

本期演練試題

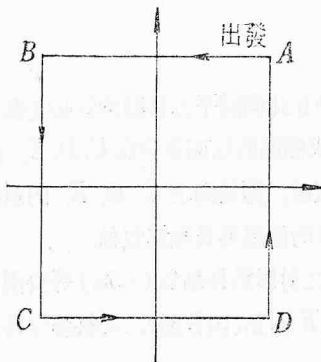
應用數學測驗

羅添壽 設計

【說明】

1. 命題動機：培養學生閱讀能力。訓練學生思考與分析之能力，避免有死讀數學之現象。
2. 命題對象：高二、高三及大一學生。（高一學生選您能研習之試題研習之。）
3. 此份資料為配合高中生之學習，以培養興趣為原則，故盼望各位同學大膽的研習，當然高中教師亦可當參考資料。

1. (週期函數；單選) 下圖是一邊為4之正方形 $ABCD$ ，其周上之點 $P(x, y)$ ，由 A 點出發向左轉動，設動點 P 從 A 出發所行距離為 t ，則點 P 之縱坐標 y 是 t 之函數，求該函數之週期
(A)10 (B)12 (C)13 (D)16 (E)以上皆非

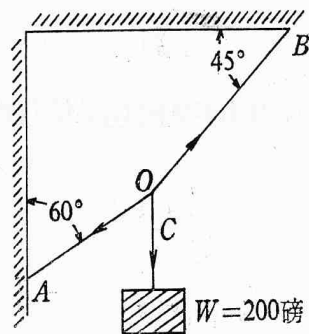


2. (極值之應用，二次函數求極值；單選) 某商店賣某貨品，每天可賣1000件，每件可賺4元，根據以往經驗，若每一件少賺1角，則每天可多賣100件，現在設每件應減價 x 角時，每天可賺最多的錢 y 元，則 $x =$
(A)15 (B)20 (C)25 (D)10 (E)7.5角
3. (極值之應用；單選) 承上題， y 等於
(A)6200元 (B)6250元 (C)65200元 (D)625000元 (E)6520元
4. (二次函數求極值；多選) 一個農夫養100隻豬，假定每隻現重200斤，每隻豬每天長5斤(連續地長)，又

知道現在市場價格每斤豬肉30元，而每天每斤跌5角，要等 n 天後，售出的最大利潤比今天出售可多賺 m 元，則 m, n 值為

- (A) $n = 8$ (B) $n = 25$ (C) $m = 8000$ (D) $m = 4000$
(E) $m = 16000$

5. (向量在物理上之應用；多選) 如下圖所示，若懸掛之重量為200磅，求每支繩索之張力，圖中 $|\vec{OB}|$ 表 B 繩之張力， $|\vec{OA}|$ 表 A 繩之張力。
(A) $|\vec{OA}| = 200(\sqrt{3} + 1)$ 磅
(B) $|\vec{OA}| = 200(\sqrt{3} - 1)$ 磅
(C) $|\vec{OB}| = 100\sqrt{2}(3 + \sqrt{3})$ 磅
(D) $|\vec{OB}| = 100\sqrt{2}(3 - \sqrt{3})$ 磅
(E) $|\vec{OB}| > |\vec{OA}|$



6. (向量在物理上之應用) 輪船向正南方向航行，每時25公里，風由西南方向吹來，每時18公里，求輪船煙肉冒

出之煙與正北方向所成的夾角大小。

註：此題為東華本第四冊自然組 p. 15 習題 1-2 第 10 題，因所有參考書均把解法寫錯，故特舉之為例。

7. (矩陣之應用；多選) 假設某一公司分有二大部門：國內部及國外部。又已知二部門之總售量如下表：

產品與單位		I (\$1)	II (\$2)	III (\$3)
部	門			
國	內	58	26	8
國	外	52	58	12

(i) 問下列何矩陣乘法可算出該公司在國內部及國外部的總售價

(A) $\begin{bmatrix} 58 & 26 & 8 \\ 52 & 58 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 52 & 26 & 12 \\ 58 & 58 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 58 & 26 & 8 \\ 52 & 58 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(ii) 國內部與國外部之總售價之和為

- (D) 338 (E) 328

8. (函數之應用；單選) 已知 $\sqrt{2} = 1.414 \dots$ 對自然數 m ，取有理數 n/m ，使 $n/m < \sqrt{2} < (n+1)/m$ ，將這時所相應的 n 稱為 $f(m)$ ，這樣我們界定了一個函數 $f: N \rightarrow N$ ，其中 N 為自然數系，試問下列何命題正確：
 (A) $f(4) = 6$ (B) $f(m)$ 是遞增數列
 (C) f 是 m 的一次函數 (D) $f(16) = 23$ (E) 以上皆非

註：此題為教育部(64)年高中數學成就測驗之試題，其命題動機在以閱讀及思考並重之下命題，是好題目，筆者摘錄供各位參考、研習。

9. (二次函數與極值之應用；多選) 設線段 \overline{AB} 的長是 a ，在 \overline{AB} 上任取一點 P ，以線段 \overline{AP} 及 \overline{PB} 為一邊各作一正方形，若欲使這兩個正方形面積和為最小 m 時， P 點之位置該距 A 點之長為 x ，則
 (A) $x = a/3$ (B) $x > a/3$ (C) $m = 1/2a^2$ (D) $m > a^2$
 (E) $1/2a^2 \leq m \leq a^2$

10. (二次函數與極值之應用；題組測驗；多選) 一直角三角形之周界為 2，面積為 S ，兩股長為 a, b 。

(i) a, b 為下列何方程式之二根？

(A) $x^2 - (S-1)x - 2S = 0$

(B) $x^2 - (S+1)x + 2S = 0$ (C) $x^2 - (S+1)x + S = 0$

(ii) S 之極值為 (D) $3 + 2\sqrt{2}$ (E) $3 - 2\sqrt{2}$

11. (坐標幾何；多選) 甲、乙、丙三人從同一地點出發，甲以每小時 3 公里之速度向北方走，乙以每小時 4 公里之速度向東北方走，丙以每小時 5 公里之速度向東方走。一小時後甲、乙、丙三人分別在 A, B, C 三點，問下列何者真確？

(A) $\triangle ABC$ 之面積為 $(16\sqrt{2} - 15)/2$

(B) $\triangle ABC$ 之面積為 $2/3$

(C) $BC = 9$ (D) $BC = \sqrt{41 - 20\sqrt{2}}$ (E) $BC = \sqrt{5}$

12. (坐標幾何與不等式之應用；多選) 在二維座標平面之第一象限內 ($x > 0, y > 0$)，直線 $y = ax$ ($a > 0$) 與雙曲線 $xy = 1$ 之交點設為 P ，而座標原點為 O ，求使距離 OP 成爲最小時之 a 值，並求此時之 OP 之長度

(A) $a = 1/2$ (B) $a = 1$ (C) $OP = \sqrt{2}$ (D) $OP = \sqrt{3}$

(E) $OP = 2$

13. (面積、體積與極值；多選) 設體積恆爲一定值 V 之各種長方體，其表面積記爲 S ，則

(A) S 之極小值爲 $6\sqrt[3]{V}$ (B) S 之極小值爲 $6\sqrt[3]{V^2}$

(C) S 之極小值爲 $6\sqrt[3]{V^2}$

(D) 當此長方體之長、寬、高相等時， S 極小。

(E) 當長、寬、高不相等時， S 極小。

14. (二次方程式之應用；單選) 一中空方陣共五層，最外層每邊 20 人，改排成三個實心方陣每邊幾人？

- (A) 5 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 6

提示：(1) 實心方陣每邊 x 人共有 x^2 人

(2) n 層中空方陣，最外層每邊 x 人，則有 $x^2 - (x-2n)^2$ 人

15. (無窮等比級數之應用；多選) 等腰直角三角形 OAP_1 的兩股長 $OA = AP_1 = 1$ ，以斜邊 $\overline{OP_1}$ 爲一股作等腰直角三角形 OP_1P_2 ，又以斜邊 $\overline{OP_2}$ 爲一股作等腰直角三角形 OP_2P_3 ，再以 $\overline{OP_3}$ 爲一股作等腰直角三角形... 如此繼續操作；則

(A) 各斜邊之長 OP_1, OP_2, OP_3, \dots 成等比數列

(B) 各斜邊之長 OP_1, OP_2, OP_3, \dots 成等差數列

(C) 斜邊 $\overline{OP_{10}}$ 之長爲無理數

(D) $OP_1 + OP_2 + \dots + OP_{10} = 31(2 + \sqrt{2})$

(E) $\triangle OP_{45}P_{50}$ 之面積的度量爲 2^{18}

16. (解析幾何與極限之應用；閱讀測驗；單選) 如下圖，爲了估計由曲線 $y = x^2$ ，垂直線 $x = 1$ 及 x 軸所圍成區域的面積 S ，可採下列方法行之：把 x 軸自 0 到 1 這一線段等分成 n 段，

$$0 = x_0 < \frac{1}{n} = x_1 < \frac{2}{n} = x_2 < \dots < \frac{n}{n} = 1,$$

82 數學傳播 [問題類]

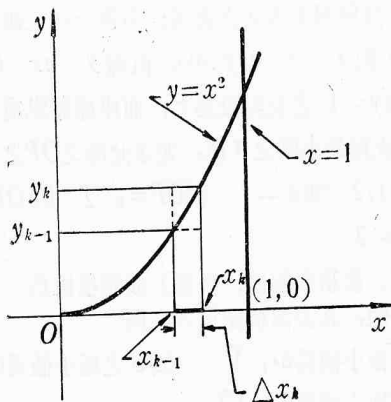
即 $x_k = k/n$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$), 令

$$y_k = x_k^2, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

其中 $k=0, 1, 2, \dots, n$, 則分割之小塊矩形和為 $s_n = \sum_{k=1}^n$

$y_{k-1} \cdot \Delta x_k$ 及 $S_n = \sum_{k=1}^n y_k \cdot \Delta x_k$ 可知 $s_n < S < S_n$, 但當 $n \rightarrow \infty$ 時, $s_n \rightarrow S$ $S_n \rightarrow S$ 。據此方法可求得 $S =$
(A)1/2 (B)1/3 (C)1/4 (D)2/5 (E)以上皆非

提示: 三數列 $\{s_n\}$, $\{S\}$, $\{S_n\}$, 若 $s_n < S < S_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \alpha$, 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} S = \alpha$ 。



17. (解析幾何與三角函數之應用; 單選) 空間中一三角形之三頂點落在球 S 上, 且球心在此三角形所在之平面上, 若此三角形的一角為 45° , 且其對邊之長為 4, 則此球

之體積為

(A) 12π (B) $36\sqrt{3}\pi$ (C) $24\sqrt{3}\pi$ (D) $32\sqrt{2}\pi$

(E) $64\sqrt{2}\pi/3$

18. (一次方程式及其應用; 多選) 某工廠招考技術員, 考試分智力測驗, 口試及技能測驗三項, 今有甲、乙、丙三應考人員, 其成績如下表:

項目 \ 應考人	甲	乙	丙
智力測驗 (P)	72	86	78
口試 (Q)	82	76	78
技能測驗 (R)	86	74	80
平均成績 (A)	81	78	79

因廠方重視三項分數之情形不同, 對平均成績之計算法, 採用以 x 乘 P , y 乘 Q , z 乘 R 後, 再以 $x+y+z$ 除此諸積之和, 而得其平均成績 A , 即 $(xP+yQ+zM)/(x+y+z) = A$, 則

(A) $x:y:z=3:2:5$ (B) $x:y:z=4:3:5$

(C) 若 $x+y+z=1$, 則 $x=3/10$, $y=1/5$, $z=1/2$

(D) 若 $x+y+z=1$, 則 $x=1/5$, $y=3/10$, $z=1/2$

(E) 若 $x+y+z=1$, 則 $x=3/10$, $y=1/2$, $z=1/2$

(作者現為新化高中數學教師)