

# 論數學與藝術的關聯<sup>1</sup>

張維忠

摘要：通常人們認為，藝術與數學是人類所創造的風格與本質都迥然不同的兩類文化產品，把數學與藝術聯繫起來可能在許多人看來是天方夜譚。然而，在種種表面上無關甚至完全不同的現象背後，隱匿著藝術與數學極其豐富的普遍意義和極其深刻的美妙聯繫。以數學和音樂、數學與美術為主要背景，揭示了數學與藝術之間的複雜關係，闡述了數學是一種理性的藝術的觀點。

由於人類認識與思維活動追求的是一種普遍的價值存在和具有廣泛意義的真理，數學與藝術都是以研究包括人在內的整個自然界的基本規律和各個組成部分之間的有機聯繫為目標，因此數學與藝術都是物質世界和人類社會中普遍存在的和諧、秩序和統一的體現。這樣，在種種表面上無關甚至完全不同的現象背後，一定隱匿著藝術與數學極其豐富的普遍意義。

## 1. 數學：理性的藝術

通常人們認為，藝術與數學是人類所創造的風格與本質都迥然不同的兩類文化產品。兩者一個處於高度理性化的巔峰，另一個居於情感世界的中心；一個是科學（自然科學）的典範，另一個是美學構築的傑作。把數學與藝術聯繫起來可能在許多人看來是天方夜譚。然而，在種種表面上無關甚至完全不同的現象背後，隱匿著藝術與數學極其豐富的普遍意義和極其深刻的美妙聯繫<sup>[1]</sup>。幾何、代數、維數和電腦的數學世界為藝術家們提供了研究、提高、簡化和完善他們工作的工具。多少世紀以來，藝術家和他們的工作都由於瞭解和利用數學而受到過影響。古希臘雕塑家們曾把黃金分割用在他們的許多作品的比例中。阿爾佈雷希特·丟勒（Albrecht Dürer, 1471-1528）把射影幾何中的概念用來實現透視，在他的羅馬字母印刷設計中，幾何結構起著重要的作用。由於穆斯林教義禁止把生物形體用在藝術中，穆斯林藝術家們不得不依靠數學作為他們藝術表現的手段，從而使他們創造出大量鑲嵌設計方案。達·芬奇（Da Vinci, 1452-1519）認為“...人類的任何研究如果不走數學闡述和證明的道路，就不能被稱做科學”。達·芬奇的雕塑和繪畫表明他研究過黃金矩形、比例和射影幾何，他的建築設計則顯示了他在幾何構造方面的工作和關於對稱的知識。

---

<sup>1</sup> 基金項目：全國教育科學“十五”規劃教育部重點課題：“文化傳統與數學教育現代化”（DHA010276）。

數學、音樂、建築這三者有關係嗎？有！不信請讀者參閱文 [2] 358 頁給出的一幅圖，圖下是根據數學公式畫出的線條組合，圖右上是參照該數學公式譜出的樂曲，圖左上是由同一數學公式形成的幾個曲面所構成的一座建築物。作者均為法籍希臘人辛那斯 (Iannis Xenakis, 1922- )。[2] 20 世紀初，偉大的德國數學家希爾伯特 (D. Hilbert, 1863-1943) 把歐幾里得 (Euclid, 約公元前 330-前 275) 幾何公理分解為其邏輯成分，產生了極大影響。差不多在同一時期，法國印象派畫家將油畫的色彩和明暗分解為最基本的成分。難道是巧合嗎？在 20 年代和 30 年代，建築方面的包豪斯學派 (Bauhaus School) 在德國按最簡約的方式建造民居，而法國的布爾巴基學派 (Bourbaki School) 正以儘可能的抽象方式重建數學 .....。20 世紀 90 年代中傑出的數學成就——解決了有 300 多年歷史的費馬 (Pierre de Fermat, 1601-1665) 問題——乃是典型的後現代派定理。所謂的後現代派藝術和建築最基本的品質，是設計者們自覺地將過去所有時代的各種風格結合在一起。確實，懷爾斯 (A. Wiles) 的證明將經典數學中的幾乎所有分支——純粹的數論、代數幾何、李群理論和分析——中的思想結合在了一起，它的根甚至可以追溯到 19 世紀克羅內克 (L. Kronecker, 1823-1891) 著名的“青春之夢”。數學確實跟藝術緊密地交織在一起，儘管有時這種聯繫是隱蔽的。

1979 年，美國數學家霍夫施塔特 (Hofstadter) 以他的「哥德爾，埃舍爾，巴赫：一條永恆的金帶」(中譯本由樂秀成編譯，四川人民出版社 1984 年出版) 一書轟動了美國。哥德爾 (K. Gödel, 1906-1978) 是 20 世紀最偉大的數學家之一，也是亞理士多德 (Aristotle, 公元前 384-前 322)、萊布尼茨 (G. W. Leibniz, 1646-1716) 以來最偉大的邏輯學家。哥德爾的理論改變了數學發展的進程，觸動了人類思維的深層結構，並且滲透到了音樂、美術、電腦和人工智慧等領域。埃舍爾 (M. C. Escher, 1898-1873) 是當代傑出畫家，他的一系列富有智慧的作品體現了奇妙的悖論、錯覺或者雙重含義。巴赫 (J. S. Bach, 1685-1750) 則是最負盛名的古典音樂大師。這本書揭示了數理邏輯、繪畫、音樂等領域之間深刻的共同規律 (特別是奇妙的怪圈)，似乎有一條永恆的金帶把這些表面上大相徑庭的領域連接在了一起。然而，其並沒有單純從數學的角度分析它們之間的關係，而是十分巧妙地把埃舍爾的畫，巴赫的樂曲及關於哥德爾定理的論述結合在一起，從而編織出了“一條永恆的金帶”。這條金帶發出的耀眼光輝不僅照亮了哥德爾及其證明思想，而且，它的更高價值就在於這一“連接”本身，即在於揭示出繪畫、音樂與數學這些似乎遙遠相隔的人類不同文化領域之間所存在的“驚人一致性”。另外，亨德森 (L. D. Henderson) 在 1983 年出版了他的「現代藝術中的四維空間與非歐幾何」一書，全書 500 多頁，剖析了現代繪畫、雕塑藝術等受高維空間、非歐幾何的啟發而發展的歷程。

## 2. 數學與音樂

數學和藝術確實有許多相通之處和共同之處。例如，歐幾里得的「幾何原本」常常被人稱為“雄偉的建築”，玻爾 (N. H. D. Bohr, 1885-1962) 的原子模型被愛因斯坦 (A. Einstein,

1879-1955) 稱爲“思想領域中最高的音樂神韻”。羅素 (B. Russell, 1872-1970) 說: “數學, 如果正確地看它, 不但擁有真理, 而且也有至高的美, 正像雕刻的美, 是一種冷而嚴肅的美”<sup>[3]</sup>。特別是音樂中的五線譜, 繪畫中的線條結構等, 都是用抽象的符號語言來表達內容。數學家西爾威斯特 (J. Sylvester, 1814-1897) 宣稱: “數學是理性的音樂, 音樂是感性的數學, 兩者的靈魂是完全一致的! ..... 當人類智慧昇華到完美境界時, 音樂和數學就互相滲透而融爲一體了”<sup>[4]</sup>。著名哲學家、數學家萊布尼茨也曾指出: “音樂 —— 這是心靈的歡樂, 而心靈不知不覺地進行著計算。”事實上, 自古以來, 音樂和數學就有關聯。中國古代的“三分損益法”與“十二平均律”就是採用數學運算研究樂律的方法。古希臘的畢達哥拉斯 (Pythagoras, 公元前572-前500) 學派發現產生各種諧音的弦的長度都是成整數比的, 樂聲的協調與所認識的整數之間有著密切的關係, 撥動一根弦發出的聲音依賴於弦的長度。事實上, 被撥動弦的每一種和諧的結合, 都能表示爲整數比。由增大成整數比的弦的長度, 能夠產生全部的音階。例如, 當兩根繃得一樣緊的弦的長度的比是 2 : 1 時, 就會發出相差八度的諧音; 而如果兩條弦的長度的比是 3 : 2 時, 就會發出另一種諧音; 短弦發出的音比長弦發出的音高五度; 等等。事實上, 從一根產生音 C 的弦開始, 就可接著 C 的長度的  $\frac{16}{15}$  給出 B, C 的長度的  $\frac{6}{5}$  給出 A, C 的  $\frac{4}{3}$  給出 G, C 的  $\frac{3}{2}$  給出 F, C 的  $\frac{8}{5}$  給出 E, C 的  $\frac{16}{9}$  給出 D, C 的  $\frac{2}{1}$  給出低音 C。後來人們把音樂和算術、幾何和天文學同列爲教育的課程。就連今天的電子電腦也始終跟音樂聯繫在一起。這裡進一步指出的是, 當畢達哥拉斯作出他的第一個偉大發現 —— 當他發現音調的高低依賴於震動弦的長度時, 對哲學和數學思想的未來方向具有決定意義的並不是這種事實本身, 而是對這種事實的解釋。畢達哥拉斯不可能把這種發現看成是一種孤立的現象。最深奧的神秘之一 —— 美的神祕, 似乎在這裡被揭示出來了。對希臘精神來說, 美始終具有一種完全客觀的意義。美就是真, 它是實在的一種基本品格。如果我們在音調的和諧中發現的美被還原爲一種簡單的數的比例的話, 那麼正是數向我們揭示宇宙秩序的基本結構。畢達哥拉斯學派有一句原話: “數是人類思想的嚮導和主人, 沒有它的力量, 萬物就都處於昏暗混亂之中。”我們並不是生活在真理的世界中, 而是生活在蒙蔽和錯覺的世界中, 在數中, 而且只有在數中, 我們才發現了一個可理解的宇宙。<sup>[5]</sup>

樂譜的書寫是數學在音樂上顯示其影響的最爲明顯的地方。在樂曲的稿中, 我們可以找到拍號 (4 : 4, 3 : 4 或 1 : 4 等)、每個小節的拍子、全音符、二分音符、四分音符、八分音符、十六分音符等等, 音樂方程就是一個最好的詮釋。譜寫樂曲要使它適合於每音節的拍子數, 這相似於找公分母的過程 —— 在一個固定的拍子裡, 不同長度的音符必須使它湊成一個特定的節拍。然而作曲家創造樂曲時卻能極其美妙而又毫不費力地把它們與樂譜的嚴格構造有機地融合在一起。對一部完整的作品進行分析, 我們會看到每一個音節都有規定的拍數, 而且運用了各種合適長度的音符。除了上述數學與樂譜的明顯聯繫外, 音樂還與比例、指數、曲線、周期函數以及電腦科學等相關聯。



音樂方程：上圖表示全音符、二分音符、四分音符、八分音符、十六分音符間的關係。  
加點的音符表示分數音符，因為加點的音符等於這音符的值的一倍半。

你可能感到驚奇，為什麼平臺鋼琴有它特有的形狀？實際上，許多樂器的形狀和結構都跟不同的數學概念聯繫著。指數函數和它的曲線就是這樣概念中的一種。一條指數曲線由形如  $y = k^x$  的方程所描述，這裡  $k > 0$ 。例如  $y = 2^x$ ，音樂的器械，無論是弦樂還是管樂，在它們的結構中都反映出指數曲線的形狀。

對樂聲本質的研究，在19世紀法國數學家傅立葉 (J. B. Fourier, 1768-1830) 的著作中達到了頂峰。他證明了所有的樂聲——不管是器樂還是聲樂——都能用數學運算式來描述，它們是一些簡單的正弦周期函數的和。每種聲音都有三種品質：音調、音量和音色，並以此與其他的樂聲相區別。傅立葉的發現，使人們可以將聲音的三種品質通過圖解加以描述並區分。音調與曲線的頻率有關，音量與曲線的振幅有關，而音色則與周期的形狀有關。這樣就使人們對音頻、音高把握得更加清楚了，從而為創作各種優美的音樂提供了可能。讀者還可通過網站 <http://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/postcalc/music/contents.html> 瞭解到更多的傅立葉方法與聲音、音樂的關係。

很少有人既通曉數學又通曉音樂，這使得把電腦用於合成音樂及樂器設計等方面難於成功。數學的發現，即周期函數，是現代樂器設計和電腦音響設計的精髓。許多樂器的製造都是把它們產生聲音的圖像，與這些樂器理想聲音的圖像比較然後加以改進的。電子音樂的忠實再生也是跟周期圖像緊密聯繫著的。音樂家和數學家們將在音樂的產生和再生方面，繼續擔任著同等重要的角色。

### 3. 數學與美術

數學與美術的聯繫則更加緊密。在文藝復興時期，藝術家們利用射影幾何的概念，把他們的平面畫布變換成他們需要表達的三維世界。今天，數學在為藝術家提供創造和傳達他們思想的靈感和工具方面仍然起著積極的作用。藝術家利用數學思想遁入高維空間。例如超立方體（所謂超立方體，是立方體的一種四維推廣形式）曾被藝術家們用作步入第四維的臺階。事實上，有許多藝術家正在進行與數學思想——特別是非周期鋪砌結構、多維空間和電腦再現技術的數學思想有關的藝術追求。

藝術家構想中的作品往往需要數學上對其物理性質的理解和認識，才能成為現實可能的作品。達·芬奇的大多數作品都是先經過數學分析然後進行創作的。如果埃舍爾沒有從數學上對鑲嵌圖案思想和視錯覺進行分析並瞭解它們的數學內容，他就不能自在地進行創作，作品也不能自在地完成。我們中大多數人都熟悉埃舍爾有關平面鑲嵌圖案的奇妙創造。他的工作遠遠勝過傳統的平面鑲嵌圖案。他給予他所鑲嵌的物件以運動和生命，這從「天和水」、「晝與夜」、「魚與鱗」和「遭遇」等著名作品可以得到證明。除了變換平面以外，被鑲嵌物件本身也經受變換。此外，人們看到他到周期鋪砌結構中的平移、旋轉和反射的概念掌握得很好。

埃舍爾也利用拓撲學領域中的物件和概念。麥比烏斯帶在他的木刻「麥比烏斯帶 I」、「麥比烏斯帶 II」和「騎手」中起著關鍵作用。他在他的作品「紐結」中精巧地作成三葉形紐結。埃舍爾的「蛇」是介紹紐結理論主題的一件完美的藝術品，即使他可能並非有意這樣做。「畫廊」和「陽臺」是拓撲變形的奇妙例子。這些版畫看來幾乎好像是印刷在經過奇妙的拓撲變形的橡皮薄板上的。

人們在埃舍爾的許多作品中發現的另外兩個數學主題是操作和混合維。在「爬蟲」中，埃舍爾的二維蜥蜴怪異地變成了在現實三維空間中爬行的生命。類似的變換發生在「魔鏡」和「迴圈」中。他利用射影幾何中的概念——透視、傳統意義上的沒影點和他自己的曲線沒影點，使「聖彼德的羅馬」、「通天塔」和「高與低」中產生深度和維度的感覺。

圓、橢圓、螺線、多面體和其他立體是我們在埃舍爾作品中看到的幾種幾何物件。例如，「三個球」創造出關於球形的三維錯覺，雖然它是完全由圓和橢圓組成的。在「星」中，我們看到各種不同的立體，包括柏拉圖 (Plato, 前430-前349) 立體在內，而四面體則是「四面類星體」的中心所在。總之埃舍爾在他的作品中使用了大量的數學技巧 (或許他本人並不一定有意)，在創意上充滿著有限與無限、離散與連續、低維與高維、靜止與運動等哲理，如「上行與下行」中的兩隊僧侶，就是沿著不可能的臺階，永無休止地往上走或往下走。是數學家 and 物理學家首先發現了他的價值，在此之前，埃舍爾被認為無所作爲和沒有出息。這裡需要指出的是，讀者進一步還可以從網站 <http://www.world of Escher.com/gallery/> 上看到本文提到的大量埃舍爾的繪畫，這樣會使讀者對本文的論點有更深入的理解。

今天，藝術家們正在探索著一種與數學相聯繫的新的藝術形式或創作材料——電腦。直至不久前為止，催生電腦藝術的人有數學家、科學家、工程師，以及除藝術家以外的幾乎每一個人。起初，我們面前充斥著大量類似曲線編織、線條畫和視錯覺的藝術。電腦還在商業藝術中起著重大的作用。一個能熟練操作電腦並且擁有先進軟體的藝術家，在幾分鐘內就能通過改變字體，採用不同顏色，把物件縮放至適當大小，旋轉或翻動物件，複製物件的不同部分等手段，把供廣告用的繪圖藝術思想變換成衆多不同的形式。過去，所有這些改變會使繪圖藝術家耗費幾小時甚至幾天的時間。工程師、建築師和其他設計者都毫不遲疑地把電腦應用到他們的創作中。

只要用鼠標器點幾下，就可以容易地改變一座建築，就可以轉動一架飛機使它所有可能的透視面呈現出來，就可以加入不同的截面，就可以毫不費力地加進或除去一些部分。在過去，這工作是緩慢而艱苦的<sup>[6]</sup>。

#### 4. 進一步的思考

需要進一步指出的是，由於數學（特別是現代數學）的研究對象在很大程度上可以被看成是“思維的自由想像和創造”。因此，美學的因素在數學的研究中佔有特別重要的地位，以致在一定程度上數學就可被看成一種藝術。事實上，數學理論雖以邏輯的嚴密性為特徵，但新概念的提出，新理論的創立則需要借助於直覺、想像等非邏輯思維。數學史上的衆多成就都證實了這種規律性。著名數學家龐加萊 (H. Poincare, 1854-1912) 說：“沒有直覺，數學家便會像這樣一個作家：他只是按語法寫作，但是卻毫無思想”。在數學研究中，雖然有大量表面看來枯燥無味的推理和計算，然而其中卻蘊藏著內在的、深邃的、理性的美。當我們創造了一種簡便的方法，作出一種簡化的證明，找到一種新的成功應用時，就會在內心深處激起強烈的美感。同時，“美”是數學中公認的一種評價標準。數學中美的東西是好的、比較簡單的，受到一致肯定和讚賞的。美的東西也常常是最有用的，因為不美的東西是冗繁的，用起來極不方便，甚至根本無法應用。數學還能陶冶人的美感、增進理性的審美能力。一個人數學造詣越深，越是擁有一種直覺力。

最後，由以上對數學是理性的藝術的論述可以看出，關於數學主要是有利於發展人們的邏輯思維，則是一種不正確的觀念；恰恰相反，數學不僅有利於發展人們的邏輯思維，而且也有利於人們的創造性才能包括審美、直覺的發展。如果採用現代認知科學的術語，這就是說，數學有利於人的右半腦和左半腦的均衡發展<sup>[7]</sup>。

#### 參考文獻

1. 黃秦安，數學哲學與數學文化。西安：陝西師範大學出版社，1999，275。
2. 沈致遠，科學是美麗的——科學藝術與人文思維。上海：上海教育出版社，2002，358。
3. 羅素，我的哲學發展。北京：商務印書館，1982，193。
4. R. E. Moritz, *Memorabilia Mathematica*. New York: The Macmillan Company, 1914, 31.
5. [德] 恩斯特·卡西爾，人論。甘陽譯，上海：上海譯文出版社，1985，267-268。
6. T·帕帕斯，數學的奇妙。陳以鴻譯，上海：上海科技教育出版社，1999，64-93。
7. 張維忠，數學文化與數學課程。上海：上海教育出版社，1999，91。

—本文作者現為浙江師範大學數理學院教授—