

### 3201 (黃光明先生提供)

喜歡做問題的朋友一定聽過「假錢問題」。有一堆銅錢其中包括一些假錢，假錢的重量和真錢不同（有時規定假錢較輕）。分別真錢和假錢的工具通常是一個有兩個盤的天平。把兩堆錢分放在兩個盤裏，天平會指出何者較重或兩個一樣重。問題是最少要在天平上秤幾次才能找出所有的假錢（次數當然和銅錢及假錢的數目有關）。羣試問題非常相似，也是有一堆外觀完全一樣的物品，其中有好的，有壞的。和假錢問題不同的是分出好壞的辦法。這裏我們假設有一個機器，把任何一羣物品（數目任意）放進機器裏，機器會指出其中有無壞品，但不告訴你有多少壞品或那幾個是壞品。這樣的機器在現實生活裏有沒有呢？很多！譬如物品是燈泡，機器是一個有許多插頭的線圈，把  $n$  個燈泡插入  $n$  個插頭裏，祇要有一個燈泡是壞的，則線路不通，一個燈泡也不會亮。但如燈泡亮了，則表示每個都是好的，一次試驗就通過了  $n$  個燈泡。又如物品是某種液體（如血液）的標本，我們要檢查那些標本裏含有毒菌。如果我們相信祇有很少的標本是有毒的，則可以取每個標本的一半，把  $n$  個標本的一半混在一起檢查，如果檢查無菌，則一次試驗代替了  $n$  次。再如物品是密封瓶裝氣體，機器是一個可放進許多瓶的盒子，且盒子裏的空氣通過一試管，如果有一瓶在漏氣，則試管即可察覺。其它類似的例子還很多。我們要考慮的問題是如何以最少的試驗來找出全部的壞品。

讓  $G(n, m)$  代表當已知物品數為  $n$ ，且其中含正好  $m$  個壞品時所需最少的試驗數目。則  $G(n, 1)$  很

## 68 數學傳播 [問題類]

顯然是  $\lceil \log_2 n \rceil$ ，此處  $\lceil x \rceil$  代表最小但不小於  $x$  的一個整數。但下列這些問題都還不知道答案。

1.  $G(n, 2) = ?$

2.  $G(n, k+1) > G(n, k)$  for every  $k$

3. 讓  $G(n, m)$  代表當已知物品數為  $n$ 。且其中最多含  $m$  個壞品時所需最少的試驗數目。我猜測下列兩個關係可能有一個是對的。

$$G(n, \bar{m}) \leq G(n, m) + 1$$

或

$$G(n-1, \bar{m}) \leq G(n, m)$$

但沒有證明。

這些問題屬於「研究」問題，即到現在為止沒有人知道答案，所以不會太容易，但做出來的話可以發表文章。本來研究問題是不適合介紹給「數學傳播」的讀者的，但是由我自己做羣試問題的經驗，知道解這類問題不需要深厚的數學知識，也不需要應用什麼定理，通常演繹法是最主要的工具，（就像假錢問題及其它很多組合學上的問題一樣）。像我最近做出了問題了的一個特例（將發表在 *SIAM JOURNAL APPLIED MATHEMATICS*），就絕對沒有用到任何高中以上的數學。但是這也不是說這類問題很容易做，因為不然別人早就做掉了。我想「圍棋」是最好的譬喻，所需知道的規則非常簡單，誰都可以來下，但也因為沒有規則，可能有不知從何着手的感覺。這時就要靠天馬行空的思路加上運氣好時的靈機一動。

我不期望任何讀者在短時期內給任何一題完善的解答。但如有好的想法，我願意在徵答結束後，繼續和他（她）一同研究以期有所成。