

從美國「數學戰爭」看台灣的數學教育

劉柏宏

台灣近一兩年來社會各界對九年一貫課程有頗多的爭議，尤其是建構式數學的教學理念更引起大學數學教授與家長的關心與擔憂。建構主義 (constructivism) 強調推理能力的養成與學生自我建構知識，其中教師的角色已不是知識的傳遞者，而是協助學生建構知識的引導者。數學教學的重點不再是計算能力的養成而是強調概念理解，因此教材的內容不若以往具有操作深度。數學家與家長擔心教材的淺化將同時弱化學生數理能力，甚至更進一步影響未來其個人生涯發展與國家的競爭力。有鑑於此，中華民國數學學會便緊急向教育部建議暫緩「九年一貫數學科目暫行綱要」付諸實施，並另行邀集一些關心這個議題的大學數學教授重新審議暫行綱要的內容。如今中華民國數學學會已於九十二年十二月二十日的年會中公佈「九年一貫數學科目綱要」，並預計九十四學年度開始實施，屆時台灣的數學教育也將再度進入另一個新階段。回顧這兩年台灣社會各界對數學課程的爭議，其實與美國過去十年發生的所謂「數學戰爭」(Math Wars) 有頗多相似之處。他山之石可以攻錯，由於台灣數學教育的理論與實務走向深受美國的影響，本文嘗試從美國「數學戰爭」的發展背景原因與過程，擷取能引以為鑑部份，希望能大致勾勒出台灣數學教育未來可以發展的方向。

「數學戰爭」的背景

鑒於美國中小學生在一些國際數學評比的排名低落，1989年美國數學教師協會 NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) 公布中小學的《學校數學課程與評量標準》(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)，試圖為二十一世紀的美國數學教育規劃出宏偉藍圖。這波數學課程改革的走向深受當時新興的知識建構論的影響，教學過程強調學生才是學習的主體，唯有學生從自身經驗中所建構出的知識，才能有助於培養其解決問題的能力，才是有意義的學習。而這次 NCTM 所提出的標準可說是「數學戰爭」的起因。由於 NCTM 的改革觀點獲得數學教育學者的迴響與認同，美國國家科學基金會 NSF (National Science Foundation) 也大力贊助了十五項基於 NCTM 觀點的研究計劃案，於

是各州政府教育部門紛紛以此標準做為該州之數學課程綱要。然而，這時卻也有許多家長與團體紛紛提出質疑。他們發現接受新課程後，學生的基本計算能力似乎出了問題。而此波爭議的引爆點則是從加州的內戰開始 (Wu, 2000)。加州於1992年就以 NCTM 公布的《學校數學課程與評量標準》為基礎訂定加州公立學校數學課程綱要《Mathematical Framework for California Public School》。然而由於內容偏重教學法卻忽略數學知識內容而招致許多批評，於是修改課程綱要的呼聲又起。加州立法當局於是組織一個加州學術標準委員會 (California Academic Standards Commission) 負責制定一套新的數學課程綱要。經過一年多的時間，於1997年十月加州學術標準委員會向加州教育評議會 (California State Board of Education) 提出新的數學課程標準，並交由一群專業數學家預審。然而，這些專業數學家卻無法認同新課程標準的內容。其主要理由是學術標準委員會的課程綱要過份強調概念理解卻嚴重忽略學生數學計算能力的養成，而且內容充滿許多錯誤的數學概念，課程綱要編寫者本身對數學的瞭解程度顯然有問題，因此其內容也就不足以作為加州學生數學成就的指標。這些嚴厲的批評促使加州教育評議會重新任命一個由 Stanford 大學數學教授組成的小組修訂新課程。約兩個月後再次修訂的新課程標準 (The California Mathematics Academic Content Standards for Grades K-12) 出爐，正式取代原先由學術標準委員會所提出的數學課程標準。新課程標準公佈後自然引起原先贊同 NCTM 課程改革理念的數學教育學者的批評。

1997年十二月十四號紐約時報以“加州數學標準強調技巧重於分析” (In Math Standards, California Stresses Skills Over Analysis) 為標題，報導反對由 Stanford 數學家所主導的數學課程標準的意見。反對者的意見主要是憂心加州新數學課程標準將走向 1960 年代一樣是由數學家所主導的“新數學” (New Math) 的老路。“新數學”的興起主要是因為 1957 年蘇聯發射全世界第一枚人造衛星後，美國大為震驚，要求改革數學與科學教育的呼聲四起，因而產生了 60 年代著名的“新數學”運動。只是“新數學”過份強調數學結構與抽象，造成學生相當大的學習障礙，也使大部分的教師與家長都苦不堪言。由於加州公立學校學生比例約佔全美國的八分之一，當加州新課程標準定案後，對其他各州的數學課程也產生相當程度的影響，許多專業數學家也紛紛提出類似主張。而數學教育學者基於上述歷史性的擔憂，也開始設法阻止這股在他們眼中視為“復辟”勢力的擴散。1999年十月初美國教育部贊助十個以 NCTM 標準為架構的課程開發案，並宣稱這些課程開發案是“可供模範”並且是“極有希望的” (exemplary and promising)。眼見事情發展至此，兩百多位以專業數學家與科學家為首的大學教授 (包括七位諾貝爾獎與兩位費爾茲獎得主) 發表一封致教育部長 Richard Riley 的公開信，表達反對意見，並為代數計算的重要性做辯護，希望教育部能重視這些反對的意見。至此，加州內戰已逐漸蔓延成為美國全國性的所謂「數學戰爭」。

NCTM 的課程改革觀點與專業數學家的批評

在「新數學」課程改革失敗之後，70年代美國數學教育又興起所謂的「回歸基礎」(Back to Basics) 運動，強調反覆演練以熟練各種數學的基本計算。只是，美國學生在80年代的國際數學評比的排名低落，證明數學教育改革的方向再次錯誤。於是自70年代末開始關於「問題解決」(problem solving) 的研究獲得重視，美國數學教育界開始強調學生思考與解題能力的培養，教學重點從“知識本位”移轉到“能力本位”。1989年 NCTM 公布的《學校數學課程與評量標準》就是基於這種信念下的產物。

然而專業數學家卻認為不能輕忽數學運算的重要性，因為如果缺乏足夠的運思練習，要達到真正的概念理解是不可能的 (Schmid, 2000)。況且學習數學運算的目的並非只是單一的。在1999年致教育部長 Richard Riley 的公開信中，領銜署名的數學家引用《Notices》(美國數學學會, American Mathematical Society, 刊物) 1998年二月號中的一篇文章所說的：

我們想要強調的是標準的算術演算並不只是‘得到答案的方法’——也就是說，它們不僅具有實務上，也具有理論上的重要性。譬如說，所有的算術演算都是代數的先備知識，因為... 數字算術與多項式算術有頗多相似之處。

2000年一月四日華爾街日報一篇社論也將 NCTM 的課程改革與60年代的「新數學」相提並論，批評兩者都把紙筆計算鄙視為只是一種機械式訓練。社論中強調，貶低計算的結果將關閉學生學習代數的大門，也將關閉學生畢業後成為工程師與科學家的大門。NCTM 的改革課程的一個特色是重視學生小組討論，透過同儕溝通以發展自我解題策略，教室氣氛也因此變得活潑，數學不再只是死板版的運算過程。然而如同1997年8月25日《時代雜誌》的一篇文章所說的：突然數學變成好玩的遊戲，可是孩子真的學到任何東西嗎？(Suddenly, math becomes fun and games. But are the kids really learning anything?)。

面對這樣的質疑，數學教育學者便舉出一些研究成果以證明經歷過 NCTM 改革課程的學生，其數學分析與思考能力確實有所進步。只是如此的舉證非但無法說服反對陣營，卻換來更嚴厲的鞭撻。賓州大學數學系教授 Herbert Wilf (Wilf, 1998) 對數學教育學者經常引用的論文進行嚴格的檢驗。首先是 Wood 與 Sellers 所寫的“Assessment of a problem-centered mathematics program: third grade.” (Wood and Sellers, 1996)。Wood 與 Sellers 在文章一開始便引用三篇論文的研究成果作為他們的理論基礎。Wood 與 Sellers 宣稱這三項研究發現在改革課程班的學生其數學成就確實高於傳統班級的學生。Herbert Wilf 於是進而審閱這三篇論文。在審閱 Cobb 等人 (Cobb, Wood, Yackell and Nichols, 1991) 的研究報告時發現改革課程班的老師都是“志願參加的”。也就是說這些老師基本上可能比較願意接受改變並學習新事物。至於傳統班級的授課老師可能就比較保守，吝於激勵學生，所以兩者的數學成就的差異可能

來自於“老師”這個變數，而非課程。Wilf 審閱的第二篇文章是 Carpenter 等人所著的“Using knowledge of children’s mathematics thinking in classroom teaching: an experimental study” (Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang and Loaf, 1989)。Carpenter 等人的研究設計中教師之分配為隨機，並無類似 Cobb 等人的瑕疵，然其結果顯示實驗組與控制組學生數學成就只有少部份差異，大部份結果並不顯著，因此 Wood 與 Sellers 引用這篇研究成果作為他們的理論基礎就顯得不適當。Herbert Wilf 隨後審閱第三篇文章“Instructional tasks, classroom discourse, and students’ learning in second-grade arithmetic.” (Hiebert and Wierne, 1993)。Hiebert 和 Wierne 在文中結論提到教與學兩者間的關係是教學環境的一個函數，並無明白指出實驗組與控制組學生有何顯著差異。換句話說其結論也是相當模糊，而 Cobb 等人顯然過度引申其研究結論。緊接著 Wilf 將焦點對準於1980年代研究「問題解決」相當著名，加州柏克萊大學的 Alan Schoenfeld 身上。在 Schoenfeld 於1985年所出版的一本收錄其歷年研究的專書中，有一篇文章 (Schoenfeld, 1985) 比較兩班大學學生經歷一學期不同型態的數學課程後其問題解決能力的差別。研究結論指出，選讀「問題解決技巧」課程的學生其學期末之解題能力確實優於選讀另一們傳統數學課程的學生。Wilf則批評學生之所以選讀不同課程，代表他們原先的數學興趣與傾向可能就有所差異，所以學期末之成就差異未必來自於教材教法的不同。最後 Wilf 針貶近年教育學界相當普遍的個案研究 (case study)，這次他批判的文章是“The influence of semantic content on algorithmic behavior” (Davis and McKnight, 1980)。Davis 和 McKnight為瞭解小學生無法順利完成算術運算的原因，與一位小學生晤談並要求她盡量說出其運算推理的步驟，以探求學生思考上的可能盲點。在文章中 Davis 和 McKnight 花了27頁的篇幅詳述與學生晤談的過程，只是在 Wilf 眼中只有一個樣本的研究怎能算是研究？再者，Wilf 認為 Davis 和 McKnight 文章中的結論——學生往往無法將在某學科所學的知識與技巧應用到另一學科上——只要稍具經驗的老師都可以體會得到，並不具任何新意，需要花27頁的篇幅敘述嗎？因此這種文章只能算是人與人之間的討論 (human-to-human essay)，根本無法登上「學術之門」。Wilf 更直稱這種文章是“雙盲研究” (double-blind studies)，無法做為支持改革課程的證據。他認為到目前為止在數學教育研究方面尚未出現任何一篇真正有價值的論文。

另一位賓州州立大學數學系教授 George Andrew 在一篇網路文章中 (<http://www.math.upenn.edu/~wilf>) 也批評現今之數學教育研究缺乏嚴謹的實驗設計，例如實驗組與控制組的分配往往並非隨機，而缺少這項基本條件，任何實驗結果都是無定論的。Andrew (2001) 甚至對所謂「量」與「質」的研究法是否真能解決複雜的教育問題存疑。他認為教育問題是一種發散性問題 (divergent problem)。收斂性問題 (convergent problem) 是只要按既定程序即可逐步解決，得到答案；然而對於發散性問題，你越想以合乎邏輯的方式去釐清它，它的答案卻

可能越趨於兩極。因此將所有現象化約為數字的「量」的研究顯然不適合處理教育問題；至於「質」的研究似乎是一個比較可行的方式，可是如何區分出真正「質」的研究與一般的敘述討論 (descriptive discussion)，Andrew認為有實質上的困難。

面對這些關於教育理念與研究成果的質疑，改革課程的觀點顯然遭遇強烈的挑戰。不過一些數學教育學者此時也挺身而出，為文辯護自身立場。

數學教育學者對專業數學家批評的回應

專業數學家對 NCTM 改革課程的批評主要在於其理念的謬誤與未經嚴謹的研究實驗即付諸實施。關於第一點，聖地牙哥州立大學名譽教授 Judith Sowder (Sowder, 1998) 認為數學戰爭雙方最主要的爭議點為究竟是須具備純熟的數學運算練習才能引出真正概念理解，或者是須先理解數學概念才能進行有意義的數學運算。Sowder根據心理學理論 (Hatana, 1988) 指出基本上專業知識分為兩種：一種是程序型專業知識 (routine expertise)，一種是適調型專業知識 (adaptive expertise)。程序型專業知識可藉由不斷的反覆操作與練習得到，在某些方面這樣的數學訓練是必要的。而適調型專業知識則需要瞭解基本原理，與如何適當地調整所具備的知識以適合新問題的限制條件。反對改革課程的團體顯然強調訓練程序型專業知識的重要，贊成改革課程的團體則重視適調型專業知識的培養。她舉一例以說明兩種專業知識在數學解題的應用：

Fred和 Frank 一起從 A 地出發到 B 地，Fred 有一半的路用跑的，一半的路用走的；而 Frank 有一半的時間用跑的，一半的時間用走的。假設兩人走的速度與跑的速度都一樣，誰會先到達終點？

Sowder曾將這個題目交給一些修讀中學數學教育學程的學生作答，她發現一部份學生立即運用其程序型專業知識處理：設定變數，列出方程式，解方程式。而另一部份學生則先思考問題的重點，並進行下列推理：Fred 有一半的路用跑的，一半的路用走的，他跑的時間比走的時間短。而 Frank 有一半的時間用跑的，一半的時間用走的，他跑的時間比 Fred 長，因此 Frank 會先到達終點。這就是適調型專業知識的運用。Sowder 認為雙方陣營的理念差異就有如行為學派與認知學派對數學學習有不同的觀點一般。

此外，堪薩斯大學數學系教授 Judith Roitman 則持一種比較平衡的立場，認為反對 NCTM 改革課程的團體對於改革課程的理念有許多誤解 (Roitman, 1999)。Roitman是一位積極參與數學教育的數學家，深知雙方陣營所堅持的原則。她以一些例子反駁許多人對於 NCTM 課程“不重視傳統計算”、“貶低證明的角色”、“鼓勵小組討論卻忽略個人學習”等等的指控，尤其對於大眾對建構主義信念的錯誤解讀提出說明。建構主義經常被誤解為主張學生應該自己發展出

解題策略，老師不宜過度介入。實際上，Roitman 認為建構主義並不排斥老師的授課，它主要是一種知識論的信念，認為知識是主動建構的結果，而非被動接受的產物。建構主義所主張的信念雖然有其教育上的價值，卻經常被膚淺地解讀成一種教學法。再者，建構主義有許多哲學概念上的分支（如強調個體學習的 radical constructivism 與重視互動學習的 social constructivism），也經常為外界所混淆。另外一方面 Roitman 也指出專業數學家雖反對 NCTM 課程，並不表示他們反改革。相反地，許多數學家也投入 K-12 的課程改革運動（如 Project SEED），他們只是認為只要善用直接教學法的技巧，仍可幫助學生瞭解高等數學的概念。總之，Roitman 認為根本不存在所謂的數學戰爭，這完全是由於誤解與泛政治化的結果。

前美國數學協會 (MAA) 會長 Lynn Arthur Steen 以其本身也從事數學教育研究的經驗指出，大部份數學家雖自認為本身是數學的教育者與研究者，卻不怎麼重視這兩個領域的交集—數學教育研究 (Steen, 1999)。他之所以這樣認為是因為數學家雖然關心數學教育卻鮮少運用邏輯敏銳度去評價“教”與“學”，也不去閱讀教育研究文獻。因此許多數學教育研究者認為只因研究方法並不符合傳統科學的規範，他們的領域始終被這保守的老頑固 (a conservative old guard) 所歧視。Steen 指出數學家們總認為除非數學教育研究能產生一套理論來解釋所觀察到的教學現象，否則就無法與其他科學領域平起平坐。不過他強調教育問題的社會與文化因素：某些數學教育理論或許對某個地區產生相當大的影響，但對另一個地區來說可能一文不值。因此對於數學教育問題的看法與研究方法的分歧不僅存在於數學家與數學教育學者之間，更存在於數學教育學者之間。

尋求平衡觀點

針對「數學戰爭」雙方陣營的批評與辯駁，尤其是兩邊的基本教義派的互相攻擊，許多人憂心不僅無法解決問題，甚至更加劇問題的嚴重性。因此尋求一個能夠「熄火」的共識便成為許多中庸派學者追求的目標。綜合一些意見，本文在此提出三點看法以顯現出「數學戰爭」雙方觀點歧異之所在。

一. 對建構主義的認知衝突

建構主義之形成有其哲學上複雜的歷史因素，在此不予討論。而其在教育理論的應用（特別是科學教育與數學教育）則於 80 年代蔚為風尚，至今已發展出許多派別，不再是一個單純的概念。不同的名詞其主張可能相當近似；反之，相同的名稱卻也可能隱含不同的意義。不過取各家之共同論述，建構主義可以說是一種「認識理論」(a theory of knowing, van Glaserfeld, 1993) 或稱為一種「知識理論」(a theory of knowledge, Bettencourt, 1993)。它主張知識源於人類對外界事物的一種認知建構過程；它不否認一個真實世界的存在，但由於人類認知無法脫

離自身經驗，因此對知識模式之真理性抱持懷疑態度。建構主義者認為任何人類所建構之知識體系，無論其如何完美地解釋自然現象，充其量也只是一個“可存活的理論”(a viable theory, 有點物競天擇的味道)，並非絕對的真理。將此理念架構運用於學校教育，老師與學生的角色就必須從傳統文化認知當中跳脫出來。學生從知識的被動接收者變成知識的主動建構者；老師從以往的知識傳遞者變成協助學生建構知識的引導者。如此一來，不僅學生必須學習如何建構知識，老師也必須學習如何引導學生建構知識，教室溝通由單向的“接發模式”轉化為雙向的“回饋模式”。這樣看來，建構主義對數學教學，甚至其他學科之學習，應該有正面的意義，為何會引發如此大之風暴？其癥結在於部份數學教育學者將本應為一種「認識理論」的建構主義直接看成一種「學習理論」(a theory of learning)；錯將「認識論」(epistemology) 當成「教學論」(pedagogy)。於是各種宣稱基於建構主義理念所發展出來的課程教材與教法紛紛出籠，學校教師按照教學指引，亦步亦趨，課程改革的種子點燃了，然而真正的建構主義理念卻也被模糊化了。而其中最被反對「改革課程」陣營所批評的就是部份極端建構主義者大大地弱化教師知識傳遞的功能，認為教師應當儘量減少干預，讓學生自身建構數學知識。去年底在臺灣師範大學所舉辦的一場國際科學與數學教育研討會中，美國賓州州立大學的 Martin Simon 教授所舉的一個例子最能傳達極端建構主義者的這種想法：试想邀請兩個從未學棋的學童比賽下棋，如果我們只告訴他們遊戲規則，卻不教導其下棋策略，當兩人對奕一段時間之後，兩人會不會各自發展出贏棋策略？答案當然是肯定的。然而這樣的例子是否可以套用在數學學習上呢？這顯然是「數學戰爭」雙方陣營認知衝突之所在。Martin Simon 教授本身也可說是一個建構主義理念的支持者，然而他可能也看出這樣的危險性，所以演講中強調建構主義是“a theory of knowing”，不能單純地把它當做“a theory of learning”。部份極端建構主義者的過度引申與擴大解讀，反可能被譏為“浪漫建構主義者”(romantic constructivist)。

二. 對教育研究的認知衝突

前面所提到數學家對數學教育研究的批評有兩個重點：(1) 實驗設計不當；(2) 敘述性論文根本不算是科學研究。前者主要是針對「量」的研究，後者則係指「質」的研究。早期的教育方面的研究相當程度受到當時盛行的實證主義(positivism) 影響。實證主義者承認客觀實體的存在，看似混沌的個體現象必定存在某種群體一致性，而在經過嚴謹的觀察與歸納後這種一致性便可獲得澄清。任何知識體系若無法提出一套方法論以達到上述目標，其所獲得的結論便不能被歸類為科學知識。為擠身所謂「科學」之林，與自然科學平起平坐，社會科學家便引進統計方法將觀察現象量化，以顯現出群體的一致性。只是這種自然科學家所習以為常的研究典範卻無法解決複雜的社會現象，用於教育問題的研究也是大有問題。密蘇里大學教授 Robert Reys (Reys, 2001) 就指出教育研究殊異於一般的科學研究，例如教科書的測試就不同於藥物測試。

測試藥物時只要控制好實驗室中的獨立變數，並仔細觀察依賴變數的反應就可以知道藥物的成效。然而試教教科書時研究者如何能完全控制過程中的獨立變數？老師的引導方法、學生的學習情緒、學校的整體學習氣氛等等變因都可能影響學生學習成果。因此，儘管實驗設計再怎麼嚴謹，教科書的確切成效如何仍然只是實驗者對證據接受程度的一種信念問題 (Sowder, 2000)。另一方面，教育研究近年受後現代主義 (postmodernism) 與建構主義哲學的影響，已不再堅持教育研究的客觀性與普遍性，轉而主張任何有關社會現象的研究都是主觀的，端視研究者所處的觀察角度與所持的理論觀點而定。因此闡述性的「質」的研究興起，個案探討漸蔚為風氣。只是這樣的研究方法論本質上的轉移不僅在教育界頗受爭議 (Constas, 1998)，更難見容於自然科學家。在自然科學家眼中這些根本只是意見論述，完全稱不上研究。這種研究方法的認知衝突類似 Snow 所說的「兩種文化」不但存在自然科學家與人文學者之間，近年也存在自然科學家與社會學家之間。

事實上，長期以來教育研究的實用性也飽受批評 (Kaestle, 1993; Sroufe, 1997)，這些指責包括：教育研究談太多理論卻無法落實於學校教學；研究主題只是研究者的喜好，並非一般大眾或決策者所關心的主題；即使研究主題符合大眾與決策者的期待，其研究品質不佳，或研究範圍不夠廣泛，或結論模糊而不堪為決策者所用等等。當然教育研究者不必承擔以上所有的責任，但面對指責卻不能不思考解決之道。為洗刷教育研究背負的惡名，Sroufe (1997) 建議教育研究者必須思考兩個層面的問題：(1) 什麼是教育研究做不到的？(2) 什麼是教育研究沒有做到的？前者是教育研究的原罪，似乎無解。而後者卻是可以經由研究社群、老師、家長、與決策者彼此之間的溝通達成共識。但是有一點值得注意的是當研究主題、對象、與方法都得到一致性的看法時，對研究結論的使用必須謹慎。如前面提到賓州州立大學數學教授 George Andrews 指出，教育問題屬於發散性問題，並非按既定程序進行觀察與實驗即可逐步解決，得到答案。所以進行長期性與重複性觀察研究是必要的，也是目前教育研究最欠缺的。

三. 對數學本質的認知衝突

在人類思想史上對數學本質的探究早自古希臘時代就已展開，不同時代對數學的內在或外在價值一直有不同的解讀。自十七世紀的科學革命後由於科學數學化的成功，數學被認為是人類解開宇宙之謎的一把鑰匙，許多數學家擁抱「柏拉圖主義」，認為經由演繹方式得到的數學知識是不變的真理，數學就是「大自然的語言」。只是隨著抽象數學的高度發展，尤其是非歐幾何學的誕生，「柏拉圖主義」的信念逐漸受到挑戰，因此引發二十世紀上半葉關於數學本質的哲學論戰。在此並不打算討論這場論戰的內容，而是它所帶來的影響。或許這是「數學戰爭」背後最主要的癥結所在。

法國數學家 René Thom 曾指出：“事實上，不管一個人有意或無意，所有的數學教學，即使鮮少一致，皆係基於某種數學哲學”。(In fact, whether one wishes it or not, all mathematical pedagogy, even if scarcely coherent, rests on a philosophy of mathematics.) (Thom 1973, 204頁)。相同地，教育研究者的研究觀點也必然反應其教學信念，因此我們或許可以將 René Thom 的話改為：“事實上，不管一個人有意或無意，所有的數學教育研究，即使鮮少一致，皆係基於某種數學哲學”。那數學家與數學教育學者對數學本質的看法難道會不一樣嗎？事實確是如此。Steen (1999) 即指出數學教育學者心中的數學與數學家心中的數學確實有些不同。另外 Roberta Mura 於1993年與1995年 (Mura, 1993; 1995) 分別研究了103位大學數學教授與51位大學數學教育研究者對數學的定義時發現，雖然在一些根本概念上兩者看法一致，但是相對於大學數學教授，大學數學教育研究者較傾向認為數學是一種歸納式思考，是一種問題解決，是一種尋找模式的科學。而比起大學數學教育研究者，大學數學教授則有相當高的比例 (38.8%) 迴避這個問題。有趣的一點是，沒有任何一位數學教育研究者認為數學是一種真理；相對的，沒有任何一位數學教授認為數學發展會受文化影響。

這種對數學知識看法的分歧不僅僅存在於數學家與數學教育學者之間，當然也存在於數學家之間。前紐約大學數學教授 Richard Courant 和當時年輕的拓樸學者 Herbert Robbins於1941年出版了“數學是什麼？” (What Is Mathematics?) 一書，於序言中 Courant 提到寫這本書的動機是眼見當時的數學教學退化成空虛的解題訓練，數學研究則趨於特殊化與過分強調抽象，完全忽略與其他領域的關聯，所以他出書的目的就在於喚起大家對數學內在本質的重視。然而五十多年後，前美國新墨西哥大學數學教授 Reuben Hersh 也出版了“數學是什麼，真的嗎？” (What Is Mathematics, Really?)，從書名就可以嗅出一點戲謔的味道。在序言中 Hersh 指出 Courant 和 Robbins 的這本經典之作只是“介紹”數學是什麼，卻沒有“說明”它是什麼 (showing what mathematics is, not telling what it is)。換句話說 Courant 和 Robbins 雖然交待了「數學是什麼？」，卻沒交待「什麼是數學？」。所以 Hersh 改從歷史與哲學角度詮釋數學本質，期望能補 Courant 和 Robbins 書中之不足。Hersh 出版這本書其實也具有教育目的，他認為數學教師在教室進行教學活動時必然受到他們數學本質觀的影響，所以問題癥結不在於「什麼是最好的教法？」，而是「數學到底是什麼？」 (The issue, then, is not, What is the best way to teach?, but, What is mathematics really all about?, Hersh, 1986, 13頁)。難怪 Judith Sowder 在評論「數學戰爭」雙方的觀點差異時就直言彼此抱持不同的數學信念、不同的數學學習信念、與不同的研究信念。簡言之，雙方呈現出不同的價值系統 (Judith, 1998)。

美國「數學戰爭」給台灣數學教育的啓示

台灣近幾年對建構式數學的討論與美國「數學戰爭」的某些過程雖不盡相同，但其背後內涵確實有幾分相似之處。不論在數學界或數學教育界，美國的走向都緊緊牽動台灣的發展。美國「數學戰爭」雖已緩和但尚未結束，而台灣的課程爭議也還沒落幕。如果能從其中得到啓示，對數學教育的發展能有所幫助，那這場爭論才有代價，否則犧牲最大的還是學生。以下所提出的建議並無法完全解決台灣數學教育的問題，但卻是從美國「數學戰爭」所得到的反思。

一. 確立台灣數學教育問題的主體性

台灣數學教育研究與實務的潮流走向往往以美國馬首是瞻。當然這不是台灣所獨有的現象，但我們必須體認數學教育問題除了有其普世觀點外（例如數學在人類歷史發展中之特殊價值），也應注意其地域需求。某一國家之熱門話題，對其他國家而言可能不值一顧。盲目地跟隨美國數學教育的品味，對台灣而言一點好處也沒有。舉例而言，建構式數學不強制要求學生背九九乘法就是一個文化錯植的例子。做為一門學科，數學在美國人心目中的角色與地位絕對不同於數學在我們國人心目中的角色與地位，因此對其學習方式也會有不同的策略。計算機等科技在數學學習的應用是當前美國相當熱門的研究題材，許多這方面學者主張只要計算機可以解決的問題，學生就不必花太多力氣在上面，學生應該把時間用在學習創意思考上。個人贊成創意思考的學習是數學教育一個相當重要的目標，但跟背不背九九乘法一點關係也沒有。背九九乘法一點也不影響創意思考的學習。在美國求學時初次聽到班上一位美國同學主張不必背九九乘法的觀點就頗為訝異，後來在一個數學課堂上的經驗更是令我吃驚。一群準備未來進入中小學當數學老師的大學部學生在計算一個兩位數的加法問題時，竟然全部（個人的瞬間印象）拿出計算機計算。在我們看來，這些技能應該都是一個受過教育的人所應有的「基本配備」，對他們而言卻變成了選擇配備。美國大眾數學教育的缺失由此可見一二。

另外建構式數學中的橫式乘法也為許多人所詬病。根據一份研究報告 (Ma, 1999) 指出不僅許多美國小學生不能夠純熟地運用直式乘法，連部份小學老師也無法合理地向學生解釋其原理（為何每完成一列的乘法運算後都須向左移一位），橫式乘法因此發展出來教導學習較遲緩的學生。而在台灣這個方法卻被普遍地傳授與使用，使得許多學生苦不堪言。這就是文化錯植的第二個例子。國內許多關心數學教育的專業數學家即主張，談台灣的數學教育改革時須站在我們本身所具備的制高點上。若僅依量化的成就指標來看，台灣過去的數學教育算是成功的。其中一個重要因素就是因為我們的中小學老師的平均數學素質遠比美國教師優良。然而台灣學童的數學思考能力、創造能力、與學習態度的表現評價一向不高，這點是數學教育改革者可以努力的方向。事實上，建構式數學的引入也是為了解決這部分的問題。只是，前面所提到對建構主義的錯誤認知與使用也發生在台灣的數學教育改革上。除了應瞭解建構主義是一種「認識論」而非

「教學論」且是「a theory of knowing」而非「a theory of learning」之外，也要釐清「建構主義」、「建構教學法」與「建構教材」是相關但並不全然等同的三種概念（翁秉仁，2003）。建構式教法不必然須依附在所謂的建構教材上，而所謂的建構教材也不必然反應了建構主義的精神。教材編撰者與施教者的詮釋方式相當程度地影響學生學習的成效。

由以上論述可知，美國數學教育的改革內容與經驗不必然全部可以當做我們效法的對象。會發生這種情形都在於台灣對於數學教育問題的認識與研究仍缺乏主體性，對自身需求認識不夠深入所致。解決這個問題的方法就有賴於下列三點建議的落實。

二. 提昇數學教育之研究能量

當我們在學習美國數學教育的某些做法的同時，殊不知美國也正在向亞洲國家學習。由於美國中學生在一些國際數學能力評比中表現不佳（如 TIMSS），反之不少亞洲國家如日本、台灣、南韓、新加坡、及香港等地區的中學生數學程度表現名列前茅，促使不少美國數學教育學者好奇於亞洲學生的數學學習方式。但在文獻上，這些學者最經常舉的例子是日本與新加坡，台灣數學教育的成果卻往往被忽略，對於這種現象背後的因素我們不能不深思。個人認為其中之一是因為台灣在數學教育方面的研究能量不足，國際能見度不夠，以至於無法引起國際間的重視。九十一年底國科會科教處所舉辦的「數學教育研究方法研習營」當中，國科會科教處林福來處長即指出，近年向科教處提出的數學教育研究計劃件數有遞減趨勢。雖然國科會計劃申請件數與實際從事研究的情形無法畫上等號，但這個情形仍值得警惕。

再者，在這一波建構式數學的爭議當中，大都只見反對的聲浪，相對之下願意站出來辯護的聲音幾乎微乎其微。這幾年以建構主義之理念框架為基礎的研究案相信不知凡幾，可是這些研究成果卻沒有公開廣為大眾所知，以致於缺少一個理念辯論的空間。所以在台灣可以說只有「數學紛爭」卻不見「數學戰爭」。國內數學教育學界應該在適當時機發表成果，增進社會大眾對相關研究的瞭解，以取得課程改革之理論基礎。一樣是在九十一年底國科會所舉辦的「數學教育研究方法研習營」中，大會邀請的講員英國學者 David Tall 於講演中說了兩次：“I study mathematical thinking, but I am not a mathematics educator.”。會後我問他為何這麼強調這點，他的答案令我頗為吃驚。他說：“Education is a dirty work.”。為什麼？他解釋因為許多教育政策經常只是為配合某些政客的選舉考量，而非從長期的觀點來審視問題，因此教育研究工作花了許多錢，對教育品質的提昇卻沒多大幫助。或許這是英國的情形，那台灣的狀況是否也如此呢？值得所有關心與從事數學教育研究者深思。

三. 加強專業數學家與數學教育學者彼此間的溝通

儘管許多專業數學家也偶而從事數學教育研究，他們所抱持的信念與數學教育學者通常不大一樣。不可諱言，由於這波數學教改的爭議，國內部份數學家與數學教育學者之間存在著有形

與無形的鴻溝。例如國內關心數學教改人士對於建構式數學未經縝密之實驗就倉促實施頗有意見，即使部分數學教育學者提出實驗成果也被批評品質粗糙（劉廣定，2003）。從美國「數學戰爭」的情形可以看出這兩邊對研究問題的看法、研究方法的選擇、與結果的分析經常有不一樣的觀點。造成這種現象的背後因素很多，綜合看來最主要原因是如前面所說的，雙方呈現出不同的價值系統。若雙方仍持續堅持自己的信念，對事情的解決無濟於事。但要立即欣然接受對方的價值觀，更是困難。比較可行的辦法是學著瞭解彼此的信念，透過欣賞與批判的過程找出最大公因數，進而求取雙邊都可以接納的模式。Schoenfeld 是一位受過專業訓練的數學家，同時於1980、1990年代做過不少「問題解決」與「數學思考」方面的研究。雖然他也被捲入「數學戰爭」的炮火，在最新近的一篇文章中（Schoenfeld, 2004），他以兼跨兩個領域的雙重身分表示能夠體會並瞭解「數學戰爭」雙方的核心價值。他積極呼籲雙方應該將彼此的極端理念邊緣化以共同謀求一個理性的中間地帶（a rational middle ground）。在數學教學領域，數學家對數學內容通常有著專業的敏銳直覺，比較知道應該怎麼傳達數學概念。而數學教育學者對學生心理與教室情境則比較能掌握，瞭解學生如何面對並處理數學概念。此二者之專長合則雙贏，分則兩敗俱傷。

數學教育問題真正被當成一門社會科學來研究約莫只有三十幾年的歷史，跟自然科學領域相較，它的發展只能算是還在嬰兒期。況且數學教育是一項下游學術產業，因為它不僅受數學知識本身的影響，數學哲學、教育理論與哲學、認知心理學、與社會學等學術領域的發展也緊緊牽引著它的走向。數學家與數學教育學者都必須正視並接納數學教育研究不成熟的部分，及它對其他學科的依存性，才能真正幫助它茁壯。

四．學校教師的參與

任何教育改革最終都必須透過教師之手完成。然而從這次台灣數學教改爭議中我們可以發現第一線的教師的聲音相當微弱，有時甚至變成代罪羔羊。臺灣國小數學課程在過去二十餘年來經歷了數次的修訂，依各次的修訂重點來看可以分為67年至89年間強調教具使用的數學課程時代、85年至92年間強調知識建構的數學課程時代、與自90年起強調能力培養的數學課程時代（楊美伶，2003）。身為教材使用者的教師角色始終宛如鐘擺般在兩極間擺盪，而教師的無力感來自於外界對其專業能力的認知經常只是在於“教”這部份，並不期待他們對教科書之編撰有更深層的思考與判斷力。因此教科書編撰者只要在教師手冊裡交代其理念架構與演示範例，便期望教師能立即上手。這種“食譜式”的教學模式絕不可能成功。教改背後經常伴隨強烈的社會因素，甚至牽涉知識論本身的變革，如果不能讓老師體認並瞭解到這一點，任何教科書的改編絕無法帶來教學上的改變。因此建立一種如 Kenneth Wilson (Wilson and Davis, 1996) 教授所謂的使用者回饋機制，讓第一線教師的意見能忠實地回饋到教科書編撰者與決策者，這樣教

科書編撰者與決策者方能發現問題，立即解決。然而要達到這個目標絕不是辦幾場公聽會與論壇就可了事。教育主管當局必須放棄官僚指揮心態，傾聽基層的聲音；教科書編撰者應當卸下專家學者的姿態，重視使用者的意見。如此在決策者、教材編撰者、與使用者三方合作下，教改才有成功的可能。

結語

近半世紀以來人類的科學與技術獲得快速長足的進步，然而相對地教育問題卻沒能得到令人滿意的改善，可見其複雜性與不可預期的程度遠比科技研究高。林長壽教授（林長壽，2003）於九十二年第十屆張昭鼎紀念研討會中指出，台灣當前的數學教育危機在於“偏執”，這點適用於“數學紛爭”的雙方。如果爭議的雙方都以其自身觀點與立場檢視對方的缺點卻忽略對方的優點，共識絕不可能達成。台灣的數學教育究竟要往什麼方向前進？數學教育改革在整體課程改革中的定位？誰來主導改革的步驟？改革如何與國際間的研究發展接軌，卻又不失己身優點？傳統式教材與建構式教材兩者是否必然互斥？如何評量學生的數學學習？等等議題都值得贊成與反對雙方深入探討。能否「執其兩端，用其中于民」考驗著彼此的胸襟與智慧。如前所言，國內數學家與數學教育學者之間仍存在著觀念上的差距，Schoenfeld 所謂雙方理性的中間地帶是否真的存在？並且找得到？以目前情形看來似乎有點悲觀，但只要溝通管道建立起來，台灣數學教育的未來應該可以期待。

參考文獻

1. 翁秉仁 (2003). 談建構數學, 數學教育公共論壇, (<http://www.math.ntu.edu.tw/phpbb-2/index.php>).
2. 楊美伶 (2003). 教師如何因應數學課程的變革, 數學教育公共論壇 (<http://www.math.ntu.edu.tw/phpbb-2/index.php>) (原發表於2003年10月1日《國北師教育論壇》)。
3. 劉廣定 (2003). 「數學教育對話」聆後感, 數學教育公共論壇 (<http://www.math.ntu.edu.tw/phpbb-2/index.php>) (原載於《科技報導》255期, 92年3月)。
4. 林長壽 (2003). 台灣當前數學教育的危機, 論文宣讀於「第十屆張昭鼎紀念研討會—科學與教育」。
5. Andrews, G. E.. What do the consumers of educational research think they are getting. <http://www.math.upenn.edu/~wilf>.
6. Andrews, G. E. (2001, March). Review of “Mathematics Education Research: A guide for research mathematicians”, *The American Mathematical Monthly*, 281-285.
7. Bettencourt, A. (1993). The construction of knowledge: A radical constructivist view, In K. Tobin (Ed.), *The practice of constructivism in science education*, (pp.39-50). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
8. Carpenter, T., Fennema, E., Peterson, P., Chiang, C-P. and Loef, M. (1989). Using knowledge of children’s mathematics thinking in classroom teaching: an experimental study. *American Educational Research Journal*, 26, 499-531.
9. Cobb, P., Wood, T. Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B. and Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 3-29.

10. Davis, R. B. and McKnight, C. (1980). The influence of semantic content on algorithmic behavior. *Journal of Mathematical Behavior*, 3(1), 39-89.
11. Glasersfeld, E. V. (1993). Questions and answers about radical constructivism, In K. Tobin (Ed.), *The practice of constructivism in science education*, (pp.23-38). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
12. Hatana, G. (1988). Social and motivational basis for mathematical understanding. In G.B. Saxe and M. Gearhart (Eds.), *Children's mathematics* (pp.55-70). San Francisco: Jossey-Bass.
13. Hiebert, J. and Wierne, D. (1993). Instructional tasks, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American Educational Research Journal*, 30(2), 393-425.
14. Hersh, R. (1986). Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics*, (pp.9-28). Boston: Birkhauser.
15. Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
16. Reys, R. E. (2001). Curricular controversy in the Math Wars: A battle without winners. *Phi Delta Kappan*, 83(3), 255-258.
17. Roitman, J. (1999). Beyond the Math Wars, *Contemporary Issues in Mathematics Education*, 36, 123-134.
18. Schmid, W. (2000). New battles in the Math Wars. <http://www.math.harvard.edu/~schmid/>.
19. Schoenfeld, A (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
20. Schoenfeld, A. (2004). Math Wars. *Educational Policy*, 18(1), 253-286.
21. Sowder, J. (1998). What are the "Math Wars" in California all about? Reasons and Perspectives. <http://mathematicallysane.com>.
22. Steen, L. A. (1999). Theories that Gyre and Gimble in the Wabe. *Journal of Research in Mathematics Education*, 30(2), 235-241.
23. Thom, R. (1973) Modern mathematics: does it exist? In Howson, A.G. (Ed.), *Developments in mathematical education*, Cambridge: CUP, 195-209.
24. Wilf, H. S. (1998). Can there be "research in mathematical education"? <http://www.math.upenn.edu/~wilf/>.
25. Wilson, K and Davis, B. (1996). *Redesigning Education*, Teacher College Press (中譯本: 全是贏家的學校, 天下遠見出版有限公司1997年出版)
26. Wood, T., and Sellers, P. (1996). Assessment of a problem-centered mathematics program: Third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 337-353.
27. Wu, H.-H. (2000). The 1997 mathematics standards war in California. In Sandra Stotsky (Ed.), *What is at stake in the K-12 Standards Wars: A primer for educational policy makers*, NY: Peter Lang Publishers, pp.3-31.

(本文初稿曾於九十二年中華民國數學年會中報告)

—本文作者任教於國立勤益技術學院通識教育中心—