵循著教條進入抽象的森林,繼續...

V: 至少從我大學時代和我的第一篇論文開始,都是試著推廣在實數線上已解決的問題到 locally compact groups。當你開始想這些問題,再看看實數上的證明會發現難處在那裡。其中之一就是什麼叫做集中 (centering)。Kolmogorov 已有一些成果。即便你有一個很小的分配,很小的平均值,你仍然需要去修正它,因此你必須定義平均值。在實數線上你可以去掉 (truncate) 或是積分,但是如何在 locally compact group 中處理? 如何定義平均值?

不需要精確但是必須夠逼近。有一個問題必須解決, 如果是 disconnected groups, 不需要去集中, 但對於 connected groups 呢? 一個 connected group 基本上是一個向量空間和一個 compact connected group 的直和, 而你知道怎麼處理向量空間。你要做的事情就是如何在 compact connected group 定義平均 (mean)。你有 group 的 character, 再對它取對數, 因為取對數之後大概是線性的, 因此對這個對數積分就是平均。character 是複數, 因此取對數之後是多值的, 但是你可以透過一些方法去定義它。它有定義之後, 就有集中的概念, 依據 Gnedenko 和 Kolmogorov 做的再做一些修正。

劉: 身旁沒有其他人幫忙?

V: 就我們幾個研究生。

劉: 真不得了。可否請你描述一下你所認識的 Kolmogorov?

V: 我對他認識不深。他來印度一個月, 大概每天都看到他。我們還跟他在印度旅行, 他很有活力總是這裡走走那裡走走。他來的時候是 59 歲, 我們為他舉行 59 歲生日晚會。他總是喜歡年輕人圍繞在他身邊也喜歡討論問題, 我也請教他一些問題。麻煩在於他說他不會說英文, 他只說法文、俄文、德文, 但這三種語言我們都不懂。(笑) 所以我們得設法溝通, 不過數學還能溝通。

劉: 之後你到了 Courant Institute?

V: 1962 年 4 月, Kolmogorov 來訪問, 我正好完成論文, 但他想把論文帶回莫斯科給 Prohorov 看然後再寫審查報告。在印度, 交出論文之後要等六個月到一年的時間才拿到審查報告, 因此在 '62—'63 我當了一年的講師。

劉: 在加爾各答?

V: 在加爾各答。就在此時我開始對馬可夫過程 (Markov processes) 感興趣。我們有個討論會, 學習 Dynkin 跟 Ito 的理論, 我覺得要徹底了解這些東西需要學一些微分方程。我們大學有一門 ODE, 沒有任何課程談 elliptic theory, parabolic equations 或類似題材的 PDE 課程, 我對 PDE 一無所知。當你開始研究馬可夫過程, 你看到 Feller 和其他人的工作, 他們寫下擴散方程, 假設某些可微分性質, 然後說此方程有解然後如何如何, 但是為什麼解存在並且具有可微分性卻不清楚, 很清楚的是那是已有的定理, 因為他們引用一些論文, 但是我不知道從何開始。如果我們有時間也許可以學, 但是那時討論會已經開始漸漸解散了。

劉: 哪些人組成討論會? 跟你差不多年紀的人?

V: 我們一共五個人, 但不是同時在一起。

劉: 都是年輕的學者?

V: 我是討論會裡最年輕的, Varadarajan 最年長, 比我大三歲, 他現在在 UCLA。我跟他念相同的兩年制學院跟大學。不過他在大學時代就知道他要做什么, 因此他準備得很好。討論

會的前三四個月由他主持, 然後他去美國, 在我在 Calcutta 的最後一年才回來。我們一起做了一年李群。那時 Ranga Rao, Sethuraman, Prathasarathy 已經離開。但是在前三年, Rao 參與其中兩年, Sethuraman 參與三年後離開, Prathasarathy 參與三年後到俄羅斯一年, 所以不同時間不同的人參與。但在第三年之後, 我們的討論會逐漸減少, 因為只剩下我。Varadarajan 回來之後我們做了一些不同的東西, Harish-Chandra 的群表現理論。

劉: 你是召集人?

V: 不, 我不會這麼說。我想我們每個人都有各自的角色。

劉: 但是你是最熱誠的成員?

V: 不, 我不認為。我從他們身上學到很多。例如 Ranga Rao 已經學了 group theory, 他知道 topological groups 等等, 因為他早先已經跟 Varadarajan 學了, 所以他教我們這些。Sethuraman 在學 functional analysis, 讀 Dunford 跟 Schwartz 的書, 然後講給我們聽。(笑)

劉: 真好。(笑)

V: Prathasarathy 正在讀 information theory, 所以他講 entropy 跟動態系統等等。因此我們四個會說: 「我讀這個, 你讀那個」分配好然後講給別人聽。好處是即使讀不懂也不會因此停下來, 你可以在討論會中表明「這部分我不懂」, 然後其他人就開始試著解決。所以即使不是完全精通仍然可以講。

黃啓瑞 (以下簡稱「黃」): C. R. Rao 是你的指導教授, 他對你有什麼樣的影響?

V: 精神上的支持。

黃: 精神上的支持, 不是統計上?

V: 一開始我跟他說我對統計感興趣, 他要我去找做品質控制的某人談, 我去看看, 結果發現他們在做的就是作業統計之類的, 除此之外我不知道他們在做什麼。(笑) 我很失望, 再去找他, 他知道我參加數學討論會, 很高興。最後一年, 某天他要我到他的辦公室解釋我的論文做些什麼, 然後我向他報告論文內容。大概就是這樣。

劉: 哦。那是什麼時候? 你們討論會成員各奔東西是那一年?

V: 1962年終。學期在五六月就結束了。

劉: 但是你在加爾各答多待了一些時間。

V: 多待一年。Varadarajan 夏天回來, 因此我們有兩個人, 我們學一點群表現理論, 我一邊也學一些馬可夫過程, 希望能做這方面的工作。在這之前, Varadarajan 在 Courant 一年, 他對我說如果你對微分方程有興趣, 應該去 Courant。他寫信給 Peter Lax 建議讓我以訪問學者身份去 Courant。

劉: 1963?

V: 1963。

劉: 然後你就留下來了?

V: 我留下來, 到2008年夏天將是整整45年。

劉: 我很想知道你在 Courant 的很多事情, 但是我們應該先談一些數學。

姜祖恕 (以下簡稱「姜」): 法國的機率學派, 跟美國的很不同, 有不同的風格, 法國學派對你有什麼影響?

V: 法國學派這些年來改變了很多。Neveau 的時候, 他對具體的問題比較有興趣。在他之前, Fortet 和 Mourier 對抽象的理論較感興趣, 與具體問題常常沒有關聯。但在考慮具體問題上, 他們有很強的傳統, 像 Paul Lévy 給 Ito 很大的啓發。但是法國數學界, 對 Lévy 並不那麼重視, 他在 Ecole Polytechniques 因此他真正是一個工程師, 他做的被認為是工程而不是數學, 這是法國人傲慢的觀點。這種觀點已經不再存在了。Jacques Louis Lions 的出現使微分方程跟應用數學更合理化, 更令人重視。法國已經改變了, 現在法國機率學家跟我們沒什麼不同, 非常具體而不非常抽象。

姜: 全世界漸趨一致。你對俄國學派的看法如何? 在 Kolmogorov、Dynkin、Prohorov 之後, 機率有所謂的俄國學派嗎?

V: 我想俄國學派在整合拓樸學跟測度論進而發展出一種觀點很有貢獻。在隨機過程的研究上, Kolmogorov 扮演相當重要的角色。馬可夫過程的發展, Dynkin 有根本的貢獻。在他之前 Feller 在這方面做了些工作, 如果你讀 Feller 的書, 會覺得困惑, 這一個定理, 那一個定理, 卻沒有一致的觀點, 我認為一致的觀點是 Dynkin 做的。但是政治來了, 70年代發展的排斥猶太人的氛圍, 基本上將他們分散了。像是 Fredlin, Dynkin, Skorohod, Ventcel, Krylov 都離開了, 他們都必須離開, 另找棲身之地。90年代早期, 蘇聯解體, 生活艱難維生不易, 很多數學家可以的話去了美國, 但是有些人還是會常回俄國。動態系統的 Yakov G. Sinai 的學群非常活躍。因此俄國學派的影響是有, 但是他們在過去20年有自己的問題, 既然現在他們有資源, 我相信他們會...

姜: 重組?

V: 重新發展。

姜: 日本的機率學派呢? Ito, Watanabe, Ikeda ...

V: 他們有很強的學派。

姜: 可否比較日本學派跟其他學派的風格, 像是法國學派?

V: 我想日本學派很擅長拿到問題做完整的分析, 很快地把問題拆解開來, 非常勝任。但我認為有時候他們有些呆板。

姜: 他們通常跟著大人物的脚步接續他們的工作。

V: Ito 並沒有接續別人的工作。(笑) 不過我想對他們而言要有彈性或是冒險是困難的, 你可以從他們的人與他們的工作看到這點。優秀的學者做優秀的工作, 但我認為他們怯於去發掘很多的東西。

姜: 你做的東西, 我發現你很少引用前人的工作。例如, large deviation, 人們引用你的東西。但是似乎它是從你開始, 沒有前面的工作, 你做的是先驅者的工作。

V: 這不很對, 這是我的毛病, 我讀的不多。(笑) 而且我認為如果你想做一個問題, 去讀前人的工作是一個錯誤。

姜: 喔, 我們不應該讀你的工作。(笑)

V: 不, 不。讀前人的工作讓你處於同一思考模式, 如果想要跳脫出來, 那麼看看別人的想法是好的, 可是不要去鑽研細節。如果你抱著細節不放, 會落入相同的思維。如果想嘗試不同的方向, 我不會建議任何人這麼做。因此我很少用別人的結果, 我用簡單的工具, 證明我需要的東西。我不喜歡用別人的大定理, 然後說“這是根據某某定理...”。

姜: 跟一般人做法很不同。

V: 因為他們讀得很多。

姜: 他們讀太多了。(笑)

V: 有好也有壞。好處是如果有一個別人解決不了的問題, 你做出來了, 那是和前人非常不同的方法, 可以開啓一個新的解題的方式。另一方面來說, 可能長時間卡在一個地方, 非常挫折。如果你讀了其他人的工作可能會知道怎麼做。

姜: 有問題時你會跟其他人談嗎?

V: 是的, 我會跟人談, 我也聽人說。不過我不去看細節, 只試著去了解他們做的。如果不是我正在做的東西而我又又有時間, 我會去讀它, 看看他們做了什麼, 主要的概念是什麼。我不必去看所有的細節, 主要是關鍵步驟, 或是主要概念。

姜: 寫論文時你曾經犯錯嗎? (笑)

V: 在我當研究生時發生過。

姜: 誰找到錯的?

V: 我自己。它給了我一些教訓。我試著去證明一些定理。我那時很天真, 才研一或研二。我試著證明一些東西以為已經證出來了。我把它寫了出來給同事看。他說不錯, 我就投稿了。但是有一天我問自己, 為什麼我要證它? 你知道, 一個證明都要有一個想法, 你不可能沒有想法就去證明一個結果, 而我似乎沒有想法就證明了它, 看起來很奇怪。我回頭去看它, 到底哪裡錯了, 然後我了解我為什麼犯錯: 有兩個預備定理, 預備定理 A 以及預備定理 B, 我用預備定理 A 去證明預備定理 B, 再用預備定理 B 去證明預備定理 A。(笑)。我說:「這不行。」你知道, 如果你要你的證明行的通, 在證明它之前要有想法來支持為什麼它行的通。所以我立刻寫信撤回論文。同時間, 審稿人的報告也來了, 我那篇論文被拒絕了。退稿的理由

並不是因為那個錯，而是其他的原因。但是，它給我一個教訓。現在如果要寫證明，而那個證明是來自拼拼湊湊的，你可能會犯錯。如果知道一個證明為什麼行得通，你不太可能會犯錯。

姜：我記得 Stephen Orey 曾經說過你寫證明時很小心。甚至不會有打字錯誤。你一直都那麼小心嗎？有人一直幫你校稿嗎？

V：不，不是這樣的。我想，就某種意義而言，那是一種寫作的風格。至於打字錯誤，我不知道，那是期刊的事，有些期刊的編輯會一行一行地看，實際上是那些編輯們找出錯誤，特別是如果那個編輯懂數學的話。當我在大學的時候，有一個分析的考試，我沒記錯的話，有一個問題：如果 θ 是無理數的話，則 n 倍 θ 的小數部份在單位區間裡 dense。所以我大致想出了答案，寫下來。我以為我做的不錯，覺得那是正確的答案。不過，交上去後卻一分都沒拿到。我找老師抱怨，她說：「或許你的證明是對的，你自己心裡明白，但我看不出為什麼它是對的。在數學裡，如果你寫的讓你的讀者看不出為什麼它是對的，它就不是對的。」然後她拿給我看看她保留的以前學生的卷子，那正是 Varadraján 三年前的卷子。我看了看，知道哪裡不一樣了。(笑)

姜：我瞭解。

V：所以我逐漸瞭解到 做數學的一部份就是要學著如何寫作，寫到讓你的讀者覺得你的論述清楚。你不要試著隱藏複雜的結構，有時，這根本是不可能的，因為有些論文事實上很技術性，所以，你盡力去做。我認為通常很多人不肯花心思在適當地寫作上。

劉：你是否能說一下 Large Deviation，如何開始研究這個問題的？為什麼這個問題會如此重要？

V：嗯，為什麼 Large Deviation 是重要的？如果你認為機率是重要的...

劉：(笑) 認為機率重要，這容易！

V：然後，你必須要去計算一些東西的機率，不然機率能幹麼呢？ 所以，你有一個模型，你有一個事件，你想要去計算在這模型裡的一個事件的機率，這就是問題，對吧。所以如果你在業界做事，例如華爾街等等，你不在乎怎麼算，你只要一個數字，然後你把這個數字輸入電腦。或許這個數字是對的，或許它是錯的，那是你的銀行要承擔這個風險，不是你。(笑) 另一方面，如果你是一個應用數學家，你看到問題中的參數而想要看看當參數很大時是否依然能計算這個事件的機率，試試看是否可以估計。有時，當參數變得很大時，這個機率會收斂到一個定值，因為原來的模型已變成不同的模型了，而這個機率在這個新的模型下是可以計算的。這就是極限定理在談的。所以這問題變成一個可以計算的問題，因為你必須在這個新模型下計算機率，而或許這個新模型比舊模型簡單，或許你可以發展一套數值方法或者這個新的模型有時簡單到可以讓你求精確解。第三件事是，或許當參數變得很大時，這機率收斂到零或一去了。零跟一是同一件事，因為你只要看它的補集就好了，就說它收斂到零

好了，然後你問：它收斂到零的速度有多快？在大多數的情形之下，它收斂到零跟如何參數化有關。我們假設它的參數讓機率以指數方式收斂到零。你想知道那個指數常數是什麼？你要如何計算這個常數？這就是Large Deviation 的問題了。針對不一樣的模型，你可以計算這個指數常數，有一種有系統的方法去計算它。而這就是 Large Deviation 的理論所探討的。

劉：這就是你所做的。

V：這就是我所做的。不，在我之前，北歐保險界在1930年代就開始針對一些特定的模型作這件事了。Cramer 的結果是針對獨立隨機變數和。所以很多人都已經做了這件事了，研究統計力學的人在不一樣的情況下也做了同樣的事。事實上，整個均衡統計力學不過就是披著不同外衣的 Large Deviation。所以，這樣的事已經一點一滴的在很多地方做了。有一些是我在開始做這件事時根本就不知道而後來才發現的，有一些是我在大學時學的。

劉：所以，有一個一統的方法，或者，一統的想法囉？

V：是啊！到最後，事實上就只跟一個公式有關，有一個通用的公式可以用在 Large Deviation 上。一個模型，通常有很多的參數，其中某一個參數會越來越大，當這個參數變大時，某些事件的機率就會收斂到零。你問：是否我可以稍稍變動其他的參數使得機率不會收斂到零，而是收斂到一個正數，甚至一。所以你問自己：假設有一組新的參數，其中有一個參數跑到無窮大而有一些參數固定不動。現在，還是讓這個會跑到無窮大的參數跑到無窮大，但是讓其他原本不動的參數動一點點好讓極限機率不為零。如此，你就有兩個不同的模型，你可以計算後面這個模型相對於當參數跑到無窮大時會有特定行為的模型的相對 entropy。通常它對參數是線性的，有一個可計算的常數。不同的擾動通常會產生同樣的答案。你如能找到具有避開零機率的最小相對 entropy 的最佳擾動，這個常數就是指數率的常數。這是 Large Deviation 的基本哲學。

劉：可以說一說你是如何得到這樣的方法的嗎？

V：喔，你知道的，算大量的例子。我試過不一樣的例子，而最終我有辦法了解這些東西的共通點。有一些已知道的，我就做一些計算而得到的答案讓我吃驚。這樣其實是合理的，因為它是一個一統的原則。

尤釋賢 (以下簡稱「尤」)：我可以問一個問題嗎？互動粒子系統與 Large Deviation 的關係是什麼？你如何看待機率與物理，我是指，把它們放在一起？

V：大部分的物理，當然了，除非你有不確定性或者一些不確定的東西，否則你不能用機率。如果你給我一個動態系統和一些初始條件，那只是一堆我需要去解的常微分方程... 這樣會牽扯到混沌理論，我完全不懂，這與 hyperbolicity 以及拓撲動態有關，是不同的東西。所以我考慮有噪音的模型，噪音越多越好。我探討的那類互動粒子系統裡的問題稱為 Hydrodynamic Scaling Limits。它是什麼呢，它是一個非常複雜且非常龐大的互動粒子系統，但有

守恆量。所以這個系統可以有一個大域的均衡，因為守恆-因為互動是局部的。所以，要達到全域的均衡是需要花相當長的一段時間的。所以呢，在某種時間尺度下，我們應該可以藉由某種大的空間尺度所表達的局部均衡去解釋，描述這個系統的狀態。因之會有一個尺度的議題。如果你的時間尺度是某一種而你的基準尺度是另一種，那麼你就是以一種新的尺度來描述這個系統。這樣就有巨觀與微觀二種位置。所以，巨觀而言，你的空間可以是一個連續的緊緻空間。但是 如果你很仔細地看，你就可以看到裡面有格子，在格子裡有個東西惱人地上下跳動著。但是從很遠的地方看，你看不到這些波動。你只會看到一些很平滑的東西，因為那些波動都被平均抵銷掉了。這些波動的東西會處在某種的局部均衡裡。而你從很遠的地方看到的是那種均衡的平均。這個局部均衡可能會逐點改變。所以你用以描述的系統狀態正是一個位置函數。這個函數的值域就是描述均衡的參數。也就是說，這是流體的樣子。然後你要做的是：讓時間移動得夠快，這個流體的樣子將會隨之改變最終得到一個常數，而這將是全域均衡。所以，你想要描述這種改變的方程，我們有偏微分方程來描述這些。而這裡原本就有一個馬可夫過程來描述這個交互作用粒子系統。從這裡，你想要推得一個偏微分方程。這就是 Hydrodynamic Scaling Limits 探討的問題。如果把機率去掉，得到描述氣體的 Hamiltonian 系統。你得導出尤拉方程 (Euler equation) 並且將壓力藉由一個依賴互動勢能的狀態方程表示成密度與溫度的函數。這就是最終求得的方程。五個方程以及五個未知數：密度，三維空間的速度以及溫度。這是 deterministic 的情形，沒有人會做。但是如果你有噪音，這些噪音所能的功用在迫使系統達到局部均衡。首先當你知道你有噪音，至少在某些條件某種意義下你可以證明局部均衡。這個問題事實上就是要證明局部均衡不會波動。對於那些比你有興趣的尺度要低的尺度，因為系統是非線性的而且如果波動確實存在，你沒辦法知道什麼是極限方程。所以，建立局部均衡並且證明沒有不必要的波動。你必須要確定沒有任何不必要的波動，這是問題的一部份。你需要做兩件事：你必須要建立局部均衡，接下來你要證明沒有不必要的波動，通常導出來的方程將會以 weak form 呈現。這裡有三個步驟要做，而且有一個系統性的作法。你有一個可逆系統，例如說，一個處於均衡的粒子系統。跟那些完全不可逆的動態系統全然不同。如果你寫下算子，其中一個是 self adjoint，另一個是 skew adjoint，所以它們是極端。有一些粒子系統模型在均衡之下有可逆動態。然後，你可以引入 Dirichlet form 的技巧。瞧，問題的一部分是你的初始狀態是遠離均衡的。因為如果你從均衡出發，你就會一直處於均衡，而偏微分方程就是：量的微分為零，因為在均衡狀態下所有參數都是常數，所以你把它們帶入得到零等於零，因此常數是無聊解。所以從均衡出發，得到無聊解，那是無趣的。如果從不均衡出發探討趨於均衡是如何發生的，這就是整個布局了。所以如果從不均衡出發，這代表初始狀態是一團亂，你就無法解出 Kolmogorov forward equation 並且說：在時間 t ，我的狀態是如此，而針對這個狀態我試著證明各種的性質等等。所以你必須有一個間接的證明，你沒辦法給一個直接的證明。

尤：所以你需要準備初始狀態。

V：不！你必須針對它處理它。縱使你準備了初始狀態，它很快就會改變。除非你將它準備為常態的均衡，否則它不會傳播。記住，時間的尺度是很大的。所以你要方法去控制它，而你用 Large Deviation 去控制它。用 Large Deviation 去控制它的原因在於，不管初始狀態是什麼，它相對於均衡的 entropy 將會與體積成比例，因為 entropy 是把每一個地方的量都加起來。所以無論初始狀態為何，不失一般性，你永遠可以假設，相對於均衡的 entropy 與體積成比例。Boltzmann 的 H 定理說，相對 entropy 是會遞減的。你可以計算相對 entropy 的遞減率，用狀態表示它，對它微分，再用 Kolomogorov 方程，然後做部份積分，這事可行因為它是可逆，最後你得到 Dirichlet form，事實上是稍微修正的 Dirichlet form。這個 Dirichlet form 與 gradient 的平方有關。既然密度是正函數，而且你有 gradient 的平方除以密度函數。所以，這就是 Dirichlet form。entropy 也是正的，你知道開始的 entropy，然後一路遞減，你必須保持它是正的，所以就給了 Dirichlet form 的控制，有了 Dirichlet form 的控制，再看看針對某個函數積分的指數的期望值的 Feynman-Kac formula。Feynman-Kac formula 給你一個藉由主固有值 (principal eigenvalue) 表達的 variational bound。對於一個可加泛函 (additive functional) 的馬可夫過程由 0 積分到 t，取指數，再看它的成長速率，在可逆的情形，這個速率藉由主固有值實際上是控制的。這個主固有值有個變分的公式，是以 Dirichlet form 來表示的。所以，如果你能控制 Dirichlet form，就可以控制這些東西。但是，這些都在均衡裡了。所以，如果你先掌控好均衡，壞東西會出現，你證明壞東西出現的機率很小，多小呢？必須是某一個很大的常數乘上體積的負指數。所以這個誤差率甚至會比體積大很多。

尤：但是誤差是？

V：誤差機率的倒數取對數，其值大於體積。大得很多，比體積大了一個次方。這稱為 super exponential estimate。你可以用變分法，用 Dirichlet form 來證明這些。這不過是變分法，是可以做的，一旦做了，則在均衡下的誤差機率是很小的。由於不均衡下的相對 entropy 只跟體積成比例，加上在均衡裡的誤差是 super-exponentially 微小，所以 Jensen 不等式告訴你誤差在均衡下是小的。就只用到 Jensen 不等式，一個簡單的不等式。所以這就是如何在不均衡狀態下控制誤差的機率，一旦能控制誤差的機率，問題就解決啦，<停頓> 因為我從未說過誤差是什麼！由定義來看，誤差是：你想要的減掉你有的。(笑)

劉：你想要的是局部均衡嗎？

V：沒有波動的局部均衡。針對每一個情形你必須用不一樣的估計。但是一樣的都用 Dirichlet form 去控制它。所以，這個方法對可逆的情形，或者一般的擴散的情形都相當管用。但是還有一些其他的問題，事實上這是最喜歡的。瞧，在擴散問題裡若空間的大小是 n 。則時間是以 n 平方加速。如果要計算 hydrodynamic limit，基本上那是 transport 的問題。你得

到 current。由於守恆律可以計算 current，得到兩項的差。所以你必須要吃掉 n 的 2 次方。因為守恆而且電流是差，可以做部份積分或部份加法一次去掉一個 n 。另一個 n 去不掉，除非在某些模型裡，計算的結果意外地得到兩項的差。你有的是零平均 (mean zero)。因為根據定義，在均衡狀態之下平均 (mean) 必須為零。一個在所有均衡狀態之下平均都是零的物體不見得是兩樣東西的差。這是什麼意思呢？瞧，在方格裡，如果有在位移下不變的東西，位移再加上測度也是不變的，那麼一個像 $f(x)$ 減掉 $f(Tx)$ 的東西其平均永遠都是零，因為位移不變的結果 $f(x)$ 與 $f(Tx)$ 有一樣的平均值。但在另一方面，這對部分加法是好的。因為如果你積了它，將它拿去與一個緩慢變化的函數作測試，則重新調整尺度代表測試的函數 (test function) 也將在原子的尺度下，緩慢變化。所以在原子尺度下它是兩樣東西的差。針對測試函數把它平滑化，不費力就得到部份加法，這會帶出一個多的 $1/n$ 的倍數。有這類性質的模型稱為 gradient 模型。所以如果你有一個 gradient 模型，我剛剛描述的模型很管用。但是有時你得到的函數不是兩樣東西的差，你就必須去做不同的處理，基本上是無窮維的 Hodge 預備定理。所以你定義一個抽象的希爾伯特空間 (Hilbert space)，你的物件是那些相對於每個均衡狀態平均都為零的函數。一個這樣的例子是電流。因為在均衡之下電流是沒有淨流的。我們的系統在均衡下是可逆的，在兩個不同地方的密度的平均也是零。所以如果你想要知道傳輸，那就是你想要處理的：兩點之間密度的差。因為當你把它代入，你會得到 dp ，就是密度差 (gradient)。所以你想要瞭解的是如何用密度差去置換一個平均為零的函數。你必須要證明這個差在某種意義上是可以被忽略的。沒有黑板、粉筆描述起來有點複雜。

劉：這沒關係的。(笑) 你描述了好多。我們談點輕鬆的好了。你在 Courant 待了好多年。說說那裡的人，談談那個地方好嗎？

V：喔，我認為... 嗯... 你曾經去過那裡，你知道那邊的情形。

劉：只有你待在那裡的百分之十的時間。

V：嗯，那是一個很好的地方，因為就某種意義而言那裡就像個家庭。他們會好好照顧，教育年輕人。資深的教授一直很願意照顧下面的人。另一件事是那裡的人總是在那裡讓你可以接近。任何時間我想要問什麼問題，我可以找任何人，他們每天都在。我知道一些地方，想要見某人，必須在一個月前事先預約。(笑) 而在 Courant，人們天天在那裏，在喝茶，在吃午餐，你問一些問題，你加入談話。另外，這個學院的運作長久以來獨立於大學之外，所以他們的運作少了很多官僚氣。然而，現在有些改變，就像美國很多大學，紐約大學也變得比較像公司。校長們喜歡把自己想成公司裡的總裁，變得比較像一個生意。我不責怪他們，因為政府對教育的補助正在減少，所以他們必須像經營生意一樣的經營學校，這樣才能募到錢來支持各種的活動。

劉：另外 Courant 學術上的重點也在改變。

V: 那是因為數學的演化。三四十年前, 研究橢圓方程, pseudo-differential operator 等等是很重要的。現在, 比較非線性, 非線性雙曲線方程是人們注意的。我認為現在數學裡流行的也在改變, 希望我們也隨之與時俱進, 不然到後來我們就落後了。還有, 現在的數學變的比較重視計算。大尺度計算已經成為數學裡重要的工具。隨著電腦越來越大, 你可以做的事也越來越多了。誰知道呢, 當量子計算出現的時候, 你可以做得更多!

劉: 我聽說這不會很快發生。(笑)

V: 以前說到上月球人們也是這樣講的。(笑)

劉: 好吧, 我瞭解。(笑) 你現在跟印度還有很多聯繫嗎?

V: 是的, 我試著一年左右回去一次。不見得是回去待在那裡, 而是去度假, 去拜訪不一樣的地方。今年的二月, 我或許會在 Chennai 的機構一個月。我想, 他們對辦一些機率的課程有興趣。Stroock 上個月待在那裡一個月, 我二月要去接續他所留下的課。希望他明年秋天會再去, 我在接下來的春天又會回去。所以將有四個為期一個月的課程, 那是一連串的計畫。

劉: 隨著印度的經濟變好, 印度的科學也會上來。

V: 我希望如此, 希望如此, 但是那不是必然的, 因為很不幸的印度的科學教育很糟。大學的教育是由州政府所控制, 而州政府又有各自的規劃。雖然不少人有意願, 他們沒辦法每一件事都做。你需要各階層的人合作。這很難。所以接下來中央政府將在一些地方開始一些新的機構, 它們會很好, 因為州政府不會介入。但是, 一旦州政府插手了, 一切將變的亂七八糟。

劉: 但是在你年輕時, 你在那裡...

V: 那些都還沒有被泛政治化。你知道, 到後來, 如果你是某一州出身的, 你沒辦法在另一州找到教授的位置。如果你沒辦法從同一所大學拿到博士學位, 你就不會被僱用。同血系繁殖的情形很嚴重。

劉: 但是印度文化, 是看重追求知識的, 對吧?

V: 那是我們一直在說的。(笑) 事情是這樣的。是的, 但是人們... 嗯, 大部分的人來自中產階級。你所看到的這樣的富裕是最近才有的。所以當你是出身於中產階級的, 你對教育的第一個重點就是教育是一個能讓你致富的方法, 或者能提高你的財富階級。所以經濟上的利益是你對教育的期盼。所以你左看看右看看發現 IIT(India Institute of Technology) 是你可以押的寶。所以最好的學生參加競爭激烈的考試, 通過考試進入 IIT, 他們得到學位, 表現得很好, 他們之中最好的, 去美國拿一個博士或碩士學位, 然後在矽谷工作。有一些當到公司的高層管理。有一些人到印度, 我並沒有說他們不會回來。但是, 我想說的是最好的人沒有回印度做基礎科學研究。當然有例外, 有一些人。但是那一點點的例外不足以填滿教育下一代所需的大學教職。所以如果政府明天希望在印度辦二十個嶄新而且棒極了的大學, 教職員哪裡來呢?

劉: 那是一個很慢的過程。

V: 需要兩代或三代來的時間來建立。

劉: 似乎已經開始發生了。

V: 它會發生的! 我確定它會發生, 因為美國的經濟沒辦法來養活這些人。(笑) 美國的經濟也許正在走下坡, 除非政府改變政策而且負責任地做事。國家的負債以兆在成長。現在的領導階層不用償還。但是子孫們會付出代價!

劉: (笑) 好。這問題比數學問題更難。

V: 我剛剛說的是有一些力量吸引人讓人想回印度。這就是我要說的。

劉: 是啊。認為有必要背十六十六乘法表的文化終究是可以的。(笑)

黃: 我剛剛在想, 因為你才得到 Abel 獎, 有了影響力, 你是否可以跟印度的首相談談, 試著去影響一些事?

V: 不, 我不會。

姜: 或許在 Chennai。

黃: 你可以做一些事情。

V: 不, 不, 或許我可以做一些局部的事情。他們會要求我去當一些委員會的成員等等, 而我願意盡我微薄的力量。如果他們願意, 他們可以採納我的建議, 不然他們也可以忽略它。(笑) 就以遊說美國關於核子計劃的簡單議題來說好了。很清楚地, 能源對印度將是很重要的, 你不能預期成長率是像我們現在一般。他們說每年要讓一百萬台車上路。(笑) 當然, 有很多人有人有車, 也有很多人沒有車, 沒車的人也想要有車的人有的特權。而且如果經濟上, 他們付得起, 誰能阻止他們? 應該是由政府來決定有核子反應爐, 發展核能是好的嗎? 你必須要很小心。但是我認為那是每一個國家都要面對的另一個選擇。法國做這件事已經很久了。不知道台灣是否也是如此?

劉: 嗯, 有很多爭論。但我認為很多人覺得那是唯一的一條路。

V: 對, 對。你負擔不起能源不足的損失, 否則你不過是很辛苦的工作把錢拱手送給別人。

姜: 杜拜。

V: 俄國這幾年也是。但是另一方面, 印度政治體系中掌權的是聯合政府, 而左翼也在。左翼份子就是印度共產黨。他們想超越毛澤東。(笑)

劉: 那不可能的。(笑)

V: 所以他們依然堅持印度與美國聯手是不可行的。他們拒絕讓政府談判, 所以我認為這個計畫會告吹。他們在乎印度即將面臨的能源問題嗎? 不, 他們不在乎。他們在乎的不過是他們的意識形態。而他們想要保持他們的意識形態。所以他們會去告訴國會議員說他們擊敗異教的美國從中介入, 然後他們會拿到選票, 並且當選連任。那就是他們所關心的, 從頭到尾都是這樣的心態。除非這個改變了, 否則只靠經濟的成長並不能根本地改變結果。有些人會發財而且過的很好, 但是那實質上沒有解決問題。

姜：這和台灣很不一樣。如果你拿了 Abel 獎，你就可以直接和總統談了。

黃：你是指行政院長吧，因為...

V：不，好吧，那些人都不錯。首相立刻發了一封賀電給我。那裡面... 你知道的，說些好聽的話，“下次你回印度，...”等等，但是也就只有這樣。(笑)

劉：就某種意義上來看，他們是有一些考量的。經營一個國家不是一件簡單的事。

V：是，是。當然，當然！

劉：就那方面而言，台灣也是如此。他們會對你很有禮貌，把你的想法納入考量，但是...

V：到頭來他們還是得做他們必須要做的事。

劉：台灣也是如此。不過，尊重知識份子，無論結果為何，或者無論事情到最後變得怎樣，是一回事，而對知識份子的尊重就在那兒，尊重知識分子，我認為那是可貴的。

V：有個看法是，既然現在中產階級富有了，他們付的起了，或許你可以要求外國到印度辦私立大學。但是我認為會有很多反對的聲浪。他們不想見到文化的帝國主義。

劉：我瞭解。

V：嗯，我想這個問題到頭來還是會被解決的，對吧？會有足夠的需求給... 我認為那會發生，因為印度的工業，資訊科技產業等等，還依賴西方的研發，他們對從中取得原型很在行的，也能做一些事。但錢不是從那裡賺的。真正賺錢的是專利。那需要自己的研發，否則你不過是個賺血汗錢的工廠。我認為大家了解這個的重要性。所以有些實業家也開始有他們自己的研發實驗室。隨著這樣的風氣開始盛行，他們會開始要求人們為他們而工作。然後政府會回應：「喔喔，你需要更多生物學家，好，那我們來訓練生物學家好了。」此時，你不能只訓練四個頂尖的專家來做研究，因為 要有四百個科學家才會產生四個頂尖研究人才。但是，有四百個科學家卻沒有那麼多工作！沒有工作他們就不會加入了，這就是我們現在所處的階段。所以我認為第一件事就是一般企業一定要有科學家的需求，然後基礎科學的進展就會實現了。

劉：研發先決條件是研究，對吧？謝謝你，我了解你對社會的各層面都非常的關心。真好！希望你常常回來台灣。

V：謝謝！

—本文訪問者劉太平、黃啓瑞、姜祖恕任職於中央研究院數學所，尤釋賢任教於新加坡大學，整理者焦源鳴、陳與庭、黃建豪為中央研究院數學所助理—