

試評 95 年指考——數甲與數乙

朱啓台

「均勻分布」的迷思

分析一份試題，首先要確認如何將題目作分類，分類的方式有很多種，最常見的有命題出處（章節）、認知層次（記憶、理解、應用、分析、綜合、評鑑）、題型（單選、多選、填充、計算證明）、難易度。

在評量理論上，命題之前應該要先設計一份藍圖，稱之為「雙向細目表」，雙向代表兩種基本的分類方式，一個是出處，一個是認知層次。將每個題目的兩個屬性列成一張表，就可以看出全部試題的分布狀況。

均勻分布不一定是理想的分布，要看測驗的目的為何，因應不同的測驗目標，分布狀況應有所調整（例如奧林匹亞競賽全部都是難題）。不同的人對測驗的期待也有所不同，因此，分布狀況好或不好會因人而異。

就大學入學考試而言，有些高中老師希望試題分布均勻，不要讓用功的學生白忙一場，或讓猜題者有投機取巧的空間。但大學教授從學術的高觀點鳥瞰下來，數學的國度本來就是有高山、有溪谷，怎麼可能全部都是平原呢？

此外，就像寫文章一樣，一份試卷理應呈現命題者的品味與喜好，除非他刻意壓抑自己。當我們到餐廳點菜時，要忍耐著不點自己喜歡吃的東西，可能比較容易，要勉強點自己不喜歡的東西，就很困難了。不論大學教授怎麼自我壓抑，不太可能出現連他自己都不能認同的東西。

這就是為什麼從大學觀點看高中數學並非只是數學家的理想，對高中老師和學生都具有實質幫助。畢竟，在高中生進入大學的關卡，大學教授才是守門人，不了解守門人，就不容易進門。只可惜了解大學數學的門檻似乎高了一些，猜題對高中老師來說仍然是一項困難的挑戰。

因此，大部分的老師在未來一定還會繼續以「均勻分布」為學生請命，而大部分的教授則會繼續「我行我素」，或者在可以忍受的範圍內營造「均勻分布」的假象。

談完「均勻分布」的迷思之後，讓我們重新歸零到試題分類的問題。

概念、程序、解題能力

就數學試題而言，大考中心將其依認知層次分成3類：概念、程序、解題能力，這樣的分類方式比起「記憶、理解、應用、分析、綜合、評鑑」來得合適多了。

「概念」的意思是掌握住精神，大致上能做是非判斷即可，通常出現在選擇題。例如今年（95年）數學甲多選第5題的前3個選項：

利用旋轉平移，有沒有可能將 $y = x^2$ 變換成這些形式：

$$y = 2x^2, \quad y = -x^2, \quad x = y^2 ?$$

又如數學乙多選題第7題的第2個選項，只要知道標準差是在描述資料離散的程度，從散布圖的邊界大致呈現一個壓扁的橢圓看來， X 資料的標準差應該較大。

「程序」的意思是熟悉操作技術，通常要透過填充甚至計算證明的題型才能檢驗出來。例如今年數學乙非選擇題第二題，大家一看就知道是線性規劃，命題者也不怕被考生發現，因為，如果不熟悉線性規劃的解題程序也是枉然。

特別值得一提的是數學乙單選題第3題：

空間中有3個向量， \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ，若 $\vec{a} + \vec{b} + r\vec{c}$ 是零向量， r 不可能是哪一個？（選項有 $-\sqrt{2}$, 0 , 1 , π , 10^{100} ）

這很像在幫人洗刷冤屈，有5個嫌疑犯。反證法是辯護律師最常用的「程序」，以第2個選項為例，要證明0是清白的，就先假設0有罪，於是 $\vec{a} + \vec{b} + 0\vec{c}$ 會是零向量，於是 $\vec{a} + \vec{b}$ 是零向量，但這是不可能的，因為稍微計算一下就曉得 $\vec{a} + \vec{b} = (1, 2, 1)$ 。

再加上這個題目是單選題，不可能有第2個答案，所以0必然是唯一的答案。這個題目算是考驗「反證法」解題程序的好題目。

「解題能力」也就是應用能力。這類考題應該是一個從未看過的問題，乍看之下完全不曉得該援用什麼概念或方法（如果有些學生曾經看別人解過，隱約還記得怎麼解題，這個題目當然就考不出這些學生的解題能力）。

這類考題希望學生能有耐性或勇氣，試著去敲敲它、拍拍它，從它發出的聲音當中漸漸地、或突然靈機一動地找出解題關鍵。

今年的數學乙有很多題目都帶有「解題能力」的味道，但只是味道。因為一口咬下去，很快就能發現解題之鑰。這些題目只考驗出面對陌生問題的勇氣，距離處理陌生問題的能力與耐性還有一段距離。

例如多選第5題，題目給定一個集合：二進位制5位數，並在這個集合上定義一個稱為「距離」的運算，作法是：逐一比對兩個元素的每一位元，若有 n 個位元的數字不同，就稱這兩個元素的「距離」是 n ，例如， $d(10010, 01011) = 3$ 。然後問了一些有關這個數學結構的問題。

這個問題的題幹很有大學數學的味道，但本質上只是智力測驗，幾乎不需要任何高中數學的工具，有自信的國中生與小學生應該也能處理。

倒是數學甲選填題 D 更適合歸類到「解題能力」——雖然題目已給了提示，讓我們一看就知道這個題目在考遞迴。

題目的大意是這樣：

箱子裡有 9 個球，編號 1-9，從中取球，取後放回，取 n 次球（好比擲骰子 n 次，而這個骰子有 9 面），計算所得數字的總和為偶數的機率。

好奇是解決問題的動力，而好奇源自於觀察，為了培養對這個問題的好奇，可能要先觀察擲 1, 2, 3... 次骰子的狀況，事實上，筆者就是做到 $n = 2$ 的時候，聽到地上發出聲響，原來是解題的鑰匙從天上掉下來了。

了解「概念、程序、解題能力」的涵意之後，我們還要澄清一點，這三者並不必然與「易、中、難」平行，事實上，難易度決定於考試的結果，是一個量化的數字，代表考生通過考驗的比例，而「概念、程序、解題能力」則是對問題本質的一個描述。

「學而不思則罔，思而不學則殆」

現在，我們終於可以從雙向細目表的觀點來檢視今年數甲與數乙這兩份試卷。數甲偏重程序性的問題，數乙則偏重解題能力。數甲涵蓋的數學知識較為豐富而均勻，數乙則較為貧乏而不均（在此，豐富與否、均勻與否都不帶任何褒貶之意，只是描述一個現象，如人飲水，冷暖自知。）

這樣的結果應該與大考中心刻意引導，以及與命題教授尊重雇主有關。自然組學生跨考社會組的現象，一直引起各界對社會組學生不公的爭議，如何保障這些數學弱勢團體呢？

「減少知識點的涵蓋面積，增加解題能力的佔比」顯然是一項可行的策略，因為，自然組學生的數學優勢主要表現在更豐富的數學知識、更純熟的操作技術，想要減少這些優勢的發揮空間，自然要特別強調「活學活用」的能力了。

最後，大考雖然以選才為目的，我們非常希望為教學現場帶來正面、積極的引導。從這個觀點來看，這次考試是很有價值的。

數學甲重視程序性問題，意謂著求穩定，基本功不可忽視。數學乙重視解題能力，意謂著多給學生思考的空間，不要拿一堆「人造問題」來壓垮學生，所謂的「人造問題」好比是元宵節的燈謎、腦筋急轉彎，與之相對的是「自然問題」，好比風從哪裡來、水往哪裡去。

我們的教學現場一直不缺磨練基本功的人造問題，數學甲在此宣告「基本盤」的重要性，應該是針對數學乙積極鼓吹「思考力」而來。知識是實的，思考是虛的，兩者本來就應該相輔相成，但數學教學現場一直呈現失衡的局面，呈現「學而不思則罔」的局面。

老實說，數學乙不是沒有可能引起「思而不學則殆」的負面效應，但短期內不可能，鐘擺距離那個端點還太遠，現階段應該持續強調「解題能力」的重要性。誠如前面說的，考驗解題能力的問題不一定是難題，它的目的更不是難倒孩子，而是提醒孩子，趕快設法培養解題能力。

只要大學入學考試持續肯定「解題能力」，就能引導教學現場往這個方向來努力，當然，這對教學現場的老師可能是一項挑戰，我們也懷疑創意思考是否會有一套標準的訓練方法，但我們至少應該先確認這是我們努力的目標，我們至少應該先跨出努力的第一步，否則，數學學習將永遠無法從「學而不思則罔」的夢魘中醒來。

附註

以下列出本文所提及的試題原貌，至於完整試卷可於大考中心網站下載，網址為：
<http://www.ceec.edu.tw/AppointExam/AppointExamPaper/95ApExamPaper.htm>

大學入學考試中心 95 學年度指定科目考試試題 (數學甲):

多選題:

5. 在坐標平面上以 Γ 表示拋物線 $y = x^2$ 的圖形。試問以下哪些方程式的圖形可以由 Γ 經適當的平移或旋轉得到？
- (1) $y = 2x^2$
 - (2) $y = -x^2$
 - (3) $x = y^2$
 - (4) $y = x^2 + 4x + 3$
 - (5) $(x + y) = (x - y)^2$

選填題:

- D. 不透明箱內有編號分別為 1 至 9 的九個球，每次隨機取出一個，記錄其編號後放回箱內；以 $P(n)$ 表示前 n 次取球的編號之總和為偶數的機率。已知存在常數 r, s 使得 $P(n+1) = r + sP(n)$ 對任意正整數 n 都成立，則 $r = \frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，
 $s = \frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{\textcircled{22}}$ 。(化成最簡分數)

大學入學考試中心 95 學年度指定科目考試試題 (數學乙):

單選題:

3. 假設 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是空間中三個向量， r 是一個實數。已知 $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$ 且 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 滿足 $\vec{a} + \vec{b} + r\vec{c} = \vec{0}$ ，那麼 r 不可能等於下列哪一個數值：
- (1) $-\sqrt{2}$
 - (2) 0
 - (3) 1
 - (4) π (圓周率)
 - (5) 10^{100}

多選題:

5. 一個「訊息」是由一串5個數字排列組成，且每位數字都只能是0或1，例如10010與01011就是兩個不同的訊息。兩個訊息的「距離」定義為此兩組數字串相對應位置中，數字不同的位置數。例如，數字串10010與01011在第1, 2及5三個位置不同，所以訊息10010與01011的距離為3。

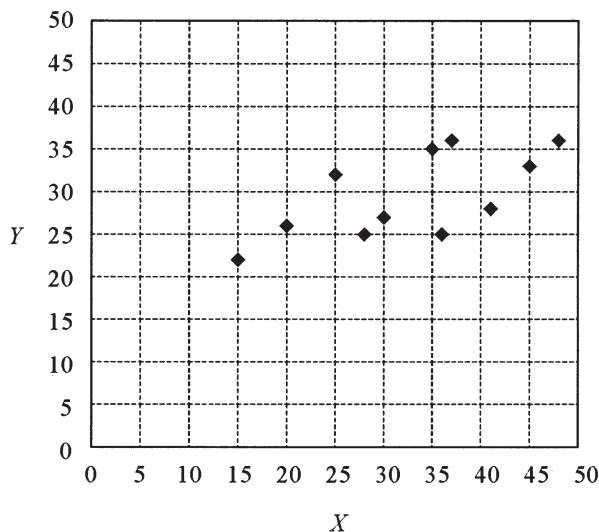
試問以下哪些選項是正確的？

- (1) 與訊息10010相距最遠的訊息為11101
- (2) 任兩訊息之間的最大可能距離是4
- (3) 與訊息10010相距為1的訊息恰有5個
- (4) 與訊息10010相距為2的訊息恰有9個

7. 某次數學測驗分為選擇題與非選擇題兩部分。下列的散佈圖中每個點 (X, Y) 分別代表一位學生於此兩部分的得分，其中 X 表該生選擇題的得分， Y 表該生非選擇題的得分。設

$$Z = X + Y$$

為各生在該測驗的總分。共有11位學生的得分數據。



試問以下哪些選項是正確的？

- (1) X 的中位數 $>$ Y 的中位數
- (2) X 的標準差 $>$ Y 的標準差
- (3) X 的全距 $>$ Y 的全距
- (4) Z 的中位數 = X 的中位數 + Y 的中位數

非選擇題:

二、為預防禽流感，營養師吩咐雞場主人每天必須從飼料中提供至少 84 單位的營養素 A、至少 72 單位的營養素 B 和至少 60 單位的營養素 C 給他的雞群。這三種營養素可由兩種飼料中獲得，且知第一種飼料每公斤售價 5 元並含有 7 單位的營養素 A，3 單位的營養素 B 與 3 單位的營養素 C；第二種飼料每公斤售價 4 元並含有 2 單位的營養素 A，6 單位的營養素 B 與 2 單位的營養素 C。

- (1) 若雞場主人每天使用 x 公斤的第一種飼料與 y 公斤的第二種飼料就能符合營養師吩咐，則除了 $x \geq 0, y \geq 0$ 兩個條件外，寫下 x, y 必須滿足的不等式組。 (3分)
- (2) 若雞場主人想以最少的飼料成本來達到雞群的營養要求，則 x, y 的值為何？最少的飼料成本又是多少？ (10分)

—本文作者現任職於高中數學學科中心—