

天羅地網CANTOR 集

陳怡全

在動力系統導論課中, 實數線上的 tent map 參數族

$$T_a(x) = \begin{cases} ax & \text{if } x \leq 1/2 \\ a(1-x) & \text{if } x \geq 1/2, \end{cases} \quad (1)$$

是最簡單同時也最先學習到展現混沌現象的例子之一。令 Λ_a 代表 T_a 所有有界軌跡的點所成的集合, 則我們在課堂中也學到 Λ_3 是頂頂有名的 middle-third Cantor 集。事實上, 由相同的方法可證明當 a 大於2時 Λ_a 也都還是一 Cantor 集。我們也知道, 當 a 大於2時 tent map 的有界軌跡與擲銅板所可能產生的正反面序列有一對一的關係。也就是說, Λ_a 是一對一對應於全部的0與1的序列所構成的集合。令此集合為 Σ , 即

$$\Sigma := \left\{ \mathbf{s} \mid \mathbf{s} = \{s_0, s_1, \dots\}, s_n = 0 \text{ or } 1 \right\}.$$

進一步地, 如果賦給 Σ 予 product topology, 則從拓樸的觀點來看, 這一對一的關係可是同胚的 (homeomorphic) 關係, 而且 T_a 的有界軌跡的動力行為是共軛於一柏努利過程 (Bernoulli process)。(以上事實可參閱 [2, 4, 5, 6, 8].) 所以當參數 a 大於2, 看起來 tent map 的有界軌跡已不會有什麼新鮮有趣的事了。然而對於一個再自然不過的問題: 集合 Λ_a 如何隨參數 a 變化? 尤其是當 a 逼近 2 或逼近無限大時? 似乎尚沒有任何文獻曾探討過。由於好奇心驅使, 本文試著去一窺究竟。

首先, 我們簡要地從一不同的角度來看 Λ_a 這個集合和上述已知的結果。就如同 Λ_3 可表示成係數為 0 或 2 的三進位:

$$\Lambda_3 = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot s_n}{3^{n+1}} : s_n = 0 \text{ or } 1 \right\},$$

我們可將 Λ_a 展開成下列的形式

$$\Lambda_a = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} s_n (a-1) a^{-n-1} : s_n = 0 \text{ or } 1 \right\}. \quad (2)$$

利用上式, 對任一給定序列 $\mathbf{s} = \{s_0, s_1, s_2, \dots\}$, 我們可決定 Λ_a 上的一點 x 。再將之代入 (1) 式, 很容易地就能得到

$$T_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{s}_n (a-1) a^{-n-1},$$

其中

$$\tilde{s}_n = \begin{cases} s_{n+1} & \text{if } s_0 = 0 \\ 1 - s_{n+1} & \text{if } s_0 = 1. \end{cases}$$

因為 $\{\tilde{s}_n\}$ 還是由 0 與 1 所組成的序列, 所以 $T_a(x)$ 也屬於 Λ_a , 也就是說 Λ_a 是 T_a 的不變集 (invariant set)。相反地, 給定 Λ_a 上的一點 x 我們可找到一 0 與 1 的序列 $\{s_0, s_1, s_2, \dots\}$ (稱之為編碼) 使得

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (a-1) a^{-n-1}.$$

單單藉由比較大小, 我們可輕易證明此編碼是唯一的。從比較動力系統的眼光來看, 這是因為 x 是位於區間 $[0, 1/2)$ 內若且唯若 x 的編碼是從 0 開始, 而 x 是位於區間 $(1/2, 1]$ 若且唯若 x 的編碼是從 1 開始。所以由 x 可決定 s_0 , 由 $T_a(x)$ 可決定 s_1 , 由 $T_a^2(x)$ 可決定 s_2 等等。由此唯一性我們知道, Λ_a 的元素與 Σ 的元素是一對一的關係。因 $a > 2$ 時, 因 $T_a^k(1/2) \rightarrow -\infty$ 當 $k \rightarrow \infty$, 所以 $T^n(1/2) \notin \Lambda_a \forall n \geq 0$ 。

假設點 x 的編碼為 $\{s_0, s_1, \dots\}$, 而另一點 \hat{x} 的編碼為 $\{\hat{s}_0, \hat{s}_1, \dots\}$ 。由於 tent map 是連續的, 我們知道如果 x 很靠近 \hat{x} , 則存在足夠大之自然數 N 使得

$$s_n = \hat{s}_n \quad \forall 0 \leq n < N,$$

反之亦然。所以從系統之動力行為, 我們知道 Λ_a 與 Σ 間元素一對一的關係可以是同胚關係。的確, 對 Σ 上的兩個點 \mathbf{s} 和 $\hat{\mathbf{s}}$, 我們可考慮以下之度量 (metric)

$$d(\mathbf{s}, \hat{\mathbf{s}}) = \sum_{n=0}^{\infty} |s_n - \hat{s}_n| (a-1) a^{-n-1}.$$

由此度量所得的拓樸為 product topology。也因此拓樸, Λ_a 和 Σ 間一對一的關係則變成同胚關係。我們知道在此拓樸中 Σ 是個 Cantor 集。因為 Cantor 集的同胚還是 Cantor 集, 所以 Λ_a 是一 Cantor 集。

標準之幾何方法以建構 middle- α Cantor 集 \mathcal{C}_α ($0 < \alpha < 1$) 如下: 從 $[0, 1]$ 區間挖掉中間寬度為 α 的開區間, 然後對剩下的左右兩個寬度為 $(1-\alpha)/2$ 的閉子區間 I_0, I_1 再挖走其中間比例為 α 的部分, 然後再對剩下的四個寬度為 $(1-\alpha)^2/2^2$ 的閉子區間 $I_{00}, I_{01}, I_{10},$

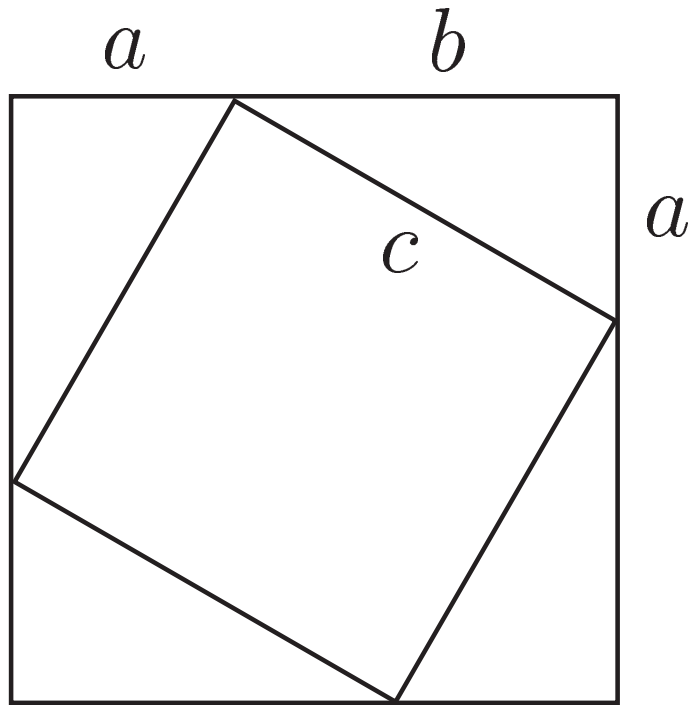
I_{11} 再挖走其中間比例為 α 的部分。而後無限次地重複執行。假設 j_1, j_2, \dots, j_n 為 0 或 1, 令 $I_{j_1 j_2 \dots j_n}$ 為一產生於第 n 個步驟寬度為 $(1 - \alpha)^n / 2^n$ 的閉子區間, 則我們知道

$$C_\alpha = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{j_1, \dots, j_N=0,1} I_{j_1 \dots j_N}.$$

想知道集合 Λ_a 是如何隨參數 a 變化的, 我們可利用關係式 (2) 將 Λ_a 對參數 a 做圖。但為方便起見我們令

$$\alpha = 1 - 2/a, \quad (3)$$

而做集合 C_α 的圖。(小記: $\Lambda_a \equiv C_{1-2/a}$.) 圖 1 為作圖的結果, 當中縱座標為 α , 橫座標代表 x 。對給定之 α , C_α 在圖中是用 C_α 的 256 個點的子集來做近似。這 256 點為



圖一. middle- α Cantor 集

$$\left\{ \sum_{n=0}^{N-1} s_n \frac{1 + \alpha}{2} \left(\frac{1 - \alpha}{2} \right)^n + s_N \left(\frac{1 - \alpha}{2} \right)^N : s_n = 0 \text{ or } 1 \forall n = 0, \dots, N \right\} \quad (4)$$

其中 $N = 7$, 也就是編碼為 $\{s_0, s_1, \dots, s_6, \bar{0}\}$ 或 $\{s_0, s_1, \dots, s_6, \bar{1}\}$ 的那 256 個點, 又其中 $\bar{0}$ 及 $\bar{1}$ 表示無限多重複的 0 和 1。在前述的標準幾何建構 Cantor 集方法裏, 這 256 個點乃是集合 $\bigcap_{N=1}^7 \bigcup_{j_1, \dots, j_N=0,1} I_{j_1 \dots j_N}$ 的邊界集。

C_α 於 $\alpha \rightarrow 0$ 或 $\alpha \rightarrow 1$ 這兩個極限的情形 (對應於 $a \rightarrow 2$ 或 $a \rightarrow \infty$), 是我們所特別關心的。似乎很顯然地 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_\alpha = [0, 1]$, 而 $\lim_{\alpha \rightarrow 1} C_\alpha = \{0\} \cup \{1\}$ 。這相當符合我們的幾何上直覺, 因為於這兩個極限下, 在“建構” C_α 時要不是全部的介於 0 和 1 之間的“middle”點都被挖走, 或就是沒有任何的點被挖掉。事實的確是如此, 我們能證明此結果。另一特別是當 α 為 0 且 $N = \infty$ 時, (4) 式代表所有在 0 和 1 之間實數的二進位表示式。

讓我們從動力系統來理解這兩個極限。當 α 趨近 1 時, tent map 趨近奇異極限 (singular limit) $a \rightarrow \infty$ 。在 $[0, 1]$ 區間內, 任意與邊界點 $\{0\}$ 或 $\{1\}$ 距離 $1/a$ 外的起始點皆會被

迭代至負無限大。從式 (1) 我們能預期當 a 愈來愈大時, T_a 的有界軌跡的點必定要愈來愈靠近 $\{0\}$ 或 $\{1\}$ 。在動力系統中, 我們稱此奇異極限為反可積分極限(anti-integrable limit) [1, 3, 7]。利用反可積分理論, 我們可嚴格證明 $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \mathcal{C}_\alpha = \{0\} \cup \{1\}$ (以及 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{C}_\alpha = [0, 1]$), 並且系統的動力行為在反可積分極限時不是別的, 就是在 $\{0\}$ 和 $\{1\}$ 這兩個“符號”上的符號動力系統(symbolic dynamical system)。基本上, 此理論是說假使令 $T_a(x_n) = x_{n+1}$, $x_n \in \mathbb{R}$, 則由 (3) 得知 $\{x_n\}$, $n \geq 0$, 是 T_a 的軌跡若且唯若

$$(1 - \alpha)x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & \text{if } x_n \leq 1/2 \\ 2(1 - x_n) & \text{if } x_n \geq 1/2. \end{cases}$$

當然上式的 $\alpha < 1$ 。但我們可考慮極限 $\alpha \rightarrow 1^-$ 的情形。當 $\alpha = 1$ 時, 對每個 n 我們得到 x_n 等於 0 或 1。然而 x_n 的值是 0 或 1 並不能決定 x_{n+1} 的值為何, 話雖如此, 但如果給定一 0 與 1 所組成之序列 $\{x_n\}$, 則很自然地我們有 $x_{n+1} = \sigma(\{x_n\})_n$, 其中 σ 即為 Bernoulli shift。更進一步地, 可以將 tent map 改寫成一在 l_∞ 空間上的映射

$$F : l_\infty \times (-\infty, 1] \rightarrow l_\infty, \\ (\mathbf{x}, \alpha) \mapsto F(\mathbf{x}, \alpha) = \{F_0(\mathbf{x}, \alpha), F_1(\mathbf{x}, \alpha), F_2(\mathbf{x}, \alpha), \dots\}$$

其中 $l_\infty := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}, x_n \in \mathbb{R}, \text{ 有界}\}$,

$$F_n(\mathbf{x}, \alpha) = \begin{cases} 2x_n + (\alpha - 1)x_{n+1} & \text{if } x_n \leq 1/2 \\ 2(1 - x_n) + (\alpha - 1)x_{n+1} & \text{if } x_n \geq 1/2. \end{cases}$$

我們很容易可以推得一個 \mathbf{x} 是 tent map 之有界軌跡若且唯若 $F(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{0}$, 以及 $F(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{0}$ 若且唯若 $\mathbf{x} \in \Sigma$ 。很容易地也可以檢驗 F 於 $\{\mathbf{x} \mid x_n \neq 1/2 \forall n\}$ 時是 C^∞ , 其在 \mathbf{x} 的導數為一線性映射

$$L : l_\infty \rightarrow l_\infty, \quad \boldsymbol{\xi} \mapsto \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} D_{x_m} F_n(\mathbf{x}, \alpha) \xi_m \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

表示成矩陣的形式則為

$$L\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 2t_0 & \alpha - 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2t_1 & \alpha - 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2t_2 & \alpha - 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 2t_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

其中 $t_n = 1$ 當 $x_n < 1/2$, $t_n = -1$ 當 $x_n > 1/2$ 。因此當 $\alpha = 1$ 時, L 是可逆的。再根據隱函數定理我們能夠得到當 α 小於 1 但非常靠近 1 時 (即 a 非常大時) T_a 的所有有界軌跡。如何利用反可積分理論去探討 $0 < \alpha < 1$ 的動力行爲, 以及證明這些用隱函數定理所得到的軌跡形成一 Cantor 集, 已非是本文主題, 有興趣的讀者可參閱 [3]。

當 α 等於 0 時, 我們知道整個 $[0, 1]$ 閉區間是 T_2 的不變集 [4, 5, 6, 8]。這是因為對於任何大於或等於 2 的自然數 N , 序列 $\{s_0, \dots, s_{N-2}, 1, \bar{0}\}$ 與序列 $\{s_0, \dots, s_{N-2}, 0, \bar{1}\}$ 代表相同的一個點。因此可知有些點有相同的編碼。事實上有可數地無限多個如此的點, 因為如此的點的編碼必然是 $\{s_0, \dots, s_{N-2}, 1, \bar{0}\}$ 或 $\{s_0, \dots, s_{N-2}, 0, \bar{1}\}$ 。所以不變集 \mathcal{C}_α 的拓撲, 在 α 等於 0 時改變, 特別是所有從 $[0, 1]$ 區間起始的軌跡都變成有界的。這表明 tent map T_a 在 a 等於 2 時有分歧 (bifurcation) 發生。當 α 非 0 時, 在建構 Cantor 集 $\mathcal{C}_\alpha (\equiv \Lambda_{2/(1-\alpha)})$ 時, 對每個自然數 N , 我們持續地在剩餘的子閉區間 $I_{j_1 \dots j_N}$ 中挖掉其比例為 α 的中間部分, 而在每個 $I_{j_1 \dots j_N}$ 造成一寬度為 $\alpha(1-\alpha)^N/2^N$ 的洞“hole”, 即

$$\text{hole} = I_{j_1 \dots j_N} \setminus (I_{j_1 \dots j_N 0} \cup I_{j_1 \dots j_N 1}).$$

因為這樣的理由, 我們或可稱此分歧現象為 Cantor 集的“hole-annihilation”。

發揮想像力, 試想所有 α 介於 0 和 1 間的 Cantor 集 \mathcal{C}_α , 於參數 α 和實數空間所形成的聯集, 會不會是從蒼穹中撒下來的天羅地網呢?

參考文獻

1. S. Aubry and G. Abramovici (1990). Chaotic trajectories in the standard map: the concept of anti-integrability. *Physica D* **43**, 199-219.
2. J. Banks and V. Dragan (1994). Smale's horseshoe map via ternary numbers. *SIAM Rev.* **36**, 265-271.
3. Y.-C. Chen (2005). Bernoulli shift for second order recurrence relations near the anti-integrable limit. *Discrete Contin. Dyn. Syst. B* **5**, 587-598.
4. R. L. Devaney (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd ed., Addison-Wesley.
5. S. N. Elaydi (2000). *Discrete Chaos*, Chapman & Hall/CRC.
6. D. Gulick (1992). *Encounters with Chaos*, McGraw-Hill.
7. R. S. MacKay and J. D. Meiss (1992). Cantori for symplectic maps near the anti-integrable limit. *Nonlinearity* **5**, 149-160.
8. R. C. Robinson (2004). *An Introduction to Dynamical Systems - Continuous and Discrete*, Pearson Education.